

TRAITÉ

DE

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE,

SUIVI

DE LA MÉTHODE DES PLANS COTÉS ET DE LA THÉORIE DES ENGRENAGES CYLINDRIQUES ET CONIQUES,

AVEC UNE COLLECTION D'ÉPURES, COMPOSÉE DE 69 PLANCHES;

Par C.-F.-A. LEROY,

Professeur à l'École Polytechnique, Maître de conférences à l'École Normale, Chevalier de la Légion-d'Honneur.

SECONDE ÉDITION, REVUE ET AUGMENTÉE.

TOME PREMIER. — TEXTE.

PARIS,

BACHELIER, [illegible]

Quai des [illegible]

CARILIAN-GOEURY ET DALMONT, [illegible]

Quai des [illegible]

1842



hommage
de l'Auteur



TRAITÉ

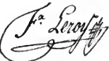
DE

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

TOME PREMIER. — TEXTE.



Tout exemplaire de cet ouvrage qui ne porterait pas, comme ci-dessous, la signature de l'auteur, sera contrefait. Les mesures seront prises pour atteindre, conformément aux lois, les fabricateurs et les débitants de ces faux exemplaires.



Ouvrage du même auteur, auquel se rapportent les renvois indiqués dans ce volume:

ANALYSE APPLIQUÉE à la Géométrie des trois dimensions, comprenant la théorie générale des surfaces courbes et des lignes à double courbure. Seconde édition. — 1 vol. in-8°... 5 fr.

IMPRIMERIE DE BACHELIER,
rue du Jardinet, 12.

TRAITÉ

DE

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE,

SUIVI

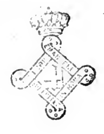
DE LA MÉTHODE DES PLANS COTÉS ET DE LA THÉORIE DES ENGRENAGES CYLINDRIQUES ET CONIQUES,

AVEC UNE COLLECTION D'ÉPURES, COMPOSÉE DE 69 PLANCHES;

PAR C.-F.-A. LEROY,

Professeur à l'École Polytechnique, Maître de conférences à l'École Normale, Chevalier de la Légion-d'Honneur

SECONDE ÉDITION, REVUE ET AUGMENTÉE.



TOME PREMIER. — TEXTE.

PARIS,

BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES, ETC., Quai des Augustins, n° 55.

CARILIAN-GOEURY ET DALMONT, LIBRAIRES DES CORPS ROYAUX DES PONTS ET CHAUSSÉES ET DES MINES, Quai des Augustins, n° 39.

1842.

AVERTISSEMENT.

Les procédés, souvent fort ingénieux, par lesquels les Tailleurs de pierre et les Charpentiers construisent leurs épures, étaient connus depuis longtemps, il est vrai; mais ils ne présentaient ordinairement que des méthodes isolées, particulières à chaque problème, et que le génie des artistes avait dû inventer à mesure qu'ils hasardaient de nouvelles combinaisons de voûtes. C'est vers la fin du siècle dernier que le célèbre MONGE a rattaché ces procédés divers à un corps de doctrine, dont il a exposé les principes généraux sous le nom de Géométrie descriptive; et par-là, il en a fait une science également propre à représenter les corps avec exactitude, et à fournir des moyens de recherche pour les propriétés générales de l'étendue considérée d'une manière abstraite. L'ouvrage que cet illustre Géomètre a écrit sur cette matière, est sans doute un modèle de clarté, mais il laisse des lacunes dans plusieurs théories importantes, et n'offre pas des exemples assez nombreux et assez variés pour que le lecteur puisse acquérir l'habitude des méthodes de projection. En outre, il est bien essentiel ici que les épures soient toujours tracées d'après un mode de ponctuation soumis à des règles constantes, afin de manifester sans ambiguïté, et par une sorte de langage sensible aux yeux du spectateur, la position respective des diverses parties de l'objet défini.

C'est dans ce double but qu'a été écrit cet ouvrage, où j'ai suivi l'ordre adopté pour le programme de l'École Polytechnique; du moins, autant que le permettent les différences qui se trouvent nécessairement entre un traité écrit et un cours oral, où la distribution des matières doit être subordonnée au temps dont les élèves ont besoin pour exécuter, dans l'intervalle des leçons, les travaux graphiques qui s'y rapportent. Toutefois, en multipliant les exemples relatifs aux problèmes des plans tangents et des intersections de surfaces, ce qui permettra aux élèves de varier entre eux les données d'une même question, je n'ai pas cru devoir me renfermer dans les limites de ce programme, que la courte durée des études à l'École Polytechnique, a forcé de restreindre beaucoup; mais j'ai eu le dessein d'offrir aux ingénieurs et aux personnes qui, par état ou par goût, voudront approfondir cette science susceptible de tant d'applications diverses, les moyens d'étudier toutes les res-

sources de la Géométrie descriptive. En conséquence, je me suis étendu sur les surfaces développables et les enveloppes, sur les hélicoïdes développables ou gauches, sur la courbure et les développées des courbes gauches, sur la courbure des surfaces et sur leurs lignes de courbure dont j'ai établi la théorie par des considérations synthétiques, en les accompagnant d'exemples divers. Quant aux surfaces gauches, si importantes par leur emploi fréquent dans les arts, une longue expérience m'a convaincu qu'il valait mieux ne citer d'abord que quelques cas fort simples de ces surfaces, pour empêcher les élèves de les confondre avec celles qui sont développables; puis, dans un livre séparé, réunir toutes les parties de la théorie complète de cette classe de surfaces, que j'ai eu soin d'appuyer encore par de nombreux exemples où je réalise les constructions indiquées dans l'exposition générale. D'ailleurs, cet ordre s'accorde bien avec la marche du cours à l'École Polytechnique, où les propriétés générales des surfaces gauches ne sont présentées qu'à une époque qui les rapproche de leurs applications à la Stéréotomie, et en fait mieux ressortir toute l'importance. Enfin, quelques théorèmes utiles pour les Ombres et la Perspective, ont été réunis dans des *Additions*, avec un exposé succinct de la méthode des *Plans cotés* qui sert pour les dessins de la Fortification.

Dans cette seconde édition, j'ai ajouté plusieurs épures nouvelles, ainsi que la théorie et le tracé des *Engrenages*, ce qui augmente de *neuf* le nombre des planches. Quant à l'ouvrage que j'ai annoncé sur les Ombres, la Perspective et la Stéréotomie, la rédaction et les dessins sont déjà terminés pour les deux tiers du volume; et je vais m'efforcer de le compléter aussi promptement qu'il me sera possible.

TABLE DES MATIÈRES.

LIVRE PREMIER.

DES DROITES ET DES PLANS

CHAPITRE Ier. *Notions préliminaires.*

CHAPITRE II. *Problèmes sur les droites et les plans.*

Nos

CHAPITRE IV. *Des plans tangents aux surfaces de révolution, lorsque le point de contact est assigné.*

LIVRE III.

DES SURFACES DÉVELOPPABLES ET DES ENVELOPPES

CHAPITRE Ier. *Des surfaces développables.*

CHAPITRE II. *Des surfaces enveloppes.*

LIVRE IV.

DES INTERSECTIONS DE SURFACES

CHAPITRE Ier. *Principes généraux.*

Pag.

CHAPITRE II. *Des sections planes.*

CHAPITRE III. *Intersection de deux surfaces courbes.*

LIVRE V.

DES PLANS TANGENTS DONT LE POINT DE CONTACT N'EST PAS DONNÉ.

CHAPITRE Ier. *Des plans tangents menés par un point extérieur à la surface.*

CHAPITRE II. *Des plans tangents parallèles à une droite donnée.*

LIVRE VI.

QUESTIONS DIVERSES.

b

CHAPITRE II. *Des Épicycloïdes.*

CHAPITRE III. *Sur les sphères et les pyramides*

LIVRE VII.

DES SURFACES GAUCHES

CHAPITRE Ier. *Notions générales sur les surfaces gauches.*

CHAPITRE II. *De l'hyperboloïde à une nappe.*

CHAPITRE III. *Du paraboloïde hyperbolique.*

b..

CHAPITRE IV. *Des plans tangents aux surfaces gauches générales.*

CHAPITRE V. *Exemples divers de surfaces gauches.*

LIVRE VIII.

DE LA COURBURE DES LIGNES ET DES SURFACES

CHAPITRE Ier. *Sur la courbure et les développées des lignes.*

Nos.

CHAPITRE II. *De la courbure des surfaces.*

LIVRE IX.

ADDITIONS.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

TRAITÉ

DE

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

LIVRE PREMIER.

DES DROITES ET DES PLANS.

CHAPITRE PREMIER.

Notions préliminaires.

1. A chaque pas que l'on fait dans les sciences ou dans les arts, on éprouve le besoin de transmettre aux autres hommes la connaissance exacte des formes qu'affectent les corps, soit pour manifester les rapports géométriques que l'on y a découverts, soit pour guider l'artiste chargé de reproduire ces objets dans des dimensions assignées d'avance. Or, de tous les moyens, le plus efficace et quelquefois le seul capable d'atteindre complétement ce but, c'est *la description graphique* des corps; et tel est aussi le premier objet de la Géométrie descriptive, dont les méthodes générales deviendront ensuite, par leur fécondité, des moyens de recherche propres à découvrir de nouvelles propriétés de l'étendue, et fourniront d'ailleurs les procédés nécessaires pour résoudre les divers problèmes de perspective, de stéréotomie, de fortification, etc.

2. Mais ici se présentent deux genres de difficultés: en premier lieu, les corps offrent toujours trois dimensions, et cependant on sent bien que des constructions à effectuer dans l'espace seraient fort incommodes, sinon impraticables; par conséquent il faut trouver des méthodes qui permettent de rap-

porter tous les points de l'espace à un seul et même plan, ou du moins qui ramènent toutes les opérations graphiques à s'exécuter dans ce plan unique.

3. En second lieu, ces méthodes devant servir non à établir des théories purement spéculatives, mais bien à effectuer des opérations réelles, il faut qu'elles offrent une précision complète dans la manière d'exprimer les données et les résultats graphiques de chaque question; et c'est en cela surtout qu'elles différeront essentiellement des procédés employés dans la géométrie ordinaire, du moins quand on considère les trois dimensions de l'espace. Là, en effet, les figures n'étant destinées qu'à guider l'esprit dans la suite des raisonnements nécessaires pour démontrer la vérité d'un théorème, ne sont tracées que d'une manière vague, ou d'après certaines conventions tacites qui renferment toujours beaucoup d'arbitraire. Pour s'en convaincre, il suffira de se rappeler comment on résout le problème de la plus courte distance de deux droites non situées dans le même plan; ou bien encore celui où il s'agit de trouver le centre et le rayon d'une sphère qui doit passer par quatre points donnés. On verra aisément que, dans ces questions, la géométrie ordinaire indique bien la série d'opérations qu'il faudrait exécuter pour arriver à la solution du problème; mais elle ne donne pas les moyens d'effectuer réellement ces constructions, et d'obtenir un résultat déterminé pour la grandeur et la position de la plus courte distance, non plus que pour la longueur du rayon et la position du centre de la sphère (*voyez* n[os] **49** et **500**). Il est donc indispensable d'adopter, en Géométrie descriptive, un mode de construction qui ne laisse rien d'arbitraire dans la représentation des données et des résultats, et qui permette aussi d'effectuer toutes les opérations graphiques sur un seul et même plan : or, ces deux avantages nous seront fournis par la *Méthode des projections* dont nous allons exposer les principes.

Fig. 1. 4. Si d'un point *a* situé dans l'espace, on abaisse sur un plan fixe VXY une perpendiculaire *a*A, le pied A de cette droite est dit *la projection* du point *a* sur le plan en question. De même, en abaissant des perpendiculaires de tous les points de la droite *abd*..., la suite des points A, B, D,... forme ce qu'on appelle *la projection* de la droite *abd* sur le plan fixe; et cette projection est nécessairement rectiligne, puisque toutes ces perpendiculaires étant évidemment contenues dans le plan mené par l'une d'entre elles *a*A et par la droite *ad*, c'est l'intersection du *plan projetant Aad* avec le *plan de projection* VXY, qui fournit la projection ABD.

Généralement, la projection d'une courbe quelconque *mnp* est la suite des pieds des perpendiculaires *m*M, *n*N, *p*P,.... abaissées de ces divers points

sur le plan fixe, et cette projection MNP..... est une ligne dont la courbure diffère ordinairement de celle de la courbe donnée dans l'espace. D'ailleurs, l'ensemble de ces perpendiculaires compose une surface cylindrique dans le sens général de ce mot, et on la nomme *le cylindre projetant* de la courbe *mnp*.

5. Cela posé, je dis qu'un point, une droite, ou une courbe, sont complétement déterminés de position, quand on assigne leurs projections sur deux plans fixes dont la situation est connue, et qui ne sont pas parallèles. Soient, en effet, VXY et XYZ deux plans de ce genre, A et A' les projections données d'un certain point dans l'espace : si par le point A vous élevez une perpendiculaire indéfinie Aa sur le plan VXY, cette droite passera nécessairement par le point demandé ; ce point devra aussi se trouver sur la droite A'a élevée perpendiculairement au plan XYZ; donc il ne pourra occuper dans l'espace qu'*une position unique*, déterminée par l'intersection de ces deux perpendiculaires. A la vérité, si les deux droites Aa et A'a ne se rencontraient pas, il n'existerait aucun point de l'espace qui eût pour projections A et A'; mais cela prouve seulement que les deux projections d'un point ne doivent pas être prises d'une manière tout à fait arbitraire, et qu'il y a entre elles une dépendance que nous expliquerons bientôt (n° **10**).

6. Soient maintenant AD et A'D' les projections d'une droite inconnue, sur les deux plans fixes VXY et XYZ. En imaginant par la première un plan indéfini DAa perpendiculaire à VXY, ce plan renfermera évidemment la droite demandée ; elle sera aussi dans le plan D'A'a mené par D'A', perpendiculairement à XYZ; donc la ligne inconnue se trouvera nécessairement à l'intersection de ces deux plans, qui est une droite unique et *déterminée*. Il n'y aurait d'exception que dans le cas où les deux plans projetants DAa et D'A'a se confondraient en un seul, ce qui supposerait que la droite dans l'espace, ainsi que ses deux projections, se trouveraient précisément perpendiculaires à l'intersection XY des deux plans fixes : alors deux projections de ce genre ne suffiraient plus pour définir la droite en question, et il faudrait demander une troisième projection faite sur un autre plan fixe, non parallèle à l'intersection des deux premiers. Fig. 1.

7. Enfin, si l'on donne les projections MNP et M'N'P' d'une courbe inconnue, on imaginera par la première un cylindre perpendiculaire au plan VXY, et par la seconde un autre cylindre perpendiculaire au plan XYZ; la courbe demandée devra évidemment se trouver située sur chacune de ces surfaces, et par conséquent sa position et sa forme seront déterminées par leur intersection *mnp*, qui pourra bien être une *courbe gauche* ou *courbe à double cour-*

bure (*), c'est-à-dire telle que tous ses points ne soient pas compris dans un même plan.

Ce sera donc dorénavant par ses deux projections que nous définirons graphiquement un point ou une ligne; et quand nous dirons que tel point ou telle ligne est donné, il faudra entendre que ce sont leurs projections qui sont connues. Quant aux surfaces, nous verrons plus loin (n° 93) comment il faut modifier l'emploi des projections pour les représenter commodément.

8. Dans tout ce qui précède, nous avons supposé que les projections s'exécutaient au moyen de droites abaissées perpendiculairement sur le plan fixe. Quelquefois, il est vrai, on emploie des droites *obliques* au plan, quoique toujours parallèles à une direction donnée, et les conséquences que nous avons établies dans les numéros 5, 6 et 7 subsistent également; mais il faut de graves motifs pour faire adopter ce genre de projections, parce qu'en général il est moins simple et offre moins d'exactitude dans les résultats graphiques, attendu que des droites qui se coupent obliquement, laissent plus d'incertitude sur la position précise de leur point de rencontre. Ainsi, à moins que nous n'avertissions expressément du contraire, les projections seront toujours *orthogonales*.

Par des motifs semblables, on choisit ordinairement les plans de projection VXY, XYZ, perpendiculaires entre eux; et pour se les représenter plus aisément, on suppose que le premier est *horizontal* et l'autre *vertical*. Leur intersection XY, qui est une ligne importante à remarquer, se nomme la *ligne de terre*.

9. Voilà donc une méthode suffisante pour exprimer graphiquement les données d'un problème sans aucune indétermination; il reste à la modifier de manière que les constructions puissent toutes s'exécuter sur un plan unique. Pour atteindre ce but, on imagine, après avoir projeté les points et les lignes dont il est question sur les plans rectangulaires VXY, XYZ, que ce dernier a

---

(*) Cette dénomination ne vient pas, comme on l'a dit faussement, de ce qu'une telle courbe participe aux deux courbures des surfaces dont elle est l'intersection; car, d'abord, une surface n'admet pas une courbure unique, et ensuite une même courbe peut être l'intersection d'une infinité de surfaces très-différentes. Mais cette expression veut dire qu'une courbe qui n'est point plane, présente deux sortes de courbure, l'une par rapport à sa tangente, l'autre par rapport à son plan osculateur, comme nous l'expliquerons plus loin (n° 684). La première est proprement la seule et véritable *courbure* de la courbe, la seconde est une vraie *torsion*; c'est pourquoi la dénomination de *courbe gauche* serait à la fois plus exacte et plus simple.

tourné autour de la ligne de terre XY pour se rabattre sur le plan horizontal, et ne former avec lui qu'un seul et même plan VZ'; et c'est sur ce dernier que l'on trace effectivement toutes les constructions que l'on aurait dû faire sur les deux plans primitifs. Néanmoins, il ne faut pas perdre de vue que ce rabattement n'est admis que comme moyen d'exécution; et, toutes les fois qu'on veut se rendre compte d'une opération par des considérations géométriques, on doit, par la pensée, relever le plan vertical, et se le figurer toujours dans une situation perpendiculaire au plan horizontal.

10. Après le rabattement des plans fixes, il existe entre les deux projections d'un même point de l'espace, une dépendance très-importante à observer. En effet, les deux droites A*a* et A'*a* qui projettent le point *a* en A et en A', sont perpendiculaires, l'une au plan horizontal, l'autre au plan vertical; ainsi le plan A*a*A', mené par ces deux droites, se trouvera perpendiculaire aux deux plans de projection, et par suite à leur intersection XY; donc le plan A*a*A' coupera ceux-ci suivant des droites AF, A'F, perpendiculaires sur XY, et aboutissant au même point F de cette ligne de terre. Cela posé, quand le plan vertical XYZ tourne autour de XY, il entraîne avec lui la droite A'F qui, pendant ce mouvement, demeure perpendiculaire à la charnière XY; par conséquent, après le rabattement du plan vertical, la droite FA' prendra une position FA" qui sera évidemment le prolongement de FA. Ainsi *les deux projections* A *et* A" *d'un même point de l'espace, doivent toujours se trouver sur une même droite perpendiculaire à la ligne de terre* XY, lorsque les plans de projection sont rabattus l'un sur l'autre : de sorte que, si l'on prend à volonté une de ces projections, A par exemple, il faudra mener la droite indéfinie AF perpendiculaire à XY, et placer quelque part sur le prolongement de AF, la deuxième projection A". FIG. 1.

11. Quant à la droite *ad*, si l'on rabat semblablement le point D' en D", la projection verticale A'D' deviendra en rabattement A" D"; mais celle-ci n'aura, avec la projection horizontale AD, aucune dépendance nécessaire, de sorte que l'on peut tracer *arbitrairement* les lignes AD et A" D" pour représenter les deux projections d'une même droite dans l'espace. Il faut toutefois excepter le seul cas où AD serait perpendiculaire à la ligne de terre XY; alors la projection verticale devrait aussi être le prolongement de AD; mais nous avons déjà dit (n° **6**) que, dans ce cas tout particulier, deux projections de ce genre laisseraient la droite indéterminée de position.

12. Dorénavant nous placerons les plans de projection rabattus, de manière que la ligne de terre XY ait la position indiquée *fig.* 2; et comme alors la partie VXY de la feuille de dessin représentera en même temps la portion *anté-*

rieure du plan horizontal et la portion *inférieure* du plan vertical qui est venue se confondre avec la première, tandis que la partie XYZ comprendra la portion *supérieure* du plan vertical et la portion *postérieure* du plan horizontal, il ne suffira pas, pour déterminer graphiquement un point de l'espace, de donner indistinctement ses deux projections A et A'. Il faudra encore énoncer si le point A est la projection horizontale, ou bien s'il est la projection verticale ; car l'une et l'autre de ces hypothèses peuvent être admises, et elles produiraient une très-grande différence quant à la position réelle du point dans l'espace. Afin donc de rappeler aux yeux le plan auquel est relative chacune des projections, nous conviendrons de noter ordinairement, par des lettres sans accent, les projections *horizontales* des points ou des droites, et par des lettres accentuées les
Fig. 2. projections *verticales*. Ainsi le point (A, A') désignera le point de l'espace qui est projeté horizontalement en A et verticalement en A' : le point (B, B') désignera celui qui a pour projection horizontale B et pour projection verticale B', et il en sera de même du point (C, C') ou du point (D, D'); mais le lecteur fera bien d'exercer son imagination à se représenter les positions diverses de ces points-là, au-dessus ou au-dessous, en avant ou en arrière du plan de projection, afin de pouvoir dorénavant reconnaître avec facilité dans lequel des quatre angles dièdres, formés par ces deux plans, se trouve situé un point défini par ses projections.

Fig. 3. **13.** Les mêmes conventions devront être appliquées aux lignes; ainsi la droite (AB, A'B') sera celle qui a pour projection horizontale AB, et pour projection verticale A'B' : mais comme d'ailleurs une droite est déterminée de position par la connaissance de deux de ses points, nous allons donner le moyen général de trouver *les traces d'une droite*, c'est-à-dire les points où elle va rencontrer les deux plans de projection.

La trace verticale de la droite (AB, A'B') étant un point commun au plan vertical et à la droite, elle doit être projetée horizontalement sur la ligne de terre XY, et aussi sur la ligne AB indéfiniment prolongée; donc cette trace a pour projection horizontale le point C, et conséquemment elle sera placée quelque part sur la verticale CC' : mais cette même trace doit être évidemment située sur la projection verticale A'B' indéfinie; donc elle est au point C'. De là résulte cette règle générale dont il faut se rendre l'application très-familière : *prolongez la projection horizontale de la droite jusqu'à la ligne de terre, et à ce point élevez une verticale indéfinie qui, par sa rencontre avec la projection verticale, donnera la trace verticale de la droite proposée.*

La trace horizontale de la même droite étant un point situé à la fois dans le

plan horizontal et sur la ligne proposée, se trouvera projetée verticalement sur la ligne de terre XY et sur A'B' indéfinie; donc cette trace aura pour projection verticale le point D', et conséquemment elle sera placée quelque part sur la perpendiculaire D'D à la ligne de terre. Mais d'ailleurs cette trace doit nécessairement se trouver sur la projection horizontale AB indéfinie; donc elle est au point D. Ainsi, en général, *prolongez la projection verticale jusqu'à la ligne de terre; et, à ce point, élevez sur cette dernière ligne une perpendiculaire indéfinie qui, par sa rencontre avec la projection horizontale, déterminera la trace horizontale de la droite en question.*

14. Réciproquement, si l'on donnait les deux traces D et C' d'une droite, il serait facile d'en conclure les projections; car, comme le point C' appartient à la droite même, la perpendiculaire C'C abaissée sur la ligne de terre, donnera un point C de la projection horizontale, et celle-ci sera évidemment DC. De même, le point D qui appartient à la droite, étant projeté verticalement sur la ligne de terre, donnera un point D' de la projection verticale qui sera D'C'.

On fera bien de s'exercer à résoudre ces deux questions réciproques l'une de l'autre, sur des droites diversement situées, telles que sont, dans la *fig.* 3, la ligne (EF, E'F'), dont la trace horizontale est en F et la trace verticale en G', et la ligne (HK, H'K'), dont K' est la trace verticale et L la trace horizontale.

15. En terminant ces notions préliminaires, nous établirons quelques règles essentielles à observer dans le tracé de toutes les épures. Ces dessins, en effet, devant servir à représenter exactement la forme des objets, il faut que les divers modes de ponctuation qu'on y emploiera, offrent une sorte de langage intelligible aux yeux; c'est-à-dire qu'ils manifestent clairement la situation relative des différentes parties, distinguent celles qui sont cachées de celles qui sont visibles pour l'observateur, et fassent discerner les résultats d'un problème d'avec les lignes qui n'ont servi que de moyens auxiliaires pour y arriver; c'est pourquoi nous adopterons constamment les règles suivantes:

1°. Les lignes PRINCIPALES, c'est-à-dire celles qui représentent *les données* ou *les résultats* d'un problème, seront marquées par *un trait plein et continu*, lorsqu'elles seront *visibles;* mais si ces lignes principales sont *invisibles*, elles seront *ponctuées*, c'est-à-dire tracées en points ronds. On voit des exemples de ces deux modes de ponctuation dans les lignes ABCD et EFGH de la *fig.* 3 *bis.*

2°. Les lignes AUXILIAIRES, c'est-à-dire toutes celles qui ne rentreront pas dans la classe précédente, et qui ne seront employées que comme des moyens d'arriver à la solution du problème, seront *pointillées* ou composées de petits

traits interrompus; telle est la ligne P dans la *fig.* 3 *bis*. Quant à ces lignes auxiliaires, il n'y aura jamais lieu de distinguer si elles sont visibles ou non, parce qu'elles sont censées n'exister que dans l'imagination du géomètre qui les conçoit pour parvenir au résultat demandé.

3°. Lorsque parmi ces lignes auxiliaires il s'en trouvera quelqu'une qui offrira plus d'importance, et sur laquelle on voudra appeler l'attention d'une manière particulière, on pourra la représenter par *une ligne mixte*, composée de petits traits séparés par un ou deux points ronds, comme dans les droites M et N de la *fig.* 3 *bis*. Cependant on doit se garder de trop multiplier ce mode de ponctuation, et consulter sur cela le bon goût et des modèles bien choisis; d'ailleurs il ne faut jamais employer ces lignes mixtes pour les droites qui réunissent simplement les deux projections d'un même point.

16. Il reste maintenant à expliquer comment, parmi les lignes *principales* de chaque question, on discernera celles qui sont visibles et que l'on doit marquer en trait plein, d'avec celles qui sont invisibles et que l'on doit ponctuer. Des règles complètes sur ce sujet ne pourront être données qu'après avoir parlé des surfaces courbes et de leurs plans tangents; mais, comme dans les premiers problèmes qui vont nous occuper, il ne se rencontrera que des droites et des plans, il nous suffira pour l'instant de poser les conventions suivantes :

On admet toujours que l'observateur, qui considère la projection d'un objet sur le plan *horizontal*, est placé *au-dessus de ce plan et à une distance infinie sur la verticale* qui passe par un quelconque des points de cet objet, mais en avant du plan vertical; et cette convention qui simplifiera, comme nous le verrons plus loin, le tracé du contour apparent des surfaces courbes, a été d'ailleurs suggérée par la manière dont on projette les points de l'espace sur un plan. En effet, les rayons visuels menés de l'œil de l'observateur à tous les points d'un corps, approchent d'autant plus d'être perpendiculaires au plan horizontal, que l'observateur s'élève davantage en restant sur la même verticale; de sorte que quand le point de vue est à une distance infinie, ces rayons deviennent parallèles, et coïncident avec les droites qui servent à projeter les points du corps. D'où il suit que *la projection horizontale d'un objet n'est autre chose qu'*UNE VUE *de cet objet, prise d'un point infiniment éloigné sur la verticale;* résultat qui justifie suffisamment la convention énoncée plus haut.

Par une raison semblable, toute projection *verticale* est censée vue par un observateur placé *à une distance infinie sur une perpendiculaire au plan vertical, élevée en avant de ce plan et au-dessus du plan horizontal.*

D'après cela, toute ligne ou portion de ligne *principale* qui se trouvera au-dessous du plan horizontal, ou derrière le plan vertical, sera réputée invisible; et, comme telle, *ponctuée* en points ronds. Si, de plus, il se trouve dans la question quelque plan réellement existant, et qu'une portion de ligne principale soit située derrière ce plan ou au-dessous, par rapport à l'observateur, cette portion devra aussi être *ponctuée* : mais il faudra se souvenir que ces distinctions ne regardent nullement *les lignes auxiliaires*, par la raison citée (n° **15**, 2°). On pourra reconnaître déjà l'application de ces règles dans la *fig.* 3, et nous aurons soin de les rappeler dans la plupart des problèmes que nous allons résoudre.

CHAPITRE II.

Problèmes sur les lignes droites et les plans.

17. *Construire la droite qui passerait par deux points donnés* (A, A') *et* (M, M'); *puis, trouver la véritable distance de ces deux points* (*). FIG. 4.

D'après les définitions établies au n° **4**, il est évident que la projection horizontale de la droite cherchée passera par les points A et M, tandis que la projection verticale passera par A' et M'; donc cette droite indéfinie est pro-

(*) Avant de construire une épure, il est essentiel d'observer les précautions suivantes. On trace d'abord, avec le crayon, une droite indéfinie vers le milieu de la feuille de dessin, et à peu près parallèle à sa longueur : puis, on trace une seconde droite exactement perpendiculaire sur la première, *en se servant d'arcs de cercle;* car l'équerre n'est pas un instrument dont la précision soit assez sûre pour qu'on l'emploie à mener des perpendiculaires qui doivent avoir une longueur un peu considérable. Mais du moins l'équerre peut servir à mener des parallèles par un procédé très-exact et très-expéditif, *lequel consiste à la faire glisser le long d'une règle fixe;* aussi c'est par ce moyen que l'on doit tracer, dans chaque épure, la ligne de terre et toutes les droites qui lui sont parallèles ou perpendiculaires, en se dirigeant sur les deux droites rectangulaires que nous avons recommandé de construire d'abord, et qui forment ce que les praticiens appellent *le trait carré.*

Ajoutons en outre que, quelque importante que soit la ligne de terre, il faut se garder de la former avec un trait plus gros que les lignes principales; car il en résulterait souvent beaucoup d'inexactitude dans la situation des points où elle serait rencontrée par les autres droites de l'épure.

jetée suivant AMB et A'M'B', et par là elle se trouve complétement déterminée de position (n° 6). D'ailleurs on peut construire ses traces (n° 13), qui seront les points (B, B') et (C, C').

Quant à la distance des deux points donnés, elle est mesurée dans l'espace par la portion de droite projetée sur AM et A'M'; mais il est facile de voir qu'une droite finie est toujours plus longue que sa projection sur un plan, excepté quand la première se trouve parallèle au plan sur lequel on la projette; car *alors la droite dans l'espace est évidemment de même longueur que sa projection.* D'après cette remarque, imaginons que la ligne (AM, A'M') tourne autour de la verticale projetée en A, sans changer d'inclinaison avec cette dernière; par là l'extrémité (A, A') demeurera immobile, tandis que l'autre extrémité (M, M') restera à une hauteur constante, en décrivant seulement un arc de cercle autour de l'axe de rotation. Or, si l'on continue ce mouvement jusqu'à ce que la droite mobile soit devenue *parallèle au plan vertical*, ce qui arrivera quand la projection AM aura pris la situation AP parallèle à la ligne de terre XY, alors l'extrémité M venue en P, se trouvera projetée verticalement (n° 10) quelque part sur PIP' perpendiculaire à XY; et comme elle doit être à la même hauteur que M', si l'on mène l'horizontale HM'P', le point P' sera la projection verticale de l'extrémité mobile de la droite en question. D'ailleurs, puisque l'autre extrémité (A, A') est demeurée invariable, il s'ensuit que la droite (AM, A'M') se trouve actuellement projetée suivant AP, A'P'; et sa véritable longueur est précisément la projection verticale A'P', d'après la remarque faite au commencement de cet article. De là on conclut la règle suivante qu'il faut se rendre très-familière :

Fig. 4. *Pour trouver la distance de deux points* (A, A') *et* (M, M'), *formez un triangle rectangle* A'H'P', *dont un côté* A'H' *soit la différence des hauteurs* A'R *et* M'K *de ces deux points* au-dessus du plan horizontal, *et dont l'autre côté* H'P' *soit égal à l'intervalle* AM *des deux projections horizontales : l'hypoténuse* A'P' *sera la distance demandée.*

18. On arriverait au même but en construisant, sur le plan horizontal, *un triangle rectangle* ADQ *dont un côté égalerait la différence des distances* AR *et* MK *des deux points donnés au plan vertical, et dont l'autre côté* DQ *serait l'intervalle* A'M' *des deux projections verticales; l'hypoténuse* AQ *exprimerait encore la distance des deux points dans l'espace*, et devrait se trouver identique avec A'P'. Pour se rendre compte de cette nouvelle construction, il suffira d'imaginer que la droite proposée a tourné autour de l'horizontale qui est projetée verticalement en A', sans changer d'inclinaison par rapport à cette dernière, jusqu'à ce que cette droite mobile soit devenue *parallèle au plan horizontal.*

19. On aurait pu aussi *rabattre* la droite (AM, A′M′) sur le plan horizontal, en faisant tourner autour de AM, comme charnière, le trapèze invariable formé par la droite proposée et par les verticales qui projettent ses extrémités en A et en M. Par-là ces deux verticales seraient demeurées perpendiculaires à la charnière AM, et auraient pris les positions AA″ = RA′, MM″ = KM′; de sorte qu'en traçant la droite A″M″, on aurait encore obtenu la véritable distance des deux points (A, A′) et (M, M′). D'ailleurs, il se présente ici une de ces vérifications qu'il ne faut pas négliger dans les opérations graphiques; c'est que la ligne A″M″ prolongée doit aller aboutir en B, puisque ce dernier point, étant la trace horizontale de la droite primitive, se trouvait situé sur la charnière AMB, et qu'il a dû, comme tel, rester immobile pendant la révolution de la droite.

20. *Réciproquement, si l'on donnait la droite indéfinie* (AB, A′B′) *avec un de ses points* (A, A′), *et qu'on voulût trouver sur cette ligne un autre point* (M, M′) *qui fût éloigné du premier d'une quantité donnée* δ, on rabattrait comme précédemment la droite proposée sur le plan horizontal, en faisant AA″ = RA′, et tirant A″B. Ensuite, on prendrait sur cette dernière ligne un intervalle A″M″ = δ : puis, en relevant la droite rabattue A″B, le point M″ se ramènerait en M par une perpendiculaire sur la charnière AB; et enfin, de la projection horizontale M, on conclurait (n° 10) l'autre projection M′, ce qui déterminerait complétement le point demandé.

21. *Par un point donné* (D, D′) *mener une droite qui soit parallèle à une droite connue* (AB, A′B′). FIG. 5.

Lorsque deux droites sont parallèles, les plans qui les projettent sont évidemment parallèles entre eux; et par conséquent les intersections de ceux-ci avec le plan de projection, c'est-à-dire les projections des droites, seront nécessairement parallèles l'une à l'autre. Réciproquement, lorsque les projections horizontales de deux droites sont parallèles, et qu'il en est de même de leurs projections verticales, les quatre plans projetants sont parallèles deux à deux; d'où il suit que leurs intersections mutuelles, c'est-à-dire les droites dans l'espace, sont parallèles entre elles. D'après cela, si par le point D on mène une parallèle DE à AB, et par le point D′ une parallèle D′E′ à A′B′, la droite demandée aura pour projection DE et D′E′; elle sera donc ainsi complétement déterminée, et d'ailleurs les traces de cette droite, qui seront en F et en E′, se construiront comme on l'a dit au n° 13.

22. *Construire le plan qui passerait par trois points donnés* (A, A′), (B, B′), (C, C′). FIG. 6.

Observons d'abord que pour déterminer graphiquement la position d'un plan, il suffit d'assigner ses *deux traces*, c'est-à-dire les intersections de ce plan avec les plans de projection. Ces deux traces devront toujours couper la ligne de terre au même point; mais l'angle qu'elles comprendront entre elles sur les plans de projection rabattus, ne sera pas égal à celui qu'elles forment dans l'espace. En outre, il est bien évident que, quand une droite est située dans un plan, les traces de cette droite (n° **13**) doivent être situées quelque part sur les traces du plan.

Cela posé, joignons les points donnés deux à deux par des droites (AB, A'B'), (BC, B'C'), (AC, A'C'), lesquelles ayant chacune deux points dans le plan cherché, y seront contenues tout entières; puis construisons, comme au n° **13**, les traces verticales E', F' et G' de ces droites. Alors ces trois points, qui doivent évidemment appartenir à l'intersection du plan inconnu avec le plan vertical de projection, se trouveront nécessairement en ligne droite, et seront plus que suffisants pour déterminer *la trace verticale* E'F'G' du plan demandé. De même, *la trace horizontale* DHK de ce plan s'obtiendra en construisant les traces horizontales D, H et K des trois droites auxiliaires; d'ailleurs les deux lignes E'G' et DH ainsi obtenues, devront aller rencontrer la ligne de terre XY en un même point Q, ce qui offrira une nouvelle vérification des constructions antérieures.

Si l'on voulait *faire passer un plan par une droite et un point donnés*, on joindrait ce point avec un de ceux de la droite, ou bien on mènerait une parallèle à celle-ci par le point donné; alors on connaîtrait ainsi deux droites situées dans le plan cherché, et leurs traces suffiraient pour déterminer celles de ce plan.

Fig. 7. **23.** *Par un point donné* (A, A') *mener un plan qui soit parallèle à un autre plan dont la trace horizontale est* ST *et la trace verticale* TV'.

Il est évident que deux plans parallèles doivent avoir leurs traces respectivement parallèles; ainsi il suffira de trouver un point de chacune des traces du plan demandé. Pour cela, imaginons par le point donné (A, A') *une droite auxiliaire* qui soit située dans le plan inconnu; le choix le plus simple sera de mener cette droite *parallèlement à la trace horizontale* de ce même plan, c'est-à-dire parallèlement à ST. Si donc on tire dans cette direction la ligne AB, et qu'on mène A'B' parallèle à la ligne de terre, ce seront là évidemment les deux projections de la droite auxiliaire renfermée dans le plan inconnu. Cela posé, en construisant (n° **13**) le point B' où elle va percer le plan vertical, ce point appartiendra nécessairement à la trace du plan cherché, laquelle sera par con-

séquent la droite B'Q parallèle à V'T : l'autre trace devant passer par le point Q, sera la ligne PQ parallèle à TS.

On peut aussi, comme vérification, construire directement un point de la trace horizontale du plan inconnu. Pour cela, on imaginera par le point (A, A'), une droite auxiliaire qui soit *parallèle à la trace verticale* de ce plan; et elle aura évidemment pour projections AC parallèle à la ligne de terre, et A'C' parallèle à V'T. Si donc on cherche (n° **13**) le point C où cette auxiliaire va percer le plan horizontal, ce point appartiendra nécessairement à la trace du plan demandé; ainsi il faudra que la droite PQ, déjà construite, passe par le point C.

24. Observons que, dans l'épure actuelle, on n'a pas regardé les deux plans STV' et PQR' comme existant réellement; car alors le premier aurait rendu l'autre invisible, et il eût fallu (n° **15**, 1°) *ponctuer* en totalité les traces de ce dernier, ce qui aurait multiplié beaucoup les points ronds, et surtout aurait eu le grave inconvénient de ne plus laisser discerner les parties des traces situées en-deçà des plans de projection d'avec celles qui sont au-delà. C'est pourquoi l'on suppose ici qu'il s'agissait de *trouver seulement les traces* d'un plan parallèle à celui qni aurait lui-même pour traces ST et TV', sans construire effectivement aucun de ces deux plans. Cette restriction, dont le but est de répandre plus de clarté dans les dessins, a été aussi admise dans les épures 8, 9 et 16.

25. Les considérations employées dans les n^{os} **22** et **23** peuvent servir à résoudre la question suivante : *étant donnée la projection horizontale* AB *d'une droite que l'on sait être située dans le plan connu* PQR', *trouver l'autre projection?* Fig. 6.
La droite inconnue percera le plan vertical en un point qui doit être projeté horizontalement en E (n° **13**); d'ailleurs cette trace ne pouvant être hors de la trace verticale QR' du plan qui renferme cette droite, sera nécessairement sitoée en E', et c'est là un des points de la projection demandée. Ensnite, par des motifs semblables, on voit que la droite en question va percer le plan horizontal en D; donc, si l'on projette D en D' sur la ligne de terre XY, D'E' sera la projection verticale de la droite proposée. On sent bien qu'il serait aussi aisé de trouver la projection DE, en se donnant seulement la projection verticale D'E' avec le plan qui renferme la droite.

Si la projection AB assignée sur le plan horizontal se trouvait, comme dans la *fig.* 7, parallèle à la trace PQ du plan donné, on obtiendrait d'abord, comme Fig. 7.
ci-dessus, la trace verticale B' de la droite inconnue; mais ensnite la trace horizontale de cette droite n'existant plus, puisque AB ne rencontre pas PQ, il en faudrait conclure que la ligne demandée est parallèle au plan horizontal,

et qu'ainsi sa projection verticale est la droite B'A' parallèle à la ligne de terre XY.

On verra de même que si la projection horizontale donnée est la ligne AC parallèle à XY, la droite dans l'espace est parallèle au plan vertical, et que sa projection sur ce dernier plan est la ligne C'A' parallèle à la trace QR'.

26. Voici encore une question analogue : *connaissant la projection horizontale* A *d'un point que l'on sait être situé sur un plan donné* PQR', *trouver l'autre projection?* On mènera par le point donné A une droite quelconque DAE, que l'on regardera comme la projection horizontale d'une ligne située dans le plan PQR'; il sera facile de construire comme ci-dessus la projection verticale D'E' de cette droite, et alors il n'y aura plus qu'à ramener le point A en A' sur cette projection, au moyen d'une perpendiculaire à la ligne de terre (nº **10**). On trouverait aussi aisément la projection A, si l'on avait donné A'.

Fig. 6.

Parmi les diverses directions que l'on peut donner à cette droite auxiliaire DAE, la plus commode ordinairement est une parallèle à la trace horizontale PQ, comme la ligne AB dans la *fig.* 7.

27. *Trouver l'intersection de deux plans qui auraient pour traces, l'un* PQ *et* QR', *l'autre* ST *et* TV'.

Fig. 8. Si l'on prolonge les deux traces horizontales jusqu'à ce qu'elles se coupent en B, ce point, évidemment commun aux deux plans, apppartiendra à leur intersection; et puisqu'il est dans le plan horizontal, ce sera la trace horizontale de la droite cherchée. De même, le point A' où se couperont les traces verticales des plans donnés, sera la trace verticale de cette droite. Connaissant ainsi les deux traces de la commune section, on en déduira immédiatement (nº **14**) les projections qui seront AB et A'B'.

28. Si deux des traces se trouvaient parallèles, comme il arrive pour les plans R'Q*p* et V'TS, le point B s'éloignerait indéfiniment, et par suite l'intersection des deux plans deviendrait une *horizontale* ayant pour projections A'*b'* parallèle à la ligne de terre, et A*b* parallèle à TS : résultat qui était facile à prévoir, puisque les plans donnés passent par deux droites parallèles Q*p* et TS, et qu'ils ne peuvent dès lors se couper que suivant une droite parallèle à celles-là.

Fig. 9. **29.** Lorsque les traces seront respectivement parallèles sur les deux plans de projection à la fois, les plans donnés seront évidemment parallèles entre eux, et il n'y aura plus d'intersection ; à moins que ces traces ne soient en même temps parallèles à la ligne de terre, comme PQ et P'Q' pour l'un des plans, TS et T'S' pour l'autre : car deux plans ainsi placés peuvent encore se couper suivant

une droite parallèle à XY, mais la méthode précédente ne suffit plus pour obtenir cette intersection.

Dans ce cas, menons à volonté un plan sécant auxiliaire $\alpha\delta\gamma'$. Il coupera le plan [PQ, P'Q'] suivant la droite (CD, C'D'), qui se construit par la méthode générale, et le plan [TS, T'S'] suivant la droite (EF, E'F'); alors ces deux lignes fourniront, par leur rencontre, un point (M, M') qui sera évidemment commun aux deux plans [PQ, P'Q'], [TS, T'S'], et par conséquent ceux-ci auront pour intersection la droite (AMB, A'M'B') menée parallèlement à XY.

On pourrait encore employer ici un *plan de profil* mené perpendiculairement à XY; ce plan couperait les plans de projection primitifs suivant les deux droites XV et XZ, dont la dernière prendra évidemment la position XZ″, lorsque l'on rabattra le profil sur le plan horizontal, autour de VX comme charnière. Cela posé, le plan de profil rencontrait les traces verticales des plans proposés aux points P′ et T′ qui deviennent en rabattement P″ et T″; donc PP″ et TT″ sont les traces de ces plans sur le profil rabattu suivant Z″XV; et comme ces traces se coupent en A″, c'est là un point de l'intersection demandée, laquelle aura évidemment pour projection horizontale la droite AB parallèle à XY. D'ailleurs, si l'on relève le profil, le point A″ se projettera verticalement en A′; et A′B′ parallèle à XY sera la seconde projection de l'intersection des plans proposés. FIG. 9.

Si les traces de ces plans, sans être parallèles entre elles, passaient toutes quatre par le même point de la ligne de terre, il faudrait encore recourir à l'un des plans auxiliaires que nous venons d'employer; et nous engageons le lecteur à construire l'épure relative à ce cas particulier.

30. *Construire le point d'intersection d'une droite* (AB, A′B′) *avec un plan donné* PQR′. FIG. 10.

Pour y parvenir, il faut mener par la droite donnée, et dans une direction quelconque, un plan sécant; construire l'intersection de celui-ci avec le plan PQR′, et comme cette ligne passera nécessairement par le point cherché, ce point sera déterminé par la rencontre de cette intersection avec la droite donnée.

Adoptons d'abord pour plan sécant, le plan vertical qui projette la droite donnée suivant AB : cette dernière ligne sera elle-même la trace horizontale de ce plan, et sa trace verticale sera la droite CC′ perpendiculaire sur la ligne de terre. Cela posé, le plan ACC′ coupe le plan donné PQR′ suivant une droite qui est projetée (n° **27**) sur C′D′ et CD; et comme cette intersection rencontre la droite donnée (A′B′, AB) au point M′, c'est là la projection verticale du point

demandé. La seconde projection de ce point n'est pas fournie immédiatement, parce qu'ici les deux droites que nous combinons sont projetées l'une et l'autre suivant ADBC; mais on la déduira de M' en abaissant (n° **10**) la perpendiculaire M'M sur la ligne de terre. Ainsi le point (M, M') est celui où la droite (AB, A'B') perce le plan PQR'.

On peut aussi employer pour plan sécant, le plan projetant de la droite sur le plan vertical, lequel aura pour traces A'B' et B'F perpendiculaire à XY. Ce plan auxiliaire A'B'F coupera PQR' suivant la droite (FG, B'G'), qui, par sa rencontre avec AB, devra donner le même point M déjà obtenu par la première construction; ainsi les deux procédés employés simultanément se serviront de vérification.

Observons ici que le plan donné PQR' est une grandeur *principale* (n° **15**) qui existe réellement, et qui rend invisible la portion de la droite (AB, A'B') située au-dessous du point de section; c'est pourquoi la partie (MB, M'B') a été *ponctuée*. Quant au prolongement BC, il n'est regardé que comme une *ligne auxiliaire* relative au plan sécant qui sert de moyen de solution.

31. Quoique les deux procédés employés n° **30** soient les plus commodes, il sera bon, pour nous exercer à la combinaison des plans avec les droites, de résoudre encore le même problème en nous servant d'un plan sécant quelconque : toutefois, comme ce plan devra renfermer la droite donnée (AB, A'B')
Fig. 11. dont les traces sont B et C', il faudra faire passer par ces points les traces du plan sécant que nous adopterons. Menons donc par le point B la droite arbitraire SBT, et par les points T et C' la droite C'TV'; ce seront là les traces d'un plan auxiliaire qui contiendra la ligne (AB, A'B'). Cela posé, les plans STV' et PQR' se coupent (n° **27**) suivant la ligne (SV, S'V'); et comme celle-ci rencontre (AB, A'B') en (M, M'), ce point est celui où la droite donnée perce le plan PQR' : mais il faudra s'assurer, pour vérifier les constructions, que la droite MM' qui réunit ces deux projections, est exactement perpendiculaire (n° **10**) sur la ligne de terre.

32. *Par un point donné conduire une droite qui rencontre deux droites données de position.*

Nous indiquerons seulement la solution de ce problème, que nous proposons ici au lecteur comme un exercice propre à le familiariser avec les méthodes précédentes. Par le point donné et la première droite on conduira un premier plan, puis un second par le même point et la seconde droite; alors, en cherchant l'intersection de ces deux plans, on obtiendra une droite qui satisfera évidemment aux conditions énoncées.

On peut aussi n'employer que le premier des plans dont nous venons de parler, puis chercher (nº **30**) le point où il coupe la seconde droite; alors, en joignant ce dernier point avec le point donné, on obtiendra une droite qui résoudra le problème.

Il n'y aura en général qu'une solution, à moins que les deux droites proposées ne se trouvent dans un même plan avec le point donné.

33. Théorème. *Lorsqu'une droite* (AB, A′B′) *est perpendiculaire à un plan* PQR′, *les projections de cette ligne sont respectivement perpendiculaires sur les traces du plan.* Fig. 12.

En effet, le plan qui projette la droite suivant AB est, par sa définition, perpendiculaire au plan horizontal : il l'est aussi au plan donné PQR′, puisqu'il passe par une droite qui est supposée perpendiculaire à ce dernier; donc ce plan projetant est perpendiculaire à la fois sur les deux autres, et par suite à leur intersection qui est la trace horizontale PQ; par conséquent, cette trace sera elle-même perpendiculaire sur la projection AB, qui se trouve dans le plan projetant. On démontrerait, d'une manière toute semblable, que la trace verticale R′Q est perpendiculaire sur la projection A′B′.

Réciproquement, *si les* deux *projections* AB *et* A′B′ *d'une droite sont respectivement perpendiculaires aux traces* PQ *et* QR′ *d'un plan, ce plan et la droite sont perpendiculaires l'un sur l'autre.* En effet, le plan projetant qui a pour trace AB est évidemment perpendiculaire sur la droite PQ, et par suite au plan PQR′ qui contient cette ligne : de même, le plan projetant qui a pour trace A′B′ est perpendiculaire à la droite QR′, et par suite au plan PQR′. Donc ce dernier se trouve perpendiculaire à la fois sur les deux plans projetants; et dès lors il sera aussi perpendiculaire sur leur intersection qui n'est autre chose que la droite donnée dans l'espace.

34. Observons toutefois que ce théorème ne serait plus vrai, s'il s'agissait de projections *obliques* (nº **8**); et d'ailleurs il faut se garder de croire qu'une relation semblable existe entre deux droites qui sont perpendiculaires entre elles; car leurs projections orthogonales, sur un même plan, ne formeront pas un angle droit, à moins que l'une des lignes proposées ne se trouve *parallèle* au plan de projection.

35. *Trouver la plus courte distance d'un point* (A, A′) *à un plan donné* PQR′. Fig. 12.

On abaissera d'abord du point (A, A′) une perpendiculaire indéfinie sur le plan, en menant (nº **33**) les projections AB et A′B′ respectivement perpendiculaires sur les traces PQ et QR′; puis, on cherchera le point (M, M′) où cette droite rencontre le plan, ce qui s'exécutera comme au nº **30**, dont tous les rai-

sonnements s'appliquent à la figure actuelle où nous avons d'ailleurs conservé les mêmes notations. Alors AM et A'M' seront évidemment les projections de la plus courte distance demandée; et la grandeur absolue de cette distance s'obtiendra (n° **17**) en menant l'horizontale HM'M" égale à AM, et tirant la droite A'M" qui sera la vraie distance du point au plan.

FIG. 13. **36.** *Trouver la plus courte distance d'un point* (C, C') *à une droite donnée* (AB, A'B').

Menons d'abord *par le point* (C, C') *un plan perpendiculaire à la droite proposée;* ses traces seront perpendiculaires (n° **33**) aux projections AB et A'B'; et, pour déterminer un de leurs points, j'imaginerai dans ce plan *une horizontale* partant de (C, C'). Cette droite, qui sera nécessairement parallèle à la trace horizontale cherchée, aura pour projections CD perpendiculaire à AB, et C'D' parallèle à XY; ainsi, elle ira percer le plan vertical en (D, D') : si donc je mène D'Q perpendiculaire sur A'B', et QP perpendiculaire sur AB, ce seront les traces du plan cherché. Cela posé, en construisant (n° **30**) le point (M, M') où ce plan rencontre la droite (AB, A'B'), et en le joignant avec (C, C'), la ligne (CM, C'M') sera évidemment contenue dans le plan D'QP, et dès-lors elle se trouvera perpendiculaire sur (AB, A'B'); par conséquent cette droite (CM, C'M') mesurera la plus courte distance demandée, dont la grandeur absolue C'M" se déduira des projections CM et C'M' par la règle générale exposée n° **17**.

Dans cette épure, le plan D'QP n'est ni une donnée, ni un résultat du problème primitif; c'est seulement un moyen de parvenir à la solution cherchée, et par conséquent on devra marquer ses traces comme des lignes *auxiliaires* (n° **15**). La même remarque s'applique à la *fig.* 14, dont nous allons donner l'explication.

37. *Autre solution.* Faisons passer un plan par le point (C, C') et par la droite
FIG. 14. donnée (AB, A'B'); il suffira de joindre (C, C') avec (A, A'), et de chercher les traces verticales des deux droites (AB, A'B') et (AC, A'C') : alors B'D'Q et QA seront les traces du plan auxiliaire dont nous venons de parler. Cela posé, rabattons ce plan autour de sa trace horizontale AQ, et supposons qu'il entraîne avec lui la droite et le point donnés. Dans ce mouvement de révolution, le point (B, B') ne sortira pas du plan vertical BF perpendiculaire à la charnière AQ; d'ailleurs la distance B'Q de ce point au point fixe Q, restera invariable; par conséquent, si l'on décrit avec le rayon QB' un arc de cercle qui coupe BF en B", ce point sera le rabattement de (B, B'), et la droite proposée ainsi que la trace QB' se trouveront rabattues suivant AB" et QB". De même, en tirant

les perpendiculaires DD″ et CC″ sur la charnière AQ, on verra bien que la ligne (ACD, A′C′D′) se rabat suivant AD″, et que le point C se transporte en C″. Alors, dans le plan horizontal où toutes les données sont maintenant rabattues, sans que leurs positions respectives aient changé, nous pourrons abaisser sur AB″ la perpendiculaire C″M″, et ce sera la plus courte distance cherchée *dans sa véritable grandeur*. Ce résultat est ordinairement le seul qui intéresse; cependant, si l'on veut aussi fixer *la position* de la plus courte distance, il n'y a qu'à relever tout le système : le point M″ se ramènera en M par une perpendiculaire sur la charnière AQ, et la projection verticale M′ s'en déduira (n° **10**); de sorte qu'enfin la distance en question sera projetée sur CM et C′M′.

38. Ce mode de solution serait indispensable, si l'on avait voulu *trouver sur la droite* (AB, A′B′) *un point qui fût distant de* (C, C′) *d'une quantité donnée* δ. Car, après avoir rabattu comme ci-dessus la droite et le point donnés suivant AB″ et C″, on décrirait avec un rayon C″N″ $=\delta$ un arc de cercle qui couperait AB″ en N″, et ce serait là le point demandé en rabattement : puis, en relevant tout le système autour de la charnière AQ, le point N″ se ramènerait en N, et aurait pour ses deux projections N et N′. On sent bien qu'il y aura généralement une seconde solution, puisque l'arc décrit avec le rayon δ coupera ordinairement la droite AB″ en deux points N″ et *n*″.

39. *Trouver les angles que forme un plan donné* PQR′ *avec les deux plans de projection.* Fig. 15.

On sait que, pour mesurer l'inclinaison de deux plans, il suffit de les couper par un troisième plan qui soit perpendiculaire à leur intersection, et que les deux droites tracées par ce plan sécant, forment entre elles un angle qui exprime l'inclinaison cherchée. D'après cela, coupons le plan PQR′ et le plan horizontal par un plan qui soit perpendiculaire à la trace PQ. Ce plan sécant qui sera vertical, aura pour traces une ligne AD perpendiculaire à PQ, et la verticale DD′ : par conséquent il coupera le plan donné suivant une droite qui, dans l'espace, réunirait le point A avec D′, et serait l'hypoténuse d'un triangle rectangle ayant pour côtés AD et DD′. Si donc on fait tourner ce triangle autour de DD′ pour le rabattre sur le plan vertical, il deviendra D′A″D et l'angle de même nom mesurera l'inclinaison du plan PQR′ sur le plan horizontal.

Pour obtenir l'angle du plan PQR′ avec le plan vertical, on les coupera par un plan CDB′ perpendiculaire à la trace verticale QR′, et cela fournira un triangle rectangle ayant pour côtés CD et DB′; par conséquent ce triangle,

après avoir été rabattu autour de CD, deviendra DB″C dans lequel l'angle B″ exprimera l'inclinaison demandée (*).

40. *Par un point donné, mener un plan qui fasse un angle α avec le plan horizontal: et un angle ϐ avec le plan vertical.*

Fig. 15. Observons d'abord que, dans le problème précédent, les deux plans sécants D′DA et B′DC devaient se couper eux-mêmes suivant une droite perpendiculaire au plan PQR′, et qui mesurait la plus courte distance de ce plan au point D de la ligne de terre. D'ailleurs, comme cette perpendiculaire, rabattue tour à tour avec les deux triangles, se trouve évidemment représentée par les droites DF et D*f* menées à angle droit sur les hypoténuses, il s'ensuit que, quel que soit le plan PQR′, on doit avoir la relation DF = D*f*. Cela posé, si, sans connaître le plan PQR′ que nous supposerons avoir sur les plans fixes les inclinaisons α et ϐ, on construit à volonté sur la ligne de terre un triangle rectangle D′DA″ dans lequel l'angle A″ soit égal à α; puis, qu'avec la perpendiculaire DF on décrive un arc de cercle, et qu'on lui mène une tangente B″*f* C qui fasse l'angle B″ égal à ϐ; cette tangente (**) déterminera, par sa rencontre avec le prolongement de la verticale D′D, un point C de la trace du plan PQR′. Alors, en tirant la droite CQ tangente à l'arc de cercle décrit avec le rayon DA″, puis joignant les points Q et D′, on obtiendra les traces d'un plan CQD′ qui aura sur les plans fixes les inclinaisons α et ϐ; ensuite, pour résoudre le problème primitif, il restera à conduire par le point donné un plan parallèle à CQD′ (n° 23).

Fig. 16. **41.** *Construire l'angle compris entre deux plans donnés* PQR′ *et* PSR′.

Il faut, comme nous l'avons dit précédemment, couper ces deux plans par

---

(*) Dans certains arts, on définit souvent un plan par sa trace horizontale PQ et par son inclinaison α sur le plan horizontal. Avec ces données, il est toujours facile de trouver sa trace verticale au moyen du *plan de profil* AD perpendiculaire à PQ, et qui contient l'angle α; car, en rabattant AD suivant A″D et formant l'angle DA″D′ = α, le côté A″D′ prolongé ira couper la verticale DD′ au point D′ par lequel on doit mener la trace QD′R. Quelquefois même on évite d'employer le plan vertical de projection, et l'on rabat le profil autour de AD en formant l'angle DAδ = α, ce qui représente d'une manière suffisamment claire la position du plan proposé, et permet d'en déduire les conséquences dont on a besoin. Au fond, le plan du profil tient lieu du plan vertical de projection.

(**) Comme il est évident que l'angle CD*f* = B″ = ϐ, on pourra, au lieu de mener cette tangente, construire le triangle rectangle CD*f* sur la base DF; puis, rapporter son hypoténuse de D en C sur le prolongement de la verticale D′D.

un troisième qui soit perpendiculaire à leur intersection. Or cette droite, projetée (nº **27**) suivant PR et P′R′, est l'hypoténuse d'un triangle rectangle ayant pour côtés PR et RR′, et qui, rabattu sur le plan horizontal, deviendra PRR″. Si donc, par un point arbitraire A″ de cette hypoténuse, je lui mène une perpendiculaire A″B, et qu'ensuite je relève le triangle R″RP dans la situation verticale PR, il est évident qu'alors la ligne A″B se trouvera dans le plan sécant que je dois mener perpendiculairement à l'intersection par ce point A″; puis, comme A″B ira percer le plan horizontal en B, la droite CBD perpendiculaire à la projection PR, sera (nº **33**) la trace horizontale de ce plan sécant. Maintenant, on doit voir que ce dernier plan coupera les plans proposés suivant deux droites partant du point A″ relevé, et qui, aboutissant en C et D, formeront un triangle dont la base sera CD, et dont l'angle au sommet A″ sera celui que l'on cherche; ainsi, il ne s'agit plus que de construire ce triangle. Or sa *hauteur* est précisément A″B, puisque cette droite relevée se trouve dans le plan vertical RP qui est perpendiculaire sur la base CD; d'ailleurs, si l'on rabat ce triangle autour de CD comme charnière, le sommet A″ ne sortira pas du plan vertical PR perpendiculaire à cette charnière : donc, en portant sur PR la distance BA = BA″, on obtiendra CAD pour le triangle demandé, et l'angle de même nom mesurera l'inclinaison des plans PQR′ et PSR′.

On aurait pu rabattre sur le plan vertical, l'intersection des plans proposés; cette droite eût été représentée par R′P″, et en lui menant une perpendiculaire A′B′, dont le pied B′ devrait être rapporté en B, on en aurait fait le même usage que ci-dessus.

42. Lorsque les plans proposés ont leurs traces parallèles sur un seul des Fig. 17.
deux plans de projection, comme R′QP et R′ST, la construction précédente exige une légère modification qui rend même la solution plus simple; car on sait (nº **28**) qu'alors l'intersection est la droite horizontale (R′V′, RV) parallèle aux traces horizontales. Par conséquent, si l'on mène un plan vertical R′RC perpendiculaire à cette intersection, il coupera les plans proposés suivant deux droites qui formeront avec CD un triangle ayant pour sommet le point R′, et pour hauteur la verticale R′R: de sorte qu'en rabattant ce triangle sur le plan horizontal autour de sa base CD, le sommet R′ viendra en R″, et l'angle CR″D sera la mesure de l'inclinaison des plans proposés.

Enfin, si les traces étaient toutes parallèles à la ligne de terre, comme dans la *fig.* 9, on couperait les plans donnés par le *plan de profil* ZXV déjà employé nº **29**; et par le rabattement dont nous nous sommes servis dans ce numéro, on obtiendrait l'angle PA″T pour l'inclinaison des plans en question.

Fig. 18. **43.** *Trouver l'angle de deux droites données* (AB, A'B') *et* (BC, $b'c'$).

On entend par l'angle de deux droites, qui souvent ne se rencontrent pas, l'angle que comprendraient entre elles deux droites respectivement parallèles aux premières, et qui seraient menées par un même point de l'espace : commençons donc par examiner si les lignes proposées se coupent. Or, si elles ont un point commun, on voit bien qu'il devra être projeté horizontalement en B et verticalement en b' : mais, pour que ces points-là fussent les projections d'un même point de l'espace, il faudrait (n° **10**) que la droite Bb' se trouvât perpendiculaire à la ligne de terre, condition qui n'est pas remplie ici; par conséquent les droites proposées ne se coupent pas. Alors, nous allons mener une parallèle à la ligne (BC, $b'c'$) par un point quelconque de l'autre droite, et pour simplifier, nous choisirons le point qui est projeté en B et B'. Cette parallèle aura ainsi pour projection horizontale la droite BC déjà donnée, et pour projection verticale la ligne B'C' parallèle à $b'c'$; de sorte que le problème sera réduit à trouver l'angle formé par les deux droites (AB, A'B') et (BC, B'C'), que nous regarderons comme des données immédiates de la question.

En construisant les traces horizontales A et C de ces droites, la ligne AC sera la base d'un triangle ayant pour sommet le point (B, B') où se coupent les droites proposées, et dont l'angle au sommet sera celui que l'on cherche. Or la *hauteur* de ce triangle est évidemment l'hypoténuse d'un triangle rectangle qui aurait pour base la perpendiculaire BH abaissée sur AC, et pour hauteur la verticale qui projette le sommet en B, laquelle est égale à B'K; par conséquent, si l'on prend KH″ = BH, et que l'on tire B'H″, cette droite sera la hauteur du triangle primitif. Maintenant, si l'on rabat ce dernier sur le plan horizontal autour de sa base AC, le sommet ne sortira pas du plan vertical HB perpendiculaire à cette base; donc, en portant la hauteur B'H″ de H en B″, le triangle cherché se trouvera rabattu suivant AB″C, et l'angle de même nom sera celui que formaient dans l'espace les deux droites (AB, A'B') et (BC, B'C').

44. Lorsqu'une de ces droites, par exemple la seconde, sera parallèle au plan horizontal, le triangle dont nous nous sommes servis n'existera plus; mais la trace horizontale du plan des deux droites proposées, qui était AC dans le cas général, deviendra alors une parallèle à BC menée par le point A; de sorte qu'en rabattant, comme ci-dessus, ce plan autour de sa trace, on obtiendra encore l'angle demandé.

Nous ne parlerons pas du cas où les droites seraient toutes deux parallèles au plan horizontal, puisque alors l'angle qu'elles formeraient dans l'espace serait égal à celui que comprendraient leurs projections.

45. Si l'on proposait de *diviser en deux parties égales l'angle de deux droites* qui se coupent, on opérerait cette division après avoir rabattu cet angle sur le plan horizontal; puis, on relèverait l'angle AB″C et la droite bissectrice, en observant que le point où cette dernière ligne va couper la trace horizontale AC du plan des droites données, demeure immobile pendant ce mouvement de rotation. Nous conseillons au lecteur de s'exercer sur les opérations indiquées dans les nos **44** et **45**. Fig. 18.

46. *Trouver l'angle formé par une droite* (AB, A′B′) *avec un plan* PQR′. Fig. 19.

L'angle d'une droite avec un plan serait une quantité indéterminée, si l'on ne convenait pas d'entendre par-là l'*angle que forme la droite proposée avec sa projection orthogonale sur le plan;* et ce choix est fondé sur ce que ce dernier angle est évidemment *le plus petit* de tous ceux que fait la droite avec les diverses lignes tracées par son pied dans le plan en question. Il suit de là que, si l'on abaisse d'un point de cette droite une perpendiculaire sur le plan proposé, l'angle compris entre cette perpendiculaire et la droite primitive, se trouvera le *complément* de celui qu'on veut obtenir et suffira pour en déduire ce dernier.

Menons donc par le point (B, B′) choisi arbitrairement sur la droite donnée, une perpendiculaire (BC, B′C′) au plan PQR′; puis, construisons l'angle formé par les deux droites (AB, A′B′) et (BC, B′C′). En appliquant ici la méthode du n° **45**, on verra qu'il faut abaisser la perpendiculaire BH sur AC, prendre KH″ = BH, et porter l'hypoténuse B′H″ de H en B″; alors AB″C sera l'angle des deux droites. Ensuite, on en construira le complément, en traçant la droite B″D perpendiculaire sur CB″; et enfin AB″D sera l'angle formé par la droite (AB, A′B′) avec le plan PQR′.

47. La même méthode peut servir à trouver *l'angle d'une droite avec le plan horizontal* ou *avec le plan vertical;* seulement, les constructions précédentes éprouveront des simplifications que l'on apercevra aisément. D'ailleurs, on arrive à ces résultats d'une manière encore plus prompte, en observant que d'après la définition du n° **46**, ces angles sont précisément ceux que forme la droite avec ses deux projections; ainsi, en rabattant la droite sur un des plans fixes, comme au n° **17**, on verra que l'angle ABA″ est l'inclinaison de la droite (AB, A′B′) sur sa projection AB, ou sur le plan horizontal.

48. *Construire la position et la grandeur de la ligne qui mesure la plus courte distance entre deux droites non situées dans un même plan.*

On sait que, dans l'espace, deux droites peuvent ne pas se rencontrer, sans être parallèles; alors il y a lieu de chercher, parmi toutes les lignes qui réunis-

sent deux quelconques de leurs points, quelle est la plus courte; mais, afin de faire mieux saisir la série d'opérations à effectuer pour résoudre ce problème,
FIG. 20. nous allons d'abord les indiquer sur une figure en perspective, où AB et CD représenteront les deux droites proposées. Si, par un point quelconque B de la première, nous menons une droite BE parallèle à CD, et que nous imaginions le plan ABE, ce plan se trouvera lui-même parallèle à la ligne CD; ainsi, en abaissant d'un point de cette dernière une perpendiculaire DF sur le plan ABE, *la distance cherchée ne saurait être moindre que* DF. Mais pour faire voir qu'une droite égale à DF peut effectivement réunir deux points des lignes proposées, menons par le pied F de cette perpendiculaire une parallèle FG à CD; cette ligne FG rencontrera nécessairement AB en un certain point G, sans quoi AB serait parallèle à CD, ce qui est contraire à l'hypothèse admise. Or, si du point G nous élevons la perpendiculaire GH sur le plan ABE, elle se trouvera évidemment contenue dans le plan CDFG déjà perpendiculaire sur ABE, et par conséquent GH rencontrera CD. *Cette ligne* GH, égale et parallèle à DF, *mesurera donc la plus courte distance* des droites AB et CD; et l'on voit qu'elle se trouvera *perpendiculaire à toutes deux* en même temps, puisqu'elle l'est sur le plan ABE parallèle à ces droites.

Pour confirmer *à posteriori* la première de ces deux conséquences, il suffit d'observer qu'en joignant deux points quelconques m et n des lignes proposées, la droite mn sortira du plan CDFG, toutes les fois que le point n sera différent de G; dès lors mn sera une oblique par rapport au plan ABE, et conséquemment elle sera plus longue que la perpendiculaire mp qui égale GH. Quant au cas où le point n coïnciderait avec G, la droite mG serait oblique par rapport à CD, et par conséquent plus longue que la perpendiculaire GH, qui demeure ainsi la plus courte de toutes les lignes qui peuvent réunir deux points quelconques des droites proposées.

49. Réalisons maintenant les constructions que nous n'avons fait qu'indiquer ci-dessus, et l'on reconnaîtra (comme nous l'avons annoncé n° 3) la différence essentielle qui existe entre les procédés vagues de la Géométrie ordinaire et les méthodes précises par lesquelles la Géométrie descriptive obtient des résultats *complétement déterminés*, pour la solution des problèmes relatifs aux trois dimensions de l'espace.

FIG. 21. Soient donc (AB, A′B′), et (CD, C′D′) les deux droites données: on s'assure qu'elles ne se trouvent pas dans un même plan, en remarquant d'abord qu'elles ne sont point parallèles, et qu'ensuite les points où leurs projections verticales et horizontales se coupent, ne sont pas situés (n° 43) sur la même perpendi-

culaire à la ligne de terre. Cela posé, choisissons le point (B, B′) de la première droite pour mener une parallèle (BE, B′E′) à la seconde, et construisons les traces AEQ et QB′ du plan qui contiendrait les lignes (AB, A′B′) et (BE, B′E′); puis, abaissons d'un point (D, D′) de la deuxième droite, une perpendiculaire (DF, D′F′) sur le plan AQB′, et cherchons (n° **30**), au moyen du plan projetant DRR′, le point (F, F′) où cette perpendiculaire rencontre le plan AQB′. Maintenant il faudra mener par le pied (F, F′), et parallèlement à (CD, C′D′), une droite (FG, F′G′) qui devra nécessairement (n° **48**) couper (AB, A′B′); par conséquent les deux points G et G′ devront être sur une même perpendiculaire à la ligne de terre. Ensuite, du point (G, G′) nous mènerons parallèlement à (DF, D′F′) la ligne (GH, G′H′); et comme elle doit aussi rencontrer la droite (CD, C′D′), il faudra encore que H et H′ se correspondent sur une même perpendiculaire à la ligne de terre. Alors GH et G′H′ seront les projections de la plus courte distance demandée; puis, pour en obtenir la grandeur absolue, on prendra (n° **17**) sur l'horizontale menée par le point G′, une partie KG″ = GH, et l'on tirera la droite G″H′ qui sera enfin la vraie longueur de la distance en question.

50. On pourrait encore résoudre le même problème, en cherchant l'intersection de deux plans perpendiculaires à AQB′, et passant l'un par la droite (AB, A′B′), l'autre par la droite (CD, C′D′). D'ailleurs ces plans se détermineraient en abaissant une perpendiculaire sur AQB′ par un point de chacune des droites proposées; mais nous laisserons au lecteur le soin d'exécuter ces constructions.

51. Si les deux droites proposées étaient parallèles entre elles, leur distance serait partout la même, et pour l'obtenir, il suffirait de chercher *la plus courte distance de la première droite à un point de la deuxième*, par exemple, à la trace horizontale de celle-ci; or c'est là un problème dont nous avons donné la solution dans les n^os^ **36** et **37**.

Les diverses questions que nous venons de parcourir, renferment tous les éléments nécessaires pour résoudre les problèmes où il n'y aura à combiner que des droites avec des plans, et l'on en trouvera des applications utiles dans le chapitre suivant. Ici, nous ferons seulement observer qu'étant données les projections de tous les sommets d'un polyèdre, on saura déterminer la position et la longueur de chacune de ses arêtes, l'inclinaison de chaque face sur le plan horizontal ou l'angle de deux faces entre elles; on pourra aussi construire en rabattement, et dans ses vraies dimensions, le polygone qui forme une quelconque de ces faces, puis trouver la section que produirait dans le polyèdre un plan dont la position serait assignée. Réciproquement, si la situation du polyè-

dre est définie par d'autres conditions en nombre suffisant, on pourra en conclure ses deux projections : mais, comme les procédés varieront nécessairement avec le choix des données, nous ne citerons qu'un exemple qui suffira pour indiquer la marche à suivre dans d'autres cas.

Fig. 22. **52.** *Un parallélipipède rectangle repose, par sa base, sur un plan qui est incliné à l'horizon d'une quantité* ω, *et qui a pour trace horizontale* PQ; *une des arêtes de cette base est projetée horizontalement suivant* AB, *tandis que les deux autres arêtes contiguës avec celle-là, ont des longueurs données* l' *et* l'' : *on demande de construire les projections horizontale et verticale de ce corps.*

Par le sommet B, imaginons un plan de profil PRR′ perpendiculaire à la trace PQ : il coupera le plan donné suivant une droite qui formera avec PR l'angle ω; par conséquent, si l'on rabat ce profil autour de PR, et que l'on construise l'angle $RPR'' = \omega$, puis que l'on ramène le point R″ sur la verticale RR′, la droite R′Q sera (n° **39**) la trace verticale du plan donné où repose la base du parallélipipède. D'ailleurs, si nous rabattons ce dernier plan autour de PQ, le point projeté en B et qui est situé en B″ sur le profil, se transportera évidemment en b; de sorte que Ab sera le rabattement et la vraie longueur de l'arête projetée en AB sur le plan horizontal. Alors, en tirant la droite Ad égale à l' et perpendiculaire sur Ab, on obtiendra deux des côtés de la base rabattue; puis, en relevant cette face, on verra aisément que ces deux côtés sont projetés suivant AB et AD, et le parallélogramme ABCD sera la projection horizontale de la base du parallélipipède. Cela posé, l'arête perpendiculaire à cette base et qui part de l'angle B, est projetée horizontalement (n° **33**) sur la droite indéfinie BP perpendiculaire à PQ; tandis que sur le profil, cette arête est représentée dans sa véritable grandeur par la ligne B″F″ égale à l'' et menée à angle droit sur PR″; par conséquent, si l'on projette l'extrémité F″ en F, BF sera la projection horizontale de l'arête en question : puis, en formant le parallélogramme ABFE, et achevant les autres faces par le moyen de diverses parallèles, on obtiendra aisément la projection complète ABCDHEFG de tout le corps sur le plan horizontal.

Quant à l'autre projection, on observera que les côtés AD et CD se trouvent dans le plan PQR′, et qu'ainsi (n° **25**) leurs projections verticales sont A′K′ et M′N′ qui, par leur rencontre, déterminent le point D′, projection verticale de l'angle D (*). Si, de plus, on projette le sommet C en C′ sur M′N′, on pourra

(*) On pourrait aussi trouver les points D′, C′, B′, d'après leurs projections horizontales et leurs hauteurs au-dessus de la ligne de terre; car ces hauteurs seraient fournies par le profil, où les points en question sont projetés tous sur la droite PR″.

achever le parallélogramme A'D'C'B'; et après avoir mené par les quatre angles de cette base, des perpendiculaires à la trace QR', il suffira de projeter sur ces droites indéfinies les points E, F, G, H, en E', F', G', H', ce qui d'ailleurs devra fournir des droites respectivement parallèles aux côtés de la base inférieure A'B'C'D'.

Il restera enfin à discerner quelles sont les arêtes visibles sur chacun des plans de projection, en observant les règles établies nos **15** et **16**; et l'on devra se rappeler que le *point de vue* étant différent pour le plan vertical et pour le plan horizontal (n° **16**), une même arête, telle qu'ici (AD, A'D'), peut être visible sur un des plans et invisible sur l'autre.

CHAPITRE III.

Résolution de l'angle trièdre.

53. Dans un angle solide à trois faces SABC, le sommet offre trois *angles plans* et trois *angles dièdres :* les premiers sont les angles rectilignes formés par les arêtes entre elles, les autres sont les inclinaisons mutuelles des faces. De ces six angles, trois quelconques étant donnés, il s'agit de trouver les autres, ce qui offre six problèmes distincts; car, en désignant par A, B, C les angles dièdres qui ont respectivement pour arêtes SA, SB, SC, et par α, β, γ les angles plans ou *faces* qui sont opposés à ces angles dièdres, on peut donner : Fig. 23.

1°. Les trois faces ou angles plans.	α, β, γ
2°. Deux faces et l'angle dièdre compris.	α, β, C
3°. Deux faces et l'angle dièdre opposé à l'une d'elles. . .	α, β, B
4°. Deux angles dièdres et une des faces opposées.	A, B, β
5°. Deux angles dièdres et la face comprise.	A, B, γ
6°. Les trois angles dièdres.	A, B, C

Ce sont là évidemment les seules combinaisons vraiment distinctes; et même les trois derniers cas peuvent se ramener aux trois autres par le secours d'un angle trièdre *supplémentaire.*

54. D'un point quelconque S' pris *dans l'intérieur* de l'angle solide S, abaissons une perpendiculaire sur chacune de ses faces; et pour fixer les idées, re-

gardons le plan BSC comme horizontal, et l'arête SA comme située au-dessus de ce plan. Nous formerons ainsi un second angle trièdre S′, ayant pour arêtes la verticale S′A′, avec les deux droites S′B′, S′C′, respectivement perpendiculaires sur les faces ASC, ASB; et ce nouvel angle solide est dit *supplémentaire* du premier, parce que les faces et les angles dièdres de l'un sont les suppléments des angles dièdres et des faces de l'autre. Mais, avant de démontrer ces relations réciproques, observons qu'il n'est pas indifférent, pour former le nouvel angle solide, d'abaisser les perpendiculaires de tel ou tel point de l'espace; car trois droites ou trois plans qui se coupent en un même point S′, et qui sont prolongés de part et d'autre de ce point, déterminent toujours huit angles trièdres différents, parmi lesquels il n'y en a que deux (symétriques l'un de l'autre et opposés par le sommet) qui soient vraiment supplémentaires de l'angle donné SABC. Aussi, pour ne pas commettre d'erreur dans la manière de prolonger les perpendiculaires, nous avons recommandé de les abaisser sur les faces, à partir d'un point pris dans l'intérieur de l'angle solide proposé; ensuite on pourra transporter où l'on voudra dans l'espace, l'angle S′ ainsi formé.

55. Cela posé, en désignant par A′, B′, C′, les angles dièdres compris entre les faces qui se coupent suivant S′A′, S′B′, S′C′, et par α', $6'$, γ' les faces opposées à ces arêtes, on voit que le plan A′S′B′, perpendiculaire aux deux faces BSC, ASC, les coupera suivant deux droites A′E, B′E, qui seront elles-mêmes perpendiculaires sur SC; et par conséquent l'angle A′EB′ sera la mesure de l'angle dièdre C. Or le quadrilatère plan S′A′EB′ a deux de ses angles qui sont évidemment droits, savoir : A′ et B′; donc les deux autres sont supplémentaires, et l'on a

A′S′B′ + A′EB′ = 180°, ou bien. . . . . $\gamma' + C = 180°$;
on prouvera de même que. . . . . $6' + B = 180°$,
$\alpha' + A = 180°$,

en considérant les quadrilatères S′A′DC′ et S′C′FB′ formés par les sections que produisent les faces A′S′C′ et B′S′C′ dans l'angle solide S. Donc *les faces de l'angle solide* S′ sont bien les *suppléments des angles dièdres de* S.

56. Maintenant, considérons les angles dièdres de S′; les deux faces B′S′A′ et C′S′A′ coupent le plan BSC auquel chacune est perpendiculaire, suivant les droites A′E et A′D; donc l'angle rectiligne DA′E est la mesure de l'angle dièdre A′. Mais dans le quadrilatère SDA′E, les angles D et E sont évidemment droits, puisque la face A′S′B′ est perpendiculaire sur SC, et A′S′C′ sur SB; par

conséquent les deux autres angles de ce quadrilatère sont supplémentaires, et l'on a

DA'E + DSE = 180°, ou bien. . . . . $A' + \alpha = 180°$;
on prouvera de même que. . . . . $B' + \beta = 180°$,
$C' + \gamma = 180°$,

au moyen des quadrilatères SEB'F et SDC'F. Donc *les angles dièdres de* S' sont les *suppléments des faces de* S; et l'on peut dire que ce dernier angle solide est à son tour *supplémentaire de l'angle* S'.

57. Remarquons ici qu'en décrivant du point S comme centre, une sphère d'un rayon quelconque SA, elle serait coupée par les faces de l'angle solide S, suivant trois arcs de grands cercles AB, BC, CA, lesquels formeraient *un triangle sphérique*, dont les côtés mesureraient les angles plans α, β, γ, et dont les angles ne seraient autre chose que les inclinaisons A, B, C des faces de l'angle solide. Par conséquent, la construction de ce dernier, d'après la connaissance de trois de ses éléments, revient à la solution graphique des problèmes que traite par le calcul la trigonométrie sphérique. D'ailleurs, si l'on transportait au centre S l'angle solide S', ses faces couperaient la même sphère suivant un autre triangle qui serait le triangle *supplémentaire* ou *polaire* de ABC, et dont on fait usage aussi dans la trigonométrie sphérique (*).

58. Revenons maintenant aux six problèmes que nous avons énoncés n° 53, et observons que, quand on donne les trois angles dièdres A, B, C, on peut trouver tout de suite leurs suppléments, qui seront (n° 55) les faces α', β', γ' d'un autre angle solide S'; or si, par le premier cas du n° 53, on sait déduire de ces

(*) A la rigueur, pour avoir le triangle polaire de ABC dans la situation où on l'emploie ordinairement dans la trigonométrie, il faudrait adopter l'angle solide symétrique de S'A'B'C', lequel s'obtiendrait en prolongeant les trois arêtes au-delà du point S'; c'est-à-dire qu'il eût fallu, dès le commencement, élever par le sommet S trois perpendiculaires aux faces de cet angle solide, l'une sur BSC et située du même côté de cette face que l'arête SA; l'autre sur CSA et du même côté que l'arête SB; enfin, la troisième sur ASB et du même côté que SC. L'angle solide ainsi construit, aurait coupé la sphère précisément suivant le triangle polaire de ABC; mais la figure eût été peu intelligible sans le secours des triangles sphériques: c'est pourquoi nous avons préféré la construction du n° 54; d'autant plus qu'ici, où il ne s'agit que d'angles solides, ceux qui sont symétriques l'un de l'autre, se trouvent composés avec les mêmes éléments disposés seulement dans un autre ordre, et que les *relations supplémentaires* sont également vraies.

nouvelles données les angles dièdres A′, B′, C′ de cet angle S′, il n'y aura plus qu'à prendre les suppléments de ceux-ci pour obtenir (n° 56) les faces α, β, γ de l'angle solide primitif S. On voit par-là que le sixième cas se ramène au premier; et de même on réduira le cinquième au deuxième, et le quatrième au troisième. Nous allons donc nous occuper seulement de la résolution des trois premiers problèmes.

Fig. 24. 59. Premier cas. *Étant données les trois faces α, β, γ d'un angle solide, trouver les trois angles dièdres* A, B, C.

Soient A″SB, BSC, CSA′ les trois angles donnés, supposés rabattus sur le plan de la face BSC, que nous regarderons comme *le plan horizontal* de l'épure : il est clair que, pour recomposer l'angle solide, il suffirait de faire tourner les deux faces latérales A″SB, A′SC, autour des droites SB et SC comme charnières, jusqu'à ce que les deux lignes SA″ et SA′ vinssent coïncider l'une avec l'autre; et leur position commune dans l'espace serait celle de la troisième arête, dont nous désignerons la projection inconnue par SA. Pour la déterminer, prenons sur les droites rabattues SA′ et SA″ deux distances quelconques, mais égales, SD′ = SD″; alors les points D′ et D″ devront évidemment se réunir dans la formation de l'angle solide; puis, comme en tournant autour des droites SC, SB, ils ne sortiront pas des plans verticaux D′FD, D″ED, perpendiculaires à ces charnières, il s'ensuit que les points rabattus en D′ et D″ iront coïncider avec le point de l'espace qui est projeté horizontalement en D, et par conséquent la troisième arête de l'angle solide aura pour projection SDA.

D'ailleurs, le plan vertical FD perpendiculaire à SC, devra couper les deux faces qui passent par cette arête, suivant des droites FD, FD′ qui, étant relevées, comprendront entre elles un angle égal à l'inclinaison de ces faces, et qui formeront un triangle rectangle avec la verticale D; par conséquent, si l'on rabat ce triangle autour de FD, en élevant sur cette base une perpendiculaire indéfinie DG′ que l'on terminera par un rayon FG′ = FD′, on obtiendra ainsi l'angle rectiligne G′FD pour la mesure de l'angle dièdre C qu'il s'agissait de trouver.

De même, le plan vertical ED coupera les deux faces passant par SB, suivant des droites ED, ED″ qui, étant relevées, comprendront entre elles la mesure de l'angle dièdre B; et comme ces droites forment aussi avec la verticale D un triangle rectangle dont elles sont la base et l'hypoténuse, on pourra aisément construire le rabattement G″ED de ce triangle, et l'angle B sera mesuré par DEG″. On observera d'ailleurs que les deux verticales DG′ et DG″ de-

vront se trouver *égales*, puisque l'une et l'autre expriment la hauteur du point unique de l'arête SA, qui est projeté en D.

Pour obtenir le troisième angle dièdre A, on mènera un plan sécant perpendiculaire à SA par le point de cette arête qui est projeté en D, et rabattu en D' d'une part, et en D'' de l'autre. Ce plan coupera les faces latérales suivant des droites D'N, D''M, respectivement perpendiculaires à SA' et SA''; et conséquemment son intersection avec la face BSC sera la droite MN qui devra évidemment se trouver (n° 33) perpendiculaire sur la projection horizontale SA de la troisième arête. Si donc avec les trois lignes D''M, MN, ND', on construit le triangle PMN, l'angle au sommet P sera précisément la mesure de l'angle dièdre qui a pour arête SA.

Remarquons en outre que ce triangle, avant d'être rabattu autour de MN, avait son sommet P situé au point de l'arête SA qui est projeté en D. Mais puisque cette charnière MN est perpendiculaire, comme nous venons de le dire, au plan vertical SA, le point P n'aura pas dû sortir de ce plan; et par conséquent il faudra qu'il se trouve rabattu sur le prolongement de la droite SDA, ce qui est une vérification essentielle à observer.

60. Les constructions précédentes sont pareillement applicables au cas où les trois angles α, β, γ, ou bien quelques-uns d'entre eux, se trouvent obtus: seulement, pour que le problème soit possible, il faut toujours, 1° que les trois angles α, β, γ fassent une somme moindre que quatre droits; 2° qu'en outre le plus grand de ces angles soit moindre que la somme des deux autres. En effet, si ces conditions n'étaient pas remplies par les données de la question, il est facile de voir que les opérations graphiques fourniraient pour la construction des triangles FDG' et EDF'', des hypoténuses plus courtes que les bases: tandis que ces triangles seront possibles, si les deux conditions ci-dessus énoncées sont satisfaites, et par suite l'angle solide pourra être composé avec les données du problème.

61. *Réduire un angle à l'horizon.* Ce problème, qui est utile dans la levée des plans, a pour objet de trouver la projection horizontale d'un angle α qui est connu de grandeur, et dont les côtés font, avec la verticale abaissée du sommet, des angles donnés β et γ. Or, si l'on imagine un angle solide ayant pour ses trois arêtes, cette verticale et les deux côtés de l'angle proposé α, on connaîtra les faces α, β, γ de cet angle solide, et la projection demandée sera évidemment l'angle rectiligne qui mesure l'angle dièdre A compris entre les deux faces verticales; par conséquent ce problème rentre dans celui du numéro 59, et pourrait être résolu de la même manière, si la supposition qu'une des arêtes

est ici verticale, ne permettait de donner à la figure une disposition plus commode.

Fig. 25. Dans un plan quelconque, formons avec la verticale SA les angles ASB $= \gamma$, ASC $= 6$; puis, en laissant invariable la grandeur de ce dernier, faisons-le tourner autour de SA jusqu'à ce que le côté mobile SC forme, dans l'espace, un angle α avec le côté fixe SB : par-là nous obtiendrons l'angle donné, exactement dans la situation que lui assigne le problème, et ensuite il nous sera facile d'en déduire la projection horizontale. Or, dans ce mouvement de révolution autour de SA, le pied C du côté mobile décrira un arc de cercle CC' dont le centre sera en A ; et il s'arrêtera sur cet arc en un point C', tel que sa distance au point fixe B sera évidemment la base d'un triangle qui aura pour côtés des droites égales à SB et SC, tandis que l'angle compris égalera α. Si donc on construit sur le plan vertical un angle BSC'' $= \alpha$, et que l'on prenne SC'' $=$ SC, la droite BC'' sera la distance dont nous parlions; puis, en la rapportant par un arc de cercle de B en C', on connaîtra la position C' où doit s'arrêter le pied du côté mobile SC, et par suite cette droite se trouvera projetée horizontalement suivant AC'. D'ailleurs, le côté fixe SB étant projeté sur AB, on en conclura que l'angle α, dans l'espace, a pour projection horizontale BAC'; ainsi ce dernier angle, qui peut être plus grand ou plus petit que α, est celui qu'il faut employer sur une carte topographique où tous les objets doivent être représentés par leurs projections.

62. Deuxième cas. *Étant données deux faces α, 6 d'un angle solide, avec l'angle dièdre compris* C, *trouver les autres parties.*

Fig. 26. Soient BSC $= \alpha$, CSA' $= 6$ les deux faces données rabattues sur le plan horizontal; en faisant tourner la seconde autour de SC jusqu'à ce qu'elle forme avec BSC l'angle dièdre C, on obtiendra deux faces de l'angle solide dans leur véritable situation. Or, pendant ce mouvement de rotation, un point D' pris à volonté sur l'arête mobile, ne sortira pas du plan vertical D'FM perpendiculaire à la charnière; si donc, dans ce plan rabattu autour de FM, on construit l'angle MFK $=$ C, et que l'on prenne la distance FG' $=$ FD', il est évident que le point D' viendra se placer en G', et par suite qu'il sera projeté horizontalement en D, lorsque la face mobile ASC aura pris l'inclinaison assignée par la question. Maintenant, le point de l'espace qui a pour projections D et G', appartient à la troisième face inconnue, et si on la conçoit rabattue autour de SB, le point (D, G') ne sortira pas du plan vertical DED'' perpendiculaire à cette charnière; donc, comme ce point doit aussi rester à une distance du sommet égale à SD', si l'on décrit avec cette distance un arc de cercle,

il coupera la droite indéfinie DE au point D″ qui déterminera l'angle D″SB pour la troisième face inconnue. Alors les trois faces de l'angle solide étant trouvées, on rentrera dans le problème du n° 59, qui a enseigné à construire les angles dièdres.

On pouvait aussi employer la distance MG′ qui égale évidemment MD″, pour décrire un arc de cercle dont la rencontre avec le premier aurait déterminé le point D″.

63. Troisième cas. *Étant données deux faces α, 6 d'un angle solide avec l'angle dièdre* B *opposé à l'une d'elles, trouver les autres parties.*

Soient encore BSC = α, CSA′ = 6 les deux faces données rabattues sur le plan horizontal. Si, dans un plan vertical EF perpendiculaire sur l'arête SB, on construit l'angle REF = B, et que l'on imagine un plan indéfini passant par SE et ER, ce plan indiquera la position de la face inconnue; de sorte que, pour composer l'angle solide, il ne restera plus qu'à faire tourner la face A′SC autour de CS, jusqu'à ce que l'arête SA′ vienne se placer dans le plan SER. Pendant ce mouvement de rotation, le point D′ de l'arête mobile ne sortira pas du plan vertical D′FM, mené par le point F perpendiculairement à la charnière CS; et par conséquent ce point D′ s'arrêtera sur l'intersection du plan vertical FM avec le plan indéfini SER. Or cette intersection est une droite qui part de M, et vient rencontrer la verticale F au même point évidemment que la droite ER relevée; si donc, pour trouver cette hauteur, on tire la ligne FR perpendiculaire à EF, puis qu'on reporte FR à angle droit sur FM de F en R′, la ligne MR′ sera l'intersection dont nous avons parlé, et c'est sur cette droite que devra s'arrêter le point D′ de l'arête mobile SA′. Ainsi, en décrivant avec le rayon D′F un arc de cercle qui coupe MR′ en G, on obtiendra, dans le plan vertical FM, la position G d'un point de la troisième arête SA, et il serait facile d'en déduire la projection horizontale D. Fig. 27.

Maintenant observons que ce point G, situé dans le plan vertical MF, appartient à la face inconnue; et que quand on rabattra celle-ci autour de l'arête SB, il ne changera pas de distances par rapport aux points M et S situés sur la charnière. Or ces distances sont évidemment MG et SD′; si donc, avec ces droites pour rayons, on décrit deux arcs de cercle, leur rencontre D″ déterminera le rabattement du point G (*), et par suite la face inconnue

(*) On pouvait aussi trouver le rabattement D″, en combinant un de ces deux arcs avec la droite DD″ menée perpendiculairement à la charnière SB, par la projection horizontale D du point G.

sera D''SB. Une fois cette face trouvée, on retombera sur le cas du n° 59, et l'on saura construire les autres parties de l'angle solide.

64. Remarquons que l'arc de cercle décrit avec le rayon FD', coupera généralement la droite MR' en deux points G et g : de sorte que la face A'SC, en tournant autour de CS, pourra prendre deux positions dans chacune desquelles l'arête SA' se trouvera située dans le plan indéfini SER ou SMR'; pour l'une de ces positions, le point D' s'arrête en G, et pour l'autre il vient en g. Par conséquent, si l'on rabat ce dernier point autour de SB, comme on l'a fait pour le premier, il se transportera en d'', et d''SB sera alors la grandeur de la troisième face inconnue. Il y aura donc deux angles solides différents que l'on pourra composer avec les données α, β et B; résultat tout à fait analogue avec ce qui arrive dans la construction d'un triangle rectiligne où l'on connait deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux.

Il n'est pas besoin d'ajouter que si l'arc décrit avec le rayon FD' ne faisait que toucher la droite MR', il n'y aurait plus qu'une solution; et que le problème serait impossible, si cet arc ne rencontrait pas du tout la droite MR'.

Fig. 27. **65.** Cependant il importe d'observer que la deuxième solution devrait être rejetée, si le point g tombait sur MR' *au-dessous* de MF, c'est-à-dire au-dessous du plan horizontal (nous supposons ici qu'on aura soin de construire l'angle donné B, aigu ou obtus, toujours *au-dessus* du plan de projection). En effet, l'angle solide qu'on obtiendrait alors, se trouverait évidemment composé avec les faces α, β, et un angle dièdre supplémentaire de B : or, comme ce dernier est ici donné graphiquement, et non pas par la valeur de son *sinus*, il ne peut y avoir d'ambiguïté sur sa grandeur, et par conséquent il n'est pas permis d'adopter indifféremment B ou $180° - B$.

Par la même raison, il faudrait rejeter les deux solutions et déclarer le problème impossible avec les données actuelles, si les points G et g tombaient l'un et l'autre au-dessous de l'horizontale MF; ce qui au reste ne pourra arriver que quand l'angle dièdre B sera obtus.

Remarque. Quoique les trois derniers problèmes du n° 53 puissent être ramenés aux trois premiers par le moyen d'un angle solide supplémentaire, ainsi que nous l'avons montré au n° 58, il est intéressant et quelquefois utile d'en avoir une solution directe. Nous allons donc l'exposer, en prévenant toutefois les lecteurs qui commencent à étudier la Géométrie descriptive, que cette solution suppose la connaissance des plans tangents aux surfaces courbes; ainsi ils feront bien de différer la lecture de ce qui suit, jusqu'à ce qu'ils aient étudié au moins les chapitres II et III du Livre second.

66. Quatrième cas. *Étant donnés deux angles dièdres* A *et* B *d'un angle solide, avec une des faces opposées* 6, *trouver les autres parties.*

Adoptons pour plan horizontal celui de la face inconnue γ, et traçons-y le rabattement ASC″ de la face donnée 6; ensuite, perpendiculairement à l'arête SA, menons le plan vertical D″EF, sur lequel nous tracerons l'angle D'ED égal au dièdre A donné par la question. Alors, si nous faisons tourner la face ASC″ autour de AS jusqu'à ce qu'elle vienne se placer dans le plan SED', le point D″ se transportera en D' qui se projette horizontalement en D; et pour composer l'angle solide, il n'y aura plus qu'à conduire par l'arête (SD, ED') un plan qui forme avec le plan horizontal un angle égal au dièdre B. A cet effet, dans le plan vertical EF, tirons la droite D'F qui fasse l'angle D'FD = B; puis, après avoir fait tourner cette droite autour de la verticale D'D pour engendrer un cône de révolution dont la base sera le cercle DF, menons à ce cône un plan tangent qui passe par l'arête (SD, ED'). Ce plan aura pour trace la droite SGB tirée du point S tangentiellement au cercle du rayon DF, laquelle sera la troisième arête de l'angle solide en question, et déterminera la face ASB = γ. Quant à la troisième face α qui est rabattue ici suivant BSC‴, on verra aisément qu'elle se construit en prenant sur la perpendiculaire DG une longueur GD‴ égale à la génératrice D'F du cône auquel cette face est tangente. Pl. 8, Fig. 1.

67. Cinquième cas. *Étant donnés deux angles dièdres* A *et* B *d'un angle solide, avec la face comprise* γ, *trouver les autres parties.*

Après avoir tracé sur le plan horizontal un angle ASB = γ pour représenter la face connue, menons un plan vertical EF perpendiculaire à l'arête SA, et traçons-y l'angle F'EF égal au dièdre A; semblablement, dans un plan perpendiculaire à l'arête SB, construisons l'angle G'KG = B. Alors les plans SEF' et SKG' seront ceux des faces inconnues; et pour obtenir un second point D de la projection SDC de leur intersection, il suffira de les couper par un même plan horizontal quelconque. On prendra donc des hauteurs égales EH' = KL'; puis en menant des droites H'F', L'G', respectivement parallèles aux deux lignes de terre EF, KG, on obtiendra les deux sections horizontales F'D, G'D, qui par leur rencontre feront connaître le point cherché D. Enfin, pour rabattre les deux faces qui se coupent suivant SDC, on prendra les perpendiculaires MD″ = EF', ND‴ = KG', et ces deux faces auront évidemment pour vraies grandeurs ASC″ et BSC‴. Pl. 8, Fig. 2.

68. Sixième cas. *Étant donnés les trois angles dièdres* A, B, C, *d'un angle solide, trouver les trois faces.*

Sur le plan horizontal que nous supposons coïncider avec celui de la face inconnue γ, marquons la droite arbitraire DA pour représenter une des arêtes de cette face; et sur un plan vertical perpendiculaire à DA, traçons l'angle Y'AX égal au dièdre donné A : le plan Y'AD sera ainsi celui qui contient la face 6. Ensuite, d'un point T' choisi arbitrairement dans l'intérieur de l'angle Y'AX, abaissons sur les faces γ et 6 les perpendiculaires T'O, T'I', et traçons les angles T'FO = B, T'G'I' = C; Pl. 8, Fig. 3.

alors, si nous faisons tourner ces angles autour des axes T'O et T'I', ils produiront deux cônes de révolution auxquels la face inconnue α devra évidemment être tangente; de sorte que la question est réduite à mener un plan qui touche à la fois ces deux cônes, dont le sommet commun est en T' et dont les bases sont les cercles décrits avec les rayons OF et I'G'. La solution directe consisterait à chercher la trace *horizontale* du second cône I'T'G', et à mener une *tangente commune* à cette courbe et au cercle du rayon OF; mais on peut éviter le tracé approximatif d'une courbe par points, en recourant aux considérations suivantes.

Inscrivons une sphère au cône T'OF le long du cercle horizontal MFN: le centre ω' de cette sphère s'obtiendra en tirant la droite Fω' normale au cône dont il s'agit; et pour avoir une seconde sphère, égale à celle-là, et inscrite pareillement dans l'autre cône T'I'G', il faudra mener à angle droit sur T'G' la ligne T'H' $=\omega'$F, et achever le parallélogramme T'H'K'φ' qui fournira le centre φ' et le rayon φ'K' de cette nouvelle sphère. Cela posé, imaginons un cylindre qui soit circonscrit à ces deux sphères: il les touchera suivant deux grands cercles perpendiculaires à son axe qui est la droite $\varphi'\omega'$; or le plan qui touchait les deux cônes à la fois, se trouvait nécessairement tangent aux deux sphères; donc il est aussi tangent au cylindre actuel, et la question se réduit à mener par le point T' un plan qui soit *tangent à cette surface unique*.

La méthode directe serait donc de tracer, dans le plan ω'V' perpendiculaire à l'axe $\varphi'\omega'$, un cercle avec un rayon égal à ω'F; puis, de mener à ce cercle une tangente par le point où aboutirait sur ce plan la parallèle à l'axe menée par le point T'. Tout cela pourrait s'exécuter en rabattement sur le plan horizontal; mais il y a encore un moyen bien plus court. En effet, le plan cherché devant être tangent à la fois au cylindre, à la sphère ω' et au cône T'FO, son point de contact avec la sphère doit être situé, 1° sur le cercle horizontal MFN qui est la ligne de contact de la sphère et du cône; 2° sur le grand cercle contenu dans le plan ω'V', et qui est la ligne de contact de la sphère avec le cylindre. Or ces deux cercles se coupent évidemment suivant une corde qui est projetée verticalement au point M', et représentée en vraie position par MM'N sur le plan horizontal; donc M est le point de contact et BMS la trace horizontale du plan tangent demandé: sa trace verticale qui doit passer par le sommet T', sera dès lors BT'C'.

Maintenant que nous connaissons la grandeur ASB $=\gamma$ de la face horizontale et la projection SC de l'arête suivant laquelle se coupent les deux plans SAC', SBC', il n'y a plus qu'à rabattre ces deux derniers autour des charnières AS, BS, et l'on obtiendra aisément les deux faces ASC'' $=6$, BSC''' $=\alpha$. On observera que l'arête rabattue suivant SC''' devra être tangente au cercle décrit du point I'' avec un rayon égal à I'G'; car ce cercle est la base du second cône T'I'G' auquel le plan SBC', est aussi tangent.

LIVRE II.

DES SURFACES ET DE LEURS PLANS TANGENTS.

CHAPITRE PREMIER.

De la génération des surfaces, et de leur représentation graphique.

69. Pour représenter graphiquement une surface, nous avons annoncé (n° **7**) qu'il ne faudrait pas, comme pour les lignes, chercher à construire sur deux plans fixes les projections des différents points de ce lieu géométrique; en effet, attendu que sur une surface, et à partir d'un point donné, on peut cheminer dans une infinité de directions, le moyen précédent n'aurait d'autre résultat que de charger les plans fixes d'une multitude de points et de lignes dont on n'apercevrait pas la liaison, et dont l'ensemble surtout ne peindrait nullement, à l'œil du spectateur, la forme de la surface, sa courbure plus ou moins prononcée, et le nombre de ses nappes. Nous emploierons donc un autre procédé (n° **93**), déduit de la nature même de cette grandeur, dont il faut avant tout établir une définition précise.

70. Par le mot *surface* on ne doit pas entendre simplement une série de points ou de courbes aussi rapprochés qu'on voudra les uns des autres, mais n'ayant entre eux aucune dépendance fixe; il faut encore que ces points ou ces lignes soient soumis à quelque liaison commune et continue, dont l'expression analytique ne serait autre chose que l'équation de la surface, et dont la définition géométrique doit être énoncée ainsi :

Une surface est le lieu de toutes les positions que prend successivement, dans l'espace, une ligne mobile qui change de situation, et même de forme, d'après une loi déterminée et continue.

La ligne mobile se nomme la GÉNÉRATRICE; et par ces mots, *une loi déterminée*, il faut entendre des conditions telles que, pour chaque point donné de l'espace, elles ne laissent plus rien d'arbitraire dans la forme ni dans la position de la génératrice. Or, le moyen le plus commode ordinairement pour exprimer (du moins en partie) la loi de ce mouvement, c'est d'assigner une ou plusieurs

ligues fixes, nommées DIRECTRICES, sur lesquelles devra constamment s'appuyer la génératrice dans toutes ses positions : de sorte que pour définir complétement une surface particulière, il faut indiquer la nature de la génératrice, la manière dont elle se meut, et les directrices sur lesquelles elle doit glisser pendant son mouvement (*). Lorsqu'on change seulement ces directrices, on obtient diverses surfaces qui appartiennent toutes à *une même famille;* et d'ailleurs on doit sentir que chaque surface individuelle est susceptible d'une infinité de modes de génération. Nous allons en citer plusieurs exemples, tant pour éclaircir la définition générale, que pour acquérir dès à présent la connaissance des lieux géométriques dont nous devons faire usage le plus fréquemment.

FIG. 28. **71.** UNE SURFACE CONIQUE est le lieu de toutes les positions que prend *une droite mobile* SA, *assujettie à passer toujours par un point fixe* S, *et à s'appuyer constamment sur une courbe donnée* ABC, laquelle peut être *gauche* ou *à double courbure* (voyez n° **7**). D'après cette définition, la droite mobile SA est une génératrice constante de forme, et variable de position seulement, tandis que le point fixe et la courbe ABC sont les directrices; d'ailleurs, cette ligne SA devant être regardée comme indéfiniment prolongée de part et d'autre du point S qu'on nomme le *sommet* ou le *centre*, elle engendrera les deux *nappes* opposées

(*) C'est effectivement par la traduction en analyse de ce mode de génération, ou d'une propriété équivalente, que l'on obtient toujours l'équation de la surface. (Voyez l'*Analyse appliquée à la géométrie des trois dimensions*, chap. XIV.) Réciproquement, lorsqu'un lieu géométrique est défini immédiatement par l'équation $F(x, y, z) = 0$, si l'on coupe cette surface par divers plans, horizontaux par exemple, on obtient les courbes

$$
\begin{array}{l}
(1)\ z = \alpha, \text{ et } F(x, y, \alpha) = 0\ (2) \\
z = \alpha', \text{ et } F(x, y, \alpha') = 0 \\
z = \alpha'', \text{ et } F(x, y, \alpha'') = 0 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{array}
$$

dont une quelconque est ce que devient la première quand on attribue à la constante α les valeurs successives α', α''; par conséquent, ces diverses courbes sont les positions successives que prendrait la courbe (1) et (2) si on la faisait mouvoir dans des plans parallèles, en changeant d'ailleurs ses dimensions d'après une loi qui dépendrait de la manière dont la constante α entrera dans l'équation (2) : aussi, en éliminant ce paramètre entre (1) et (2), on retombe évidemment sur l'équation $F(x, y, z) = 0$, qui se trouve donc le lieu de toutes les positions de la première courbe mobile. Ajoutons d'ailleurs que, comme on peut adopter une infinité de directions pour les plans sécants parallèles, ou même employer d'autres surfaces sécantes, il doit exister pour chaque surface une infinité de modes de génération.

et indéfinies SABC, $S\alpha\mathcal{C}\gamma$. Si l'on substituait à la courbe ABC une autre directrice, en changeant même le sommet S, on obtiendrait diverses surfaces individuelles appartenant toutes à *la famille des cônes*.

72. Mais ces surfaces admettent bien d'autres modes de génération. En effet, si nous coupons le cône SABC par divers plans parallèles, nous obtiendrons des sections *semblables* A'B'C', A"B"C", c'est-à-dire des courbes où il existera des points O', O", tels que les rayons vecteurs respectivement parallèles, O'A' et O"A", O'B' et O"B", O'D' et O"D",..... auront entre eux un rapport constant : cette proposition, vraie quelle que soit la directrice ABC, se démontre aisément par la théorie des lignes proportionnelles. Pour fixer les idées, nous admettrons que ABC soit une ellipse ayant pour ses demi-axes $OA = a$, $OB = b$; alors les autres sections A'B'C', A"B"C", supposées parallèles à cette base, seront aussi des ellipses dont les axes se trouveront parallèles à ceux de ABC, et tels que

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''} = \ldots\ldots$$

Cela posé, si l'on fait mouvoir l'ellipse ABC de manière, 1° que son centre parcoure la droite SO; 2° que ses axes restent parallèles à leurs positions primitives; 3° qu'ils décroissent ensemble, et proportionnellement aux distances SO, SO', SO",....; alors, il est évident que cette ellipse mobile coïncidera successivement avec A'B'C', A"B"C",...., et deviendra ainsi, pour la surface conique proposée, une génératrice *variable de forme* et *de position*. Mais, pour réduire ces diverses conditions à un énoncé plus simple, il suffira de se rappeler qu'une courbe du second degré est déterminée, dans son plan, par la connaissance de cinq de ses points; par conséquent, si l'on trace sur le cône cinq arêtes fixes SA, SB, SC, SD, SE, on pourra dire que, pour engendrer la surface, il faut faire mouvoir l'ellipse variable ABC de manière que son plan demeure parallèle à lui-même, et qu'elle s'appuie constamment sur ces cinq droites regardées comme autant de directrices.

Enfin, puisqu'on serait libre d'adopter pour les plans sécants parallèles une direction quelconque, et que même on pourrait couper le cône par d'autres surfaces, telles que des sphères décrites du point O comme centre avec un rayon variable, il demeure évident qu'il existe une infinité de lignes planes ou à double courbure, que l'on peut adopter pour génératrices d'une même surface conique.

73. UNE SURFACE CYLINDRIQUE est le lieu des diverses positions que FIG. 29.

prend *une droite mobile* AA′ *qui glisse le long d'une courbe fixe* ABC, en demeurant *parallèle à une direction donnée.* Mais ce premier mode de description, où la génératrice AA′ est constante de forme, n'est pas le seul admissible; car, puisque toutes les sections parallèles au plan de ABC seraient ici des courbes évidemment identiques, on peut encore regarder la surface comme parcourue par *la courbe* ABC *qui se mouvrait parallèlement à elle-même* (*), *en s'appuyant toujours* par le même point *sur la droite* AA′, laquelle deviendrait alors une directrice de la courbe mobile ABC. En variant ensuite la direction des sections parallèles, on obtiendrait une infinité d'autres génératrices propres à décrire le même cylindre : au reste, ces surfaces peuvent être considérées comme un cas particulier des cônes; c'est celui où le sommet s'éloigne à l'infini.

74. Observons, en passant, que si la directrice du cône ou du cylindre était une droite, la surface se réduirait à *un plan*, lequel peut donc être défini comme le lieu des positions que prend une droite mobile assujettie, 1° à glisser sur une droite fixe; 2° à passer constamment par un point donné, ou bien à demeurer toujours parallèle à sa première position.

FIG. 30. **75.** UNE SURFACE DE RÉVOLUTION est engendrée par une courbe quelconque GG′G″ qui tourne autour d'une droite fixe DZ, de manière que chacun de ses points G décrit *un cercle* dont le plan est *perpendiculaire à l'axe* DZ, et dont le rayon est *la plus courte distance* GO de ce point au même axe. Observons que ces divers rayons GO, G′O′, G″O″, quoique tous perpendiculaires à DZ, ne seront point parallèles entre eux lorsque la génératrice GG′G″ sera à double courbure; ou lorsque, étant plane, son plan ne renfermera pas l'axe DZ. D'ailleurs, les différents cercles GMA, G′M′A′,..., décrits par ces rayons, se nomment *les parallèles* de la surface.

76. Si par l'axe DZ, on mène des plans quelconques ZOA, ZOM, on obtiendra des sections AA′A″, MM′M″, que l'on nomme les *méridiens* ou plutôt les *courbes méridiennes* de la surface, et qui sont nécessairement identiques quant à leur forme. En effet, ces plans méridiens coupent les *parallèles* suivant des rayons qui comprennent des angles évidemment égaux AOM, A′O′M, A″O″M″; par conséquent, si l'on fait tourner le plan ZOM d'une quantité angulaire MOA,

(*) Une courbe est dite se mouvoir *parallèlement à elle-même*, lorsque deux quelconques de ses cordes demeurent toujours parallèles à leurs directions primitives. Cette condition entraîne évidemment le parallélisme du plan de la courbe; mais cela exprime en outre que cette courbe *ne tourne pas* dans son plan mobile.

tous les rayons OM, O'M', O''M'', coïncideront en même temps avec OA, O'A', O''A'', et les courbes méridiennes se confondront l'une avec l'autre.

77. Il résulte aussi de là que la méridienne AA'A'', en tournant autour de DZ, parcourra toute la surface de révolution, et peut en être regardée comme une nouvelle génératrice qui remplacerait la courbe primitive GG'G''. Cette dernière, en effet, sera distincte du méridien, lorsqu'elle n'aura pas tous ses points situés dans un même plan passant par DZ, comme on peut le remarquer dans la figure actuelle qui est censée construite en perspective sur le plan ZOBB''A''A; c'est par suite de cette convention, que nous avons ponctué les parties des *parallèles* et de la courbe GG'G'' qui sont derrière ce *tableau*. Au reste, on pourra toujours construire le méridien d'après la connaissance d'une génératrice quelconque, puisqu'il suffira de chercher les points dans lesquels un plan tel que ZOB coupe les divers *parallèles* décrits par les points de GG'G''; et nous donnerons plus loin (n° **148**) un exemple de cette opération.

78. Les surfaces dont nous nous occupons ici, admettent un autre mode de génération qu'il importe de connaître. Puisque tout plan perpendiculaire à l'axe DZ, donne pour section un cercle dont le centre est sur cet axe (n° **75**), et qui a un point de commun avec la courbe GG' ou avec la méridienne BB', on peut donc regarder la surface de révolution comme *le lieu des diverses positions que prend un cercle mobile, toujours perpendiculaire à la droite* DZ, *et dont le centre parcourt cette droite, tandis que son rayon varie de manière que la circonférence s'appuie constamment sur la courbe fixe* GG'G'' : cette ligne devient alors une *directrice* à laquelle on peut substituer le méridien BB'B'', et le cercle mobile est *une génératrice* variable à la fois de forme et de position. Cette définition, que l'on traduit plus aisément en analyse (*), offre l'avantage que, sous ce point de vue, toutes les surfaces de révolution forment une même famille (n° **70**) qui admet *une génératrice d'une espèce constante;* c'est le cercle mobile toujours perpendiculaire à l'axe, et dirigé dans son mouvement par le méridien qui, seul, change d'une surface individuelle à une autre. FIG. 30.

79. Ainsi, suivant qu'on adoptera pour méridien une droite, une ellipse, une hyperbole ou une parabole, on obtiendra *un cône, un cylindre, un ellipsoïde, un hyperboloïde* ou *un paraboloïde* DE RÉVOLUTION, pourvu d'ailleurs que l'axe de rotation coïncide avec un des diamètres principaux de la courbe; car au-

(*) Voyez l'*Analyse appliquée à la géométrie des trois dimensions*, chap. XIV.

trement la surface, quoique toujours de révolution, serait d'une espèce plus compliquée. Un cercle, par exemple, qui tournerait autour d'une droite située dans son plan, mais ne passant pas par son centre, produirait *un tore* qui est un genre de surface annulaire que nous aurons occasion d'étudier bientôt (nº **138**).

80. Ces divers exemples, à l'exception du dernier, ne sont encore que des cas particuliers de surfaces plus générales qui, sans être de révolution, nous deviendront utiles dans la suite, et dont il importe de connaître la génération. Ce sont LES SURFACES DU SECOND DEGRÉ qui offrent *cinq genres* distincts, sans compter les cônes, les cylindres et les plans, qui en sont des variétés trop simples pour nous y arrêter de nouveau.

FIG. 34. **81.** ELLIPSOÏDE. Soit une ellipse ACDF construite sur les demi-axes $OA=a$, $OC=c$: en la supposant tracée dans un plan vertical que nous prendrons pour le *tableau* sur lequel la surface sera représentée en perspective, il en résultera que les lignes *ponctuées* indiqueront les portions de courbes situées derrière le plan de cette ellipse, et nous conserverons cette hypothèse dans tout ce chapitre. Si, dans un plan perpendiculaire à OC, nous construisons une autre ellipse A'B'D' qui ait pour ses demi-axes l'ordonnée $O'A'=a'$ de la première ellipse, et une droite $O'B'=b'$ de grandeur quelconque, mais perpendiculaire sur O'A'; puis, que nous fassions mouvoir la courbe A'B'D' de manière que ses axes, restant parallèles à eux-mêmes, conservent le rapport primitif $\frac{b'}{a'}$, et que l'un d'eux coïncide successivement avec les cordes D'A', D''A'', DA, ... de l'ellipse fixe CAF; alors le lieu géométrique ainsi engendré sera la surface que l'on nomme *ellipsoïde*. Lorsque le plan de l'ellipse mobile passera par le centre O, elle atteindra son maximum de grandeur, puisque le demi-axe variable a' deviendra l'ordonnée maximum $OA=a$; et si l'on représente par $OB=b$ la longueur que prendra au même instant le second axe b', les trois lignes

$$AD = 2a,\ BE = 2b,\ CF = 2c$$

seront ce qu'on appelle les *diamètres principaux* ou les *axes* de l'ellipsoïde. D'ailleurs on doit apercevoir que cette surface sera fermée de toutes parts, puisqu'au delà des points C et F, l'ellipse mobile aurait ses deux axes imaginaires (*).

(*) En exprimant par l'analyse ce mode de génération, on obtient pour l'équation de l'el-

82. Si l'ellipse génératrice A′B′D′ était un cercle, c'est-à-dire qu'on eût choisi O′B′ égal à O′A′, la surface deviendrait (n° **78**) un ellipsoïde de révolution qui aurait pour méridien la courbe directrice CAF; et deux des diamètres principaux de la surface, savoir OA et OB, seraient égaux entre eux. Enfin, dans le cas où les trois axes OA, OB, OC seraient tous de même longueur, l'ellipsoïde dégénérerait en une sphère.

83. HYPERBOLOÏDE *à une nappe*. Substituons à l'ellipse directrice une hyperbole A′A″A, dont le demi-axe réel soit $OA=a$, et le demi-axe imaginaire $OC=c$; puis, dans un plan perpendiculaire à OC, et sur deux axes dont un soit la corde A′D′ de l'hyperbole, construisons encore une ellipse A′B′D′: en la faisant mouvoir d'après la même loi que précédemment, elle engendrera *l'hyperboloïde à une nappe*, ainsi nommé parce que cette surface n'aura évidemment qu'une nappe unique, mais indéfinie comme l'hyperbole directrice. Lorsque le plan de l'ellipse mobile passera par le centre O, elle atteindra son *minimum*, puisque l'axe variable D′A′ sera devenu égal à DA, qui est la plus petite corde de l'hyperbole; c'est pourquoi la courbe ABDE est nommée *l'ellipse de gorge*, et les trois droites FIG. 35.

$$AD = 2a, \quad BE = 2b, \quad CF = 2c$$

sont *les trois axes* de l'hyperboloïde : mais le dernier CF ne rencontrant pas la surface, est dit *l'axe imaginaire*, quoique la quantité réelle $2c$ ne soit que le coefficient de l'expression imaginaire que fournirait l'analyse, en cherchant les points de la surface qui seraient situés sur la droite indéfinie OCO′ (*).

84. Lorsque les deux axes *réels* OA et OB sont égaux, l'hyperboloïde est de révolution (n° **78**), puisque alors l'ellipse génératrice A′B′D′ devient un cercle; aussi, dans ce cas particulier, la surface pourrait être engendrée par la révolution de l'hyperbole A′A″A *autour de son axe imaginaire* OCO′.

85. HYPERBOLOÏDE *à deux nappes*. Sur les demi-axes $OA=a$, $OC=c$, FIG. 36.

---

lipsoïde rapporté à ses axes,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Voyez l'*Analyse appliquée à la géométrie des trois dimensions*, chap. IX.

(*) L'équation de l'hyperboloïde à une nappe, rapporté à ses axes, est

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

construisons encore une hyperbole, mais placée de manière que OC soit l'axe réel; puis, faisons mouvoir comme précédemment l'ellipse A'B'D' : elle engendrera une autre espèce d'hyperboloïde qui aura deux nappes indéfinies, et séparées l'une de l'autre par un intervalle où il n'existera aucun point de la surface. En effet, entre les points C et F, la corde variable A'D', qui sert d'axe à l'ellipse mobile, deviendra imaginaire, et il en sera nécessairement de même du second axe O'B', qui doit conserver avec le premier un rapport constant : de sorte que la génératrice, se trouvant totalement imaginaire dans cet intervalle, ne fournira aucun point réel de la surface. Cependant, comme pour le point O, on sait que le demi-axe O'A' deviendra égal à OA. $\sqrt{-1}$, si l'on veut construire le coefficient réel de l'autre axe qui est pareillement imaginaire, il faudra porter sur une perpendiculaire au plan AOC, une longueur OB telle que

$$\frac{O'B'}{O'A'} = \frac{OB.\sqrt{-1}}{OA.\sqrt{-1}} = \frac{OB}{OA}:$$

alors les deux droites AD $= 2a$, BE $= 2b$, seront ce qu'on nomme *les axes imaginaires* de l'hyperboloïde à deux nappes, tandis que CF $= 2c$ sera *l'axe réel* (*).

86. Pour que cet hyperboloïde fût de révolution, il faudrait que les deux axes *imaginaires* OA et OB devinssent égaux, puisque cette hypothèse entraînerait la relation O'A' $=$ O'B', qui change l'ellipse génératrice en un cercle. Alors la surface pourrait être engendrée par la révolution des deux branches CA″A' et FA‴ de l'hyperbole primitive, *autour de son axe réel* COF.

Fig. 37. **87.** PARABOLOÏDE *elliptique*. Maintenant, adoptons pour directrice fixe une parabole D″OA″, en faisant mouvoir perpendiculairement à son axe OX une ellipse A'B'D', dont le premier axe O'A' $= a'$ soit l'ordonnée variable de cette parabole, et dont le second O'B' $= b'$ ait d'abord une grandeur arbitraire, mais conserve toujours avec le premier un rapport constant. Dans ce mouvement, l'ellipse mobile engendrera une surface composée d'une seule nappe indéfinie dans le sens OX, et qui se nomme *le paraboloïde elliptique*, parce que

(*) L'équation de l'hyperboïde à deux nappes, rapporté à ses axes, en prenant celui qui est réel pour l'axe des z, serait

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1.$$

toutes les sections planes qu'on y peut tracer, ne sont jamais que des *paraboles* ou des *ellipses* (*).

88. Lorsque les deux axes de l'ellipse génératrice sont égaux, la surface devient de révolution (n° **78**), et alors elle pourrait être engendrée par le mouvement de la parabole OA'A'', tournant autour de OX.

89. PARABOLOIDE *hyperbolique*. Enfin, tout en gardant pour directrice la parabole D''OA'', remplaçons l'ellipse génératrice qui nous avait servi jusqu'à présent, par une hyperbole D'H', A'G', construite dans un plan perpendiculaire à OX, et sur deux demi-axes O'A', O'B', dont le rapport restera constant, tandis que le premier, qui est l'axe réel de cette hyperbole, deviendra successivement égal aux diverses ordonnées O'A', O''A'',...., de la parabole fixe. L'hyperbole mobile, en se mouvant ainsi parallèlement à elle-même, décrira d'abord deux nappes ouvertes à droite et à gauche, séparées par le vide intérieur du cylindre D''OA'', et qui s'étendront indéfiniment, comme cette parabole, dans le sens O'X : mais, si nous faisons mouvoir l'hyperbole mobile de O' vers le point V, son axe réel O'A' diminuera, et deviendra nul en O; par conséquent les deux nappes dont nous venons de parler s'y réuniront, et en même temps l'hyperbole se réduira, pour cette position, à deux droites indéfinies KO*k*, LO*l*, qui seront tout entières sur la surface, et parallèles aux asymptotes de toutes les hyperboles précédentes. FIG. 38.

Au-dessus du point O, en O''' par exemple, l'hyperbole génératrice reparaîtra, mais dans une situation inverse H'''B'''G''', par rapport à ses asymptotes. En effet, les axes que nous avons représentés graphiquement par O'A' et O'B', devaient être à la rigueur exprimés par

$$a' = \mathrm{O'A'},\quad b' = \mathrm{O'B'}\sqrt{-1};$$

donc, puisqu'en O''' l'ordonnée de la parabole est imaginaire, et qu'ainsi le premier axe de l'hyperbole mobile devient $a''' = \mathrm{O'''A'''}.\sqrt{-1}$, il faut bien que le second axe, pour conserver avec l'autre un rapport constant, prenne la forme

$$b''' = a'''.\frac{b'}{a'} = \mathrm{O'''A'''}.\frac{\mathrm{O'B'}}{\mathrm{O'A'}}$$

(*) L'équation de ce paraboloïde, rapporté à son sommet et à l'axe unique OX comme axe des x, est

$$\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{p'} = x.$$

quantité réelle, représentée sur la figure par O‴B‴. Ceci montre qu'au-dessus de O, l'axe réel O‴B‴ de l'hyperbole génératrice se trouvera dirigé perpendiculairement au plan A′OD′, et les deux branches de cette courbe décriront encore deux nappes indéfinies, placées l'une en avant de ce plan, l'autre en arrière, mais qui, réunies avec les précédentes par les droites KO*k*, LO*l*, ne présenteront dans leur ensemble qu'une seule surface non interrompue, dont les courbures seront de sens opposés, à peu près comme cela arrive dans la gorge d'une poulie. On a donné à la surface qui nous occupe le nom de *paraboloïde hyperbolique*, parce que l'analyse apprend que toutes les sections planes que l'on peut y tracer, ne sont jamais que des *paraboles* ou des *hyperboles*, parmi lesquelles il faut comprendre les cas particuliers où cette section se trouve une droite isolée, ou bien deux droites qui se coupent (*).

90. Il importe d'observer ici que le paraboloïde hyperbolique ne saurait jamais être de révolution; car, d'après ce que nous venons de dire sur la nature des sections planes, aucune de ces courbes n'est jamais fermée, et par conséquent ne peut être circulaire.

91. La manière dont nous venons d'indiquer la formation du paraboloïde hyperbolique offre, à la vérité, une sorte de discontinuité graphique, puisque au-dessus du point O, la parabole qui servait de directrice devient imaginaire; mais comme l'analyse explique aisément cette difficulté, nous avons préféré conserver ce mode de génération, parce qu'il présente plus d'analogie avec les surfaces précédentes, justifie mieux les dénominations imposées aux deux paraboloïdes, et manifeste clairement l'existence des deux droites OL et OK situées sur le second. Néanmoins nous citerons encore un autre mode de génération, tout à fait continu, et commun à ces deux paraboloïdes.

FIG. 37. Sur le même axe OX, et dans des plans perpendiculaires, construisez deux

---

(*) Pour bien lire la figure 38, on devra se rappeler que nous la supposons tracée sur le plan vertical D″OA″ comme tableau de perspective; ainsi toutes les lignes *ponctuées* sont derrière ce plan. Après tout, comme il est assez difficile de donner une idee nette de la forme de ce paraboloïde par un dessin en perspective, on fera bien de consulter un modèle en relief qui peut se construire aisément au moyen de simples fils tendus en ligne droite suivant une certaine loi; voyez les nos 555, 566 et la *fig.* 120. Quant à l'équation du paraboloïde hyperbolique, rapporté au sommet O pour origine des coordonnées, et à l'axe OX comme axe des x, elle est

$$\frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{p'} = x.$$

paraboles A″OD″ et B″OE″ qui aient le même sommet, des paramètres quelconques, et leurs concavités tournées dans le même sens; puis faites glisser l'une des deux parallèlement à elle-même (n° **73**), sans altérer sa forme, mais de manière que son sommet reste constamment sur l'autre parabole fixe : vous obtiendrez ainsi *le paraboloïde elliptique.*

Prenez deux paraboles A″OD″, B″OE″ construites comme ci-dessus, mais Fig. 38. ayant leurs concavités tournées en sens contraire; puis faites encore glisser, parallèlement à elle-même, la courbe A″OD″ constante de forme, et de manière que son sommet parcoure l'autre parabole fixe : vous produirez ainsi *le paraboloïde hyperbolique* (*).

92. Pour compléter la connaissance des lieux géométriques employés le plus fréquemment, il nous resterait à parler des SURFACES DÉVELOPPABLES et des SURFACES GAUCHES; mais, outre que les propriétés caractéristiques de ces deux classes de surfaces ne peuvent être bien nettement comprises qu'après avoir vu les plans tangents, il nous semble qu'il vaut mieux laisser au lecteur le temps de se familiariser avec les exemples cités jusqu'ici, par des applications nombreuses et des constructions variées; et plus tard nous nous occuperons spécialement de ces deux classes de surfaces qui sont très-importantes.

93. Revenons maintenant à la question indiquée n° **69**, et qui avait pour but de trouver un mode de *représenter graphiquement une surface.* Or, puisque d'après la définition générale donnée au n° **70**, une telle grandeur est toujours produite par le mouvement d'une certaine ligne, il suffira, pour atteindre le but proposé, de *marquer sur les plans de projection diverses positions de la* GÉNÉRATRICE, *assez nombreuses et assez rapprochées pour que ce système de courbes puisse peindre aux yeux la continuité de la surface, sa courbure, ainsi que l'étendue de ses nappes.* D'ailleurs, parmi les génératrices de différente espèce qu'admet toujours une même surface, on devra préférer celle qui par sa simplicité ou sa régularité, est la plus propre à faire image; et quelquefois, pour mieux atteindre ce but, on tracera en même temps deux systèmes de génératrices, tels que seraient les méridiens et les parallèles dans les surfaces de révolution. C'est effectivement par des moyens semblables que nous avons déjà figuré, sur nos dessins en perspective, les diverses surfaces dont nous avons parlé dans ce chapitre.

94. En outre, il est aussi très-utile de marquer *les traces* de la surface, c'est-à-dire ses intersections avec les plans de projection; ainsi que *les contours*

(*) Voyez *Analyse appliquée à la géométrie des trois dimensions*, chap. VIII.

eu dedans ou au dehors desquels se trouveraient projetés tous les points de cette surface, lorsque du moins il existe de pareilles limites; car ces contours sont des espèces de profils qui accusent d'une manière souvent très-sensible les formes des objets : mais, pour apprendre à déterminer exactement ces contours, il faut que nous ayons parlé des plans tangents. Observons toutefois que, quand la forme de la surface nous sera bien connue d'avance, nous pourrons nous borner, pour simplifier nos dessins, à employer seulement quelques-uns des moyens de description dont nous venons de donner le détail.

CHAPITRE II.

Des plans tangents en général.

95. Un plan est dit *tangent* à une surface dans un point donné, *lorsqu'il contient les tangentes à toutes les courbes que l'on tracerait sur cette surface par le point en question;* mais il est nécessaire de démontrer qu'il existe en général, à chaque point d'une surface, un plan qui jouit de cette propriété, car on ne voit pas *à priori* pourquoi ces diverses tangentes ne formeraient pas un cône, ainsi que cela arrive effectivement dans certains points *singuliers*. Nous allons donc prouver que *trois courbes quelconques, tracées sur une surface à partir d'un point donné, ont toujours leurs trois tangentes situées dans un seul et même plan.*

FIG. 31. Soit GMg la forme et la position de la génératrice (n° **70**) lorsqu'elle passe par le point donné M; soit DMd une courbe tracée sur la surface, et sur laquelle devra glisser constamment la génératrice, lorsque dans son mouvement elle décrira ce lieu géométrique : soit enfin MX une troisième courbe *quelconque* située aussi sur la surface. Si nous transportons la génératrice dans une autre position G'M'g', elle ne manquera pas de rencontrer la courbe MX en un certain point P', pourvu que le point M' soit pris assez voisin de M sur la directrice DMd. Alors, en joignant les points M, M', P' par des droites indéfinies, ces trois lignes seront des sécantes par rapport aux courbes MD, MX, G'g', et elles seront évidemment toutes trois dans un même plan. Maintenant, faisons mouvoir la génératrice G'g' sur MD, en la rapprochant de sa situation primitive Gg, mais en observant toujours la loi qui règle la variation de forme et de position de cette courbe dans la surface que l'on considère; puis, imaginons que

le plan des trois sécantes tourne autour du point M, de manière qu'il passe, en même temps que la génératrice, par les points M'' et P'', M''' et P''',...., où elle coupera successivement les courbes MD et MX; par-là *ce plan mobile renfermera constamment les trois sécantes variables*. Or, quand la génératrice sera revenue a la position GMg, le point M' mobile sur MD, sera confondu avec M : mais au même instant le point P' de la courbe MX aura dû évidemment se réunir avec le point M; et par une suite nécessaire, sur la courbe variable G'g' les points P' et M' seront aussi confondus. Donc alors les trois sécantes mobiles seront devenues respectivement tangentes aux courbes MD, MX, MG; et si l'on se rappelle que ces trois sécantes étaient, pour chaque position de la génératrice, toujours situées dans un même plan, on en conclura que, quand elles sont devenues les tangentes MT, MT', MT'', elles se trouvent encore dans un plan unique, qui n'est autre chose que la limite des positions qu'avait prises successivement le plan mobile des trois sécantes (*).

(*) Je ferai observer que ce théorème (démontré ainsi dès 1817, dans mes leçons à l'École polytechnique) me paraît indispensable à établir, pour pouvoir, dans la suite, emprunter à la méthode infinitésimale les considérations abrégées et si utiles auxquelles nous aurons nous-mêmes recours bientôt (n° 188) En effet, ce n'est qu'après avoir prouvé rigoureusement que toutes les tangentes, en un même point d'une surface, se trouvent dans un plan unique, qu'il est permis de regarder la surface comme composée d'*éléments superficiels* qui soient *plans*, parce qu'alors ils sont formés par les éléments *linéaires* communs aux courbes de la surface et à leurs tangentes. Quant à la démonstration précédente, on a objecté qu'ici la droite M'P' est bien, par rapport à la courbe G'g', une sécante dont les points de section vont se réunir; mais que, dans l'intervalle, la ligne G'g' ne restera pas constante de forme, et qu'ordinairement cette condition est admise, quand on définit la tangente comme la limite d'une sécante. A cela il suffit de répondre que si, dans la géométrie plane, on admet cette permanence de forme, ce n'est que tacitement et parce qu'on ne s'y occupe guère que de courbes invariablement données; mais si, sans sortir d'un plan, on traçait un cercle qui coupât une droite, puis qu'on fit décroître le rayon jusqu'à ce que les deux points de section vinssent à se réunir, il n'y aurait pas de doute qu'alors ce cercle *variable* ne fût devenu tangent à la droite. Ainsi la permanence de forme n'est pas du tout nécessaire; et vouloir l'exiger, ce serait restreindre gratuitement le caractère général de la tangente à une courbe. Il faut donc définir celle-ci comme la limite des positions que prend une sécante dont deux points de section se sont rapprochés indéfiniment, pourvu que ces points soient situés sur la même branche de la courbe, et que cette dernière n'ait varié de forme et de position que d'après *une loi continue;* or c'est bien là ce qui arrive ici pour la courbe G'g', puisque la surface est elle-même supposée continue.

Ajoutons enfin qu'il faudra de même regarder comme tangentes l'une à l'autre deux courbes quelconques qui, après avoir été sécantes, se seront modifiées de position ou de forme, d'après

D'ailleurs, comme la courbe MX avait, dans ce qui précède, une position arbitraire sur la surface, il s'ensuit que le plan mené par les tangentes des deux lignes MG et MD, renfermera la tangente de toute autre courbe qui passerait en M; ainsi ce plan TMT' se trouvera bien *tangent à la surface*, d'après la définition que nous avons donnée au commencement de cet article.

96. Lorsqu'une surface présente deux ou plusieurs nappes qui se coupent, comme il arriverait dans un cône dont la base serait une courbe à nœud, les points de l'intersection de ces deux nappes semblent d'abord offrir une exception à la propriété dont jouit le plan tangent en général; mais on reconnaîtra que cette circonstance rentre dans les cas ordinaires, si l'on observe que toutes les tangentes en un même point de l'intersection, doivent être distribuées sur les deux nappes, comme elles le seraient sur deux surfaces indépendantes qui viendraient se couper en cet endroit, et dont chacune aurait son plan tangent distinct du plan tangent de l'autre.

97. Cependant il se rencontre quelquefois de véritables exceptions à la propriété du plan tangent; mais cela ne peut arriver que dans des *points singuliers* de la surface, pour lesquels la génératrice ou la directrice, venant à se réduire à un point unique, *n'admettent plus de tangente*. Par exemple, au sommet d'un cône, les diverses arêtes qui s'y coupent sont des lignes droites situées sur la surface, et qui sont elles-mêmes leurs propres tangentes; cependant ces droites se trouvent deux à deux dans des plans évidemment distincts. Le sommet d'un cône est donc un point singulier de cette surface pour lequel *il n'existe pas de plan tangent*. Mais si l'on remarque que la génératrice parallèle à la base du cône (n° **72**) se resserre de plus en plus en s'approchant du sommet, et finit, en y arrivant, par se réduire à un point lequel n'admet plus, à proprement parler, de tangente, on sentira comment la démonstration générale du n° **95** cesse d'être applicable à ce cas particulier. La même cause d'exception se rencontrerait si l'on partait de la définition donnée n° **71** pour les surfaces coniques, parce qu'alors une des directrices de la droite mobile serait le point unique, nommé *sommet* du cône, et qu'une telle directrice n'est plus susceptible d'avoir une tangente.

Une circonstance analogue se présente dans les surfaces de révolution, dont

---

une loi continue, jusqu'à faire coïncider ensemble deux de leurs points de section; car il est évident que ces deux courbes auront acquis une *tangente commune*, qui sera la limite des positions de la droite mobile passant par les deux points communs aux courbes sécantes.

la méridienne coupe l'axe sous un angle *obtus* ou *aigu* et même nul : au point d'une telle surface qui est situé sur l'axe de révolution, *il n'y a plus de plan tangent*, et les tangentes aux diverses positions du méridien forment, au contraire, un cône droit. C'est ce qu'on reconnaitra en faisant tourner un cercle autour d'une de ses cordes.

98. Il est très-important d'observer que la définition du plan tangent donnée n° **95**, n'exige pas du tout que ce plan n'ait qu'un seul point de commun avec la surface. Cela arrive, il est vrai, dans les surfaces entièrement *convexes*; mais, dans d'autres cas, le plan tangent peut rencontrer la surface en divers points, et même *la couper* suivant une courbe qui passe par le point de contact, comme nous en verrons des exemples dans le *tore* (n° **138**), et dans les surfaces gauches. Cette circonstance n'empêchera pas que ce plan ne renferme les tangentes à toutes les courbes tracées sur la surface par le point en question, et par conséquent il *touchera* réellement la surface en cet endroit; tandis que dans les autres points qu'il aura de communs avec elle, il sera généralement *sécant*.

99. Il existe néanmoins certains genres de surfaces où le plan qui est tangent dans un point, se trouve nécessairement *tangent tout le long d'une droite*. Considérons en effet le cylindre ABC à base quelconque; si, par la généra- Fig. 32.
trice AB et la tangente BT à la base, on mène un plan, je dis que non-seulement ce plan contiendra les tangentes aux diverses courbes que l'on voudra tracer sur la surface par le point B (ce qui résulterait déjà du théorème démontré n° **95**), mais qu'il renfermera aussi les tangentes à toutes les autres courbes que l'on tracerait sur le cylindre, par les divers points de la génératrice AB; et pour justifier cette assertion, il suffira de faire voir que le plan ABT renferme la tangente MV à la courbe quelconque MX. Or, si par AB et un point D voisin de B, je mène le plan ABR, il coupera évidemment le cylindre suivant une droite DE parallèle à AB, et la courbe MX en un point G situé sur DE; de sorte que ce plan contiendra les deux sécantes BDR et MGS. Maintenant, faisons-le tourner autour de AB de manière que le point D se rapproche de B. les points de section D et G vont changer sur les courbes, mais ils se trouveront toujours ensemble sur une droite mobile, *constamment parallèle à* AB; donc, quand l'un de ces points D sera confondu avec B, au même instant l'autre point G coïncidera avec M; c'est-à-dire que, quand le plan mobile aura pris la position ABT, la sécante variable MGS, toujours située dans ce plan, sera devenue la tangente MV. Ainsi cette dernière droite est renfermée dans le plan ABT.

Concluons de là que, *lorsqu'un plan touche un cylindre en un point quelconque, il est nécessairement tangent tout le long de la génératrice rectiligne qui passe par le point de contact.*

100. Dans les surfaces coniques, le plan tangent jouit aussi de cette propriété, et elle se démontrera d'une manière analogue, en observant qu'alors les points de section D et G sont situés constamment sur une même droite variable, mais qui rencontre toujours AB au sommet du cône. Enfin, nous verrons plus loin que cette même propriété subsiste également dans une classe de surfaces nommées *développables*, et dont les cylindres et les cônes ne sont que des genres particuliers.

101. Toutefois ce serait une erreur de croire que ce contact du plan tangent, tout le long d'une droite, tient à ce que les surfaces dont nous venons de parler admettent des génératrices rectilignes; car nous rencontrerons bientôt des surfaces engendrées aussi par une droite, et nommées *gauches*, dans lesquelles le plan tangent ne satisfait aux conditions du véritable contact que *pour un seul point*, quoiqu'il contienne tout une droite de la surface (*voyez* nos **142** et **154**).

102. Le théorème démontré n° **99**, offre une conséquence importante que nous aurons souvent besoin d'invoquer par la suite; c'est que, *quand on projette sur un plan une courbe* MX *et sa tangente* MV, *les projections de ces deux lignes sont elles-mêmes tangentes l'une à l'autre.* En effet, pour projeter la courbe MX, il faudra (n° **4**) imaginer un cylindre MBCX passant par cette ligne et perpendiculaire au plan donné, qu'il coupera suivant une courbe BC qui sera la projection de MX. Ensuite, pour projeter la droite MV, il faudra mener le plan VMB, lequel étant évidemment *tangent* au cylindre en M, devra l'être aussi (n° **99**) en B; et par conséquent il renfermera la tangente BT de la base BC. Donc cette tangente se trouvera l'intersection du plan projetant avec le plan de cette base, et elle sera ainsi la projection de MV.

FIG. 32.

La même conséquence subsisterait encore, si l'on projetait la courbe et sa tangente par des droites obliques au plan donné, mais toujours parallèles entre elles.

103. En résumant ce qui a été dit sur les plans tangents, on doit en conclure que, pour construire le plan qui touche une surface quelconque dans un point donné, il suffira dorénavant de chercher *les tangentes à deux courbes* tracées sur la surface par le point dont il s'agit, en préférant dans chaque exemple celles qui offriront plus de facilité; puis, de faire passer un plan par ces deux tangentes, ce qu'on exécutera comme au n° **22**. Nous donnerons bientôt divers exemples de ces constructions.

Lorsque, par le point donné, il passera *une droite située* tout entière *sur la surface*, cette droite sera elle-même sa propre tangente; dès-lors elle devra se trouver contenue dans le plan tangent, et pourra être employée à construire ce plan; mais il ne faudra pas en conclure toujours que ce plan *touche* la surface tout le long de cette droite (n° **101**).

104. *La normale* à une surface est la droite perpendiculaire au plan tangent, et menée par le point de contact de ce plan. Cette normale se construira donc aisément (n° **55**), quand on aura déterminé les traces du plan qui touche la surface au point en question.

105. C'est ici le lieu d'exposer une règle générale propre à déterminer *le contour apparent* d'un corps, c'est-à-dire la ligne qui, sur la surface de ce corps, sépare les parties visibles pour l'observateur d'avec celles qu'il ne peut apercevoir. Soit donc O la position qu'occupe l'œil du spectateur : imaginons tous les plans qu'il est possible de mener par ce point tangentiellement à la surface proposée; ils toucheront celle-ci suivant des points A, B, C,.... qui formeront une courbe à laquelle aboutiront tous les rayons visuels OA, OB, OC,.... tangents à la surface; ainsi cette ligne ABCD sera la limite de la portion que peut apercevoir l'observateur placé en O. Mais ce contour apparent changerait de forme et de position si le point de vue se déplaçait : que celui-ci soit transporté en O', par exemple, et le contour apparent deviendra A'B'C'D'. Il faudrait donc assigner, dans chaque cas, la position du point de vue; puis déterminer en conséquence le contour apparent, ce qui donnerait lieu à des opérations graphiques que nous apprendrons, il est vrai, à exécuter dans la perspective, mais qui compliqueraient inutilement ici nos dessins. Au lieu que si nous conservons l'hypothèse déjà admise n° **16**, et d'après laquelle *le point de vue, dans toute projection horizontale, est censé à une distance infinie sur la verticale* OO' passant par un quelconque des points de l'objet, alors les plans tangents dont les points de contact avec la surface faisaient connaître la courbe ABC....., deviendront tous *verticaux*, et leur détermination sera plus facile; ou plutôt, elle s'effectuera ordinairement d'une manière très-simple, comme nous le reconnaîtrons dans les épures suivantes. Fig. 33.

106. Il résulte de là que *le contour apparent d'une surface projetée sur le plan* HORIZONTAL, *s'obtient en cherchant les points de contact de tous les plans tangents qui sont* VERTICAUX.

Quant à la projection verticale de cette même surface, elle a son point de vue particulier, qui est censé (n° **16**) *à une distance infinie sur une perpendiculaire au plan vertical;* d'où il suit que le contour apparent, relatif à cette pro-

jection, ne sera pas le même que pour le plan horizontal, mais il s'obtiendra en cherchant *les points de contact de la surface avec tous les plans tangents qui sont* PERPENDICULAIRES AU PLAN VERTICAL.

107. Nous pouvons maintenant compléter les règles que nous avons indiquées nos **15** et **16**, pour la ponctuation des lignes principales. Car il suit de ce qui précède que les lignes ou portions de lignes qui, sur une surface quelconque, se trouveront *au-dessus du contour apparent* relatif à la projection horizontale, *seront seules visibles* sur cette projection; et quant au plan vertical, *les seules parties visibles* seront celles qui se trouveront *en avant du contour apparent* relatif à ce dernier plan. Mais on ne devra pas oublier qu'une même ligne pourra être visible dans une des projections et invisible dans l'autre, puisque le point de vue est différent pour les deux cas : de sorte qu'il faudra, sur chaque plan, employer avec discernement les deux modes de ponctuation que nous avons assignés pour les *lignes principales,* en se rappelant toujours que les distinctions précédentes ne s'appliquent pas aux *lignes auxiliaires* (n° **15**, 2°).

108. En outre, toutes les fois que dans une épure il entrera un plan *indéfini*, tangent ou sécant, *nous ne le regarderons pas comme existant réellement*, mais nous supposerons qu'on a voulu *seulement donner* ou *trouver ses traces;* car autrement ce plan cacherait presque toujours une grande partie ou la totalité de la surface, ce qui aurait le grave inconvénient de ne plus laisser distinguer sur cette surface, objet principal de l'épure, les parties supérieures ou antérieures d'avec les parties opposées : de sorte que la forme des objets serait moins nettement accusée par le dessin graphique. Cette restriction devra donc toujours être sous-entendue dorénavant, sans que nous ayons besoin de la rappeler chaque fois.

CHAPITRE III.

Des plans tangents aux cylindres et aux cônes.

Fig. 39. **109.** *Par un point donné sur la surface d'un cylindre quelconque, on propose de lui mener un plan tangent.*

Soit AECG la directrice du cylindre, que nous supposons située dans le plan horizontal, et quoique cette ligne se trouve ici un cercle, la méthode sera générale et applicable à toute autre courbe; soit aussi $(ab, a'b')$ la droite à laquelle

la génératrice rectiligne doit rester constamment parallèle, en glissant sur AECG. Nous commencerons par déterminer le contour apparent de la surface qui, sur le plan horizontal, sera donné (n° **106**) par les points de contact de tous les plans tangents *verticaux*. Or, chaque plan de ce genre renfermera une arête (*) du cylindre, et aura pour trace horizontale la projection même de cette droite, c'est-à-dire une parallèle à *ab*; de plus, ce plan touchera le cylindre tout le long de cette génératrice (n° **99**), et par conséquent sa trace devra être tangente à la base AECG; donc, si l'on mène à cette courbe les tangentes AB et CD parallèles à *ab*, ce seront les traces des plans tangents verticaux, et en même temps les projections horizontales de leurs lignes de contact qui seront les deux génératrices (AB, A'B') et CD, C'D'). Ainsi, ces deux lignes formeront le contour apparent du cylindre sur le plan horizontal, et toute arête de cette surface qui sera *au-dessous* de ces droites, c'est-à-dire qui aboutira sur le demi-cercle AGC, sera *invisible* en projection horizontale.

Quant au contour apparent sur le plan vertical, il sera fourni (n° **106**) par les plans tangents qui seront perpendiculaires à ce plan de projection; leurs traces horizontales devront donc être perpendiculaires à la ligne de terre, et tangentes comme ci-dessus à là base AECG; par conséquent ces traces seront EE' et GG'. Ensuite, comme ces plans toucheront nécessairement le cylindre suivant les génératrices EF et GH, dont les projections verticales sont les droites E'F' et G'H' parallèles à *a'b'*, ces deux génératrices formeront le contour apparent de la surface sur le plan vertical; de sorte que toute arête qui se trouvera *en arrière* de ces droites, ou qui aboutira sur le demi-cercle EAG, sera *invisible* en projection verticale.

110. Maintenant, résolvons le problème proposé, en supposant que M soit la projection horizontale du point donné; et puisqu'il doit être sur la surface, il ne faudra pas choisir arbitrairement la seconde projection de ce point, car

(*) Quelquefois, pour simplifier le langage, nous appellerons *arêtes* d'un cylindre ou d'un cône, les diverses positions de la génératrice rectiligne; mais il ne faut jamais donner à ces droites le nom d'*éléments*, car les éléments d'une grandeur doivent toujours être homogènes avec elle : ainsi les éléments d'une surface sont d'autres petites surfaces dont la somme compose la surface en question. D'ailleurs, nous aurons besoin plus tard (n° 189) d'employer ce mot d'*élément* dans sa véritable acception, et alors il résulterait de ce double sens une confusion d'idées très-nuisible dans la théorie des surfaces gauches. Nous emploierons aussi quelquefois le nom de *base* pour désigner la directrice d'un cylindre ou d'un cône, surtout quand cette courbe se trouvera située dans le plan horizontal.

celle-ci va résulter de la première. En effet, par le point en question sur le cylindre, il passe nécessairement une génératrice qui sera projetée horizontalement suivant ML parallèle à ab; or ML allant rencontrer la base du cylindre en L, ce point doit être la trace horizontale de cette génératrice, dont la projection verticale sera par conséquent L'K' parallèle à $a'b'$; ainsi, en projetant le point M sur L'K', on obtiendra les deux projections M et M' du point assigné sur le cylindre.

Cependant il existe ici une seconde solution; car la droite ML allant couper la base en deux points L et V, on peut dire que V est la trace d'une autre arête projetée également sur MV, mais dont la projection verticale serait V'K''; de sorte que, si l'on rapporte le point M sur cette dernière droite en M'', il y aura sur le cylindre un second point (M, M'') qui sera, comme le premier (M, M'), projeté horizontalement en M.

Fig. 39. **111.** Cela posé, construisons le plan tangent pour le point (M, M'). Ce plan renfermera la génératrice (ML, M'L'), et par conséquent sa trace passera par le pied L de cette droite; puis, comme il doit toucher le cylindre tout le long de cette génératrice (n° 99), il contiendra nécessairement la tangente de la base au point L, c'est-à-dire la ligne LQ, qui sera précisément la trace horizontale du plan demandé. Pour obtenir l'autre trace, on cherchera le point K' où la droite (ML, M'L') contenue dans ce plan, va percer le plan vertical, et QK' sera la trace verticale du plan tangent. Mais s'il arrive, comme dans notre épure, que la trace PQ aille couper la ligne de terre à une distance trop considérable, on imaginera par le point (M, M'), une droite auxiliaire qui soit parallèle à la trace horizontale LQ, et dont les projections seront évidemment MX parallèle à QL, et M'X' parallèle à la ligne de terre; puis, en construisant le point X' où cette auxiliaire va percer le plan vertical, ce point devra appartenir encore à la trace verticale du plan tangent, laquelle sera X'K'. Dans tous les cas, ce moyen est bon à employer comme vérification.

Quant au plan tangent relatif au point (M, M''), on observera que la génératrice de contact est ici projetée sur MV, M''V'; donc, en menant par le pied V de cette droite une tangente VS à la base du cylindre, ce sera la trace horizontale de ce nouveau plan tangent. La trace verticale SK'' se déterminera, comme ci-dessus, en cherchant le point K'' où la génératrice de contact va percer le plan vertical; ou bien, on aura recours encore à l'horizontale (MY, M''Y'), qui fournira un troisième point Y' de cette trace.

112. Observons d'ailleurs que les deux plans tangents PQR' et PSR', que nous venons de construire, renferment deux génératrices du cylindre qui sont pa-

rallèles entre elles; donc ces plans ne pourront se couper que suivant une droite parallèle à ces génératrices. Par conséquent, si l'on construit (n° **27**) l'intersection (PR, P'R') de ces deux plans, cette droite devra se trouver exactement parallèle à (ab, $a'b'$), ce qui fournira une nouvelle vérification des opérations graphiques antérieures.

113. D'après les motifs exposés n° **108**, nous nous sommes proposé, dans l'épure actuelle, de construire seulement les traces des plans tangents, sans regarder ceux-ci comme réellement existants; mais, puisque ces traces subsistent, il faudra *ponctuer* les parties de ces lignes qui se trouvent cachées par la projection du cylindre sur le plan horizontal et sur le plan vertical. Quant aux diverses arêtes du cylindre, nous aurions pu *pointiller* celles d'entre elles qui nous avaient servi de lignes *auxiliaires* pour arriver aux plans tangents; mais nous avons préféré de regarder toutes ces droites comme autant de *génératrices* réellement existantes, et dont l'ensemble accuse mieux la forme de la surface; dès lors elles ont dû être marquées par un trait *plein* ou *ponctué*, selon qu'elles étaient visibles ou invisibles; distinction qui s'effectuera d'après les règles énoncées au n° **109**.

114. Si l'on veut construire la courbe suivant laquelle le cylindre va pénétrer le plan vertical, il suffira de chercher les traces des diverses génératrices de cette surface, et l'on obtiendra ainsi la ligne F'K'D'H'K"B' qui, dans l'exemple actuel, sera une ellipse; elle devra *toucher* aux points K', K", les traces des deux plans tangents, puisque ceux-ci renferment (n° **99**) les tangentes à toutes les courbes situées sur le cylindre, et menées par les divers points de leur arête de contact. Pour obtenir les points *le plus haut* et *le plus bas* de la courbe F'K'D'H'....., il suffira de construire les deux génératrices qui répondent aux points de la base T et t dans lesquels la tangente est *parallèle à la ligne de terre.* Car, pour chacune de ces génératrices, par exemple (TU, T'U'), le plan tangent correspondant coupera le plan vertical suivant une droite évidemment parallèle à cette ligne de terre, et conséquemment horizontale; d'ailleurs cette intersection devant toucher nécessairement la courbe F'K'D'H'....., il s'ensuit que le point U' est bien celui où *la tangente est horizontale.* Observons en outre que cette conséquence est vraie pour un cylindre quelconque, quand même sa base serait toute autre courbe qu'un cercle.

115. Ajoutons enfin, que si l'on avait d'abord assigné pour la directrice du cylindre, une courbe quelconque située dans l'espace et définie par ses deux projections sur les plans fixes, on aurait pu ramener la question au cas du n° **109**, en tirant par divers points de cette courbe des parallèles à la droite

(ab, $a'b'$), et en cherchant les traces de ces génératrices sur le plan horizontal; par-là on aurait trouvé la base AELG, que nous nous sommes donnée immédiatement.

116. *Mener un plan tangent à un cylindre, par un point donné hors de cette surface.*

FIG. 39. Conservons pour le cylindre les mêmes données que précédemment, et soit (N, N') le point assigné dans l'espace; nous mènerons par ce point, et parallèlement aux génératrices, une droite (NP, N'P') qui devra évidemment se trouver contenue tout entière dans le plan tangent cherché, puisque celui-ci, quel qu'il soit, renfermera une arête du cylindre. Donc, en construisant la trace horizontale P de cette droite, on obtiendra un point de la trace du plan demandé; et celle-ci devant toucher la base du cylindre (n° **99**), sera l'une des tangentes PLQ et PVS que l'on peut mener à cette base par le point P. Il y aura donc deux plans qui résoudront le problème, et leurs traces verticales s'obtiendront aisément, puisque chacun de ces plans renfermera la droite (PN, P'N') et l'arête qui part du point de contact L ou V (*). D'ailleurs on pourrait aussi, comme au n° **111**, imaginer par le point donné (N, N') une horizontale située dans l'un ou l'autre des plans tangents, et construire la trace verticale de cette droite.

117. *Trouver un plan qui soit tangent à un cylindre et parallèle à une droite donnée.*

FIG. 40. Soit AECG la base du cylindre sur le plan horizontal, et (EF, E'F') une des génératrices : on construira le contour apparent de cette surface sur les deux plans fixes comme au n° **109**; puis, si l'on représente par (mn, $m'n'$) la droite donnée, il faudra, par un point de cette ligne, mener une parallèle (ma, $m'a'$) aux génératrices du cylindre, et faire passer un plan par ces deux droites. Ce plan, qui aura pour trace horizontale an, devra se trouver parallèle au plan tangent cherché, puisque ce dernier renferme une arête du cylindre, et se trouve ainsi parallèle aux deux droites projetées sur ma et mn; donc la trace de ce plan tangent sera l'une des deux tangentes PQ ou TS menées à la base parallèlement à an. Par conséquent il y aura encore deux solutions, et les traces verti-

(*) Il arrive ici que les points de contact L et V sont sur une même parallèle à la droite ab, parce que nous avons voulu faire servir la figure du problème précédent; mais lorsqu'on prendra le point (N, N') tout-à-fait arbitrairement, cette circonstance n'aura pas lieu en général, et du reste cela ne changera rien aux raisonnements qui nous ont servi à résoudre le problème actuel.

cales QR′, SV′, s'obtiendront facilement au moyen des arêtes de contact qui seront (PR, P′R′) pour l'un des plans, et (TV, T′V′) pour l'autre. Ici les deux plans tangents seront évidemment parallèles entre eux, et par suite leurs traces verticales devront aussi se trouver parallèles l'une à l'autre.

118. Observons, en terminant ces problèmes sur les cylindres, qu'on ne pourrait pas exiger qu'un plan fût tangent à une telle surface et passât en même temps par une droite donnée. Car, par cela seul qu'un plan touche un cylindre en un point, il est, comme on l'a vu n° **99**, nécessairement tangent tout le long de la génératrice qui passe par ce point; de sorte que cette première condition en renferme implicitement deux, d'après lesquelles le plan cherché doit jouir du contact en deux points de la surface : puis, si on y joint l'obligation de passer encore par une droite ou par deux points donnés en dehors, cela formera *quatre* conditions distinctes, tandis que trois suffisent pour déterminer la position d'un plan. Cependant, si la droite donnée était parallèle aux arêtes du cylindre, cela reviendrait à n'assigner qu'un seul point, et le problème rentrerait dans celui du n° **116**.

119. *Par un point donné sur une surface conique, on propose de lui mener un plan tangent.*

Soit ACBD la courbe directrice que nous supposons située dans le plan horizontal, et (S, S′) le sommet du cône; nous commencerons par déterminer le contour apparent de cette surface sur le plan horizontal, en cherchant (n° **106**) tous les plans tangents qui peuvent être *verticaux*. Or, un tel plan ayant pour trace horizontale la projection même de la génératrice qu'il renferme, cette trace passera par le point S; puis, comme elle doit toucher la base, attendu qu'ici encore le contact du plan tangent a lieu (n° **100**) tout le long d'une génératrice, on en conclura que les tangentes SA et SB, menées du point S, sont les traces des plans tangents verticaux, et que ceux-ci touchent le cône suivant les deux arêtes (SA, S′A′) et (SB, S′B′), lesquelles forment le contour apparent de la surface conique relativement au plan horizontal. De sorte que toute génératrice qui sera *au-dessous* de celles-là, c'est-à-dire qui aboutira dans la portion ADB de la base, se trouvera *invisible* sur le plan horizontal. Fig. 41.

Quant au contour apparent sur le plan vertical, il sera donné par les plans tangents au cône qui se trouveront perpendiculaires à ce plan de projection (n° **106**); ainsi, les traces horizontales de ces plans devant être perpendiculaires à la ligne de terre, et tangentes (n° **100**) à la base ACBD, seront les droites CC′ et DD′. D'ailleurs, puisque ces plans toucheront évidemment le cône suivant les génératrices (CS, C′S′) et (DS, D′S′), il s'ensuit que ces deux droites formeront

le contour apparent de la surface projetée sur le plan vertical; et par conséquent toute arête qui se trouvera *en arrière* de ces droites, ou qui aboutira dans la portion CAD de la base, sera *invisible* en projection verticale.

120. Revenons maintenant au problème primitif, et supposons que M soit la projection horizontale du point donné. L'autre projection ne doit pas être prise arbitrairement; car, puisque le point en question appartient à la surface, il doit se trouver sur une certaine génératrice qui ne peut être projetée horizontalement que suivant SM; cette droite aura donc pour trace horizontale le point E ou le point G, et dès lors sa projection verticale sera S'E' ou S'G'. Donc, si l'on y rapporte la projection M par une perpendiculaire à la ligne de terre, on obtiendra pour le point assigné les deux solutions (M, M') et (M, M").

FIG. 41. **121**. Cela posé, construisons le plan tangent pour le premier de ces deux points. Ce plan renfermera la génératrice (SE, S'E') et touchera le cône tout le long de cette droite (n° **100**); par conséquent, il aura pour trace horizontale la tangente PEQ de la base. Quant à sa trace verticale, elle devra passer par le point (F, F') où l'arête de contact va percer le plan vertical, et par le point Q où la trace PE irait couper la ligne de terre : mais comme ce point Q se trouve ici hors du cadre, on y suppléera en imaginant, par le point (M, M') et dans le plan tangent cherché, une horizontale (MX, M'X') qui va percer le plan vertical en X', et fournit ainsi un nouveau point de la trace demandée QX'F'.

De même, pour le point (M, M"), l'arête de contact étant (SG, S'G'), la tangente GV sera la trace horizontale du plan tangent actuel; et sa trace verticale VF" se déterminera en cherchant le point F" où l'arête de contact (GS, G'S') va percer le plan vertical : ou bien, comme précédemment, on se servira d'une horizontale (MY, M"Y') située dans le plan tangent qui nous occupe.

122. Observons ici que les deux plans tangents que nous venons de déterminer, renfermant chacun une génératrice du cône, passeront tous les deux par le sommet (S, S'); d'où il résulte que si l'on construit (n° **27**) leur intersection qui est projetée suivant PR et P'R', il devra arriver que la première de ces lignes passe par S et l'autre par S', ce qui fournira une vérification des constructions antérieures. D'ailleurs, les traces verticales devront *toucher* en F' et F" la courbe suivant laquelle le cône est coupé par le plan vertical, courbe qui se construira en cherchant les points où les diverses génératrices vont percer ce plan de projection.

123. *Mener un plan tangent à une surface conique par un point donné au dehors.*

Soit encore ABC la base du cône et (S, S′) le sommet; on déterminera, comme ci-dessus, le contour apparent de la surface sur chacun des plans fixes, et nous représenterons par (N, N′) le point assigné dans l'espace. Le plan tangent que l'on cherche, devant contenir une génératrice, passera par le sommet (S, S′), et par suite il renfermera la droite (SN, S′N′); donc, en cherchant le pied (P, P′) de cette droite, et en menant à la base les tangentes PEQ, PGV, ce seront les traces horizontales des deux plans tangents qui satisfont à la question. Quant aux traces verticales, on les déterminera par le moyen de la droite (SN, S′N′) contenue dans les deux plans, ou bien par le secours des arêtes de contact de ces plans, lesquelles sont évidemment (SE, S′E′) et (SG, S′G′). On pourrait encore employer une horizontale auxiliaire menée dans chaque plan par le point (N, N′), comme nous l'avons déjà fait plusieurs fois. Fig. 42.

124. *Trouver un plan qui soit tangent à un cône et parallèle à une droite donnée.*

Conservons les mêmes données que précédemment, et soit (mn, $m'n'$) la droite à laquelle le plan tangent doit être parallèle. Comme ce plan passera nécessairement par le sommet, si nous menons de ce point et parallèlement à (mn, $m'n'$), la droite (SP, S′P′), cette dernière sera évidemment contenue dans le plan demandé; par conséquent la trace (P, P′) de cette droite appartiendra à la trace horizontale du plan tangent, laquelle sera l'une des deux tangentes PEQ, PGV menées à la base. Il y aura donc encore deux solutions, et les traces verticales de ces plans se détermineront comme au numéro précédent. Fig. 42.

125. Puisque tout plan qui est tangent à une surface conique dans un point, touche nécessairement cette même surface tout le long d'une droite (n° **100**), la remarque faite au n° **118** s'applique ici, et il en résulte qu'on ne saurait exiger qu'un plan soit tangent à un cône et passe en même temps par une droite ou par deux points donnés, à moins que la droite qui réunirait ces deux points, ne passât elle-même par le sommet; car alors cela reviendrait à n'assigner qu'un seul point (n° **123**).

En terminant ce chapitre, nous ajouterons quelques problèmes dont nous indiquerons seulement les moyens de solution.

126. *Par une droite donnée, mener un plan qui fasse avec le plan horizontal un angle déterminé α.* D'un point quelconque de la droite on abaissera sur le plan horizontal une perpendiculaire et une oblique, en dirigeant celle-ci parallèlement au plan vertical, et de manière que sa projection sur ce dernier plan

forme l'angle α avec la ligne de terre. Alors, en imaginant que cette oblique tourne autour de la verticale, elle décrira un cône droit dont la trace horizontale sera un cercle bien facile à déterminer, et dont toutes les arêtes se trouveront aussi inclinées sur l'horizon d'une quantité angulaire α; par conséquent, si l'on mène à ce cône un plan tangent passant par la droite donnée, ce qui rentre ici dans le problème du n° **123**, on obtiendra évidemment un plan qui satisfera aux conditions assignées par la question.

127. *Mener à un cylindre donné, un plan tangent dont l'inclinaison sur le plan horizontal soit α.* On construira, comme dans le problème précédent, un cône de révolution dont les arêtes fassent l'angle α avec le plan horizontal ; puis, en tirant par le sommet une droite parallèle aux génératrices du cylindre, et faisant passer par cette droite un plan tangent au cône (n° **123**), il restera à mener au cylindre un plan tangent parallèle à celui-là; problème qui se résoudra, comme au n° **117**, en menant à la base du cylindre une tangente parallèle à la trace horizontale du plan qui touchait le cône. On sent bien que le problème deviendra impossible lorsque la parallèle, menée par le sommet du cône auxiliaire, aboutira dans l'intérieur de sa base.

Si l'on proposait *la même question pour un cône* défini par une base quelconque, il faudrait modifier la solution en prenant pour sommet du cône de révolution le point même qui sert de sommet à la surface conique assignée par le problème; ensuite, on devrait mener une tangente commune aux bases de ces deux cônes, et ce serait la trace horizontale du plan demandé.

128. *Par un point donné, mener une droite qui soit tangente à une surface conique et parallèle à un plan donné.* On construira d'abord un plan qui touche le cône et qui passe par le point qu'assigne la question ; ensuite, on coupera ce plan par un autre mené du même point et parallèlement au plan donné : alors l'intersection des deux plans ainsi construits, fournira évidemment une droite qui satisfera à la question.

CHAPITRE IV.

Des plans tangents aux surfaces de révolution, lorsque le point de contact est donné.

129. Puisque par chaque point M pris sur une surface de révolution (n° **75**), il passe toujours un méridien AMD et un parallèle FMG, si l'on construit les tangentes MT et MV à ces courbes, et que l'on mène un plan par ces deux droites, ce sera (n° **103**) le plan tangent de la surface en M. Or la tangente MV, située dans le plan du cercle FMG, est évidemment perpendiculaire à la fois au rayon MO et à l'axe AO; donc elle l'est aussi au plan méridien AOM, et par suite le plan tangent qui contiendra MV, sera lui-même perpendiculaire sur ce méridien. Cette conséquence étant indépendante de la nature de la courbe AMD et de la position du point M, il en résulte ce théorème remarquable : *Dans toute surface de révolution, le plan tangent est toujours perpendiculaire au plan méridien qui passe par le point de contact.* FIG. 43.

130. En menant au point M une normale MN à la surface, cette droite, perpendiculaire au plan tangent, se trouvera nécessairement renfermée dans le plan méridien AMD; donc, dans toute surface de révolution, *la normale va rencontrer l'axe.*

De plus, cette rencontre se fait au même point, pour toutes les normales MN, PN, FN,.... qui répondent à un même parallèle. En effet, lorsque le plan méridien AMD tourne autour de l'axe, en entraînant avec lui les droites MN et MT, la première ne cesse pas d'être perpendiculaire à l'autre; en outre, cette droite mobile MN, toujours renfermée dans le plan méridien, se trouve, comme celui-ci (n° **129**), perpendiculaire successivement à chaque tangente MV du parallèle; donc MN est bien perpendiculaire à deux tangentes, et par conséquent normale à la surface, dans toutes les positions qu'elle occupe en tournant autour de l'axe AD. D'ailleurs, puisque dans ce mouvement le point N de la normale MN reste immobile, il en résulte que *toutes les normales menées le long d'un même parallèle, forment toujours un cône* DROIT *dont le sommet est sur l'axe:* mais ce sommet change en passant d'un parallèle à un autre.

Après avoir fait remarquer ces propriétés générales et communes à toutes les surfaces de révolution, nous allons nous occuper de la construction du plan tangent.

131. *Par un point donné sur une surface de révolution dont le méridien est connu, mener un plan qui soit tangent à cette surface.*

Fig. 44. Pour simplifier les constructions, choisissons notre plan horizontal de manière qu'il soit perpendiculaire à l'axe de révolution : alors cette droite se trouvant verticale, elle sera projetée horizontalement en un point O, et verticalement suivant la droite O'Z'. Soit d'ailleurs A'B'D' la projection du méridien *principal*, c'est-à-dire de celui qui est parallèle au plan vertical, et qui se trouve projeté horizontalement sur OB parallèle à la ligne de terre : ici ce méridien est une ellipse dont un des diamètres principaux coïncide avec l'axe de rotation, et par suite la surface sera un ellipsoïde de révolution (n° **79**); mais les raisonnements et les constructions seraient entièrement semblables pour toute autre courbe méridienne. Le plus grand des parallèles, ou bien *l'équateur* de la surface, est évidemment le cercle décrit par le demi-axe C'B', lequel se projette horizontalement sur un cercle BKE égal au premier, et forme le *contour apparent* de la surface relativement au plan horizontal (n° **106**); en effet, tout le long de l'équateur (B'E', BKE) les plans tangents seront *verticaux*, puisque chacun renfermera la tangente du méridien, laquelle est une verticale comme B'B. Quant au contour apparent de la surface par rapport au plan vertical, ce sera le méridien *principal* (A'B'D'E', BE); car ce contour doit être formé (n° **106**) par les points de contact de tous les plans tangents perpendiculaires au plan vertical : or les plans tangents le long de cette courbe méridienne sont (n° **129**) tous perpendiculaires à son plan, et par suite au plan vertical de projection. Nous n'ajouterons pas ici d'autres positions de la génératrice pour figurer (n° **93**) la forme de la surface, parce qu'elle est suffisamment indiquée par ce qui précède; mais nous verrons cependant plus loin (n° **137**) la manière de construire les projections d'autant de courbes méridiennes que l'on voudrait en tracer.

132. Cela posé, soit M la projection horizontale du point donné sur la surface; il ne faudra pas prendre arbitrairement la seconde projection de ce point, puisqu'il doit être situé à la rencontre de la verticale M avec le méridien projeté suivant OK. Or, si l'on fait tourner celui-ci autour de l'axe (O, O'Z'), jusqu'à ce qu'il coïncide avec le méridien principal OB, il se trouvera alors projeté verticalement suivant A'B'D'; et comme par suite de ce déplacement la projection M aura décrit l'arc MG, on en conclura que la projection verticale du point cherché se trouve actuellement en G' ou en G''. Maintenant, si l'on ramène le méridien mobile dans la position OK, le point en question, qui pendant ce mouvement ne changera pas de hauteur, restera projeté verticalement

sur l'horizontale G'F' ou G''F''; d'où il suit évidemment que, dans sa position primitive, il était projeté verticalement en M' ou en M''; ainsi, il y a sur la surface deux points (M, M') et (M, M'') qui sont l'un et l'autre projetés horizontalement en M.

133. Considérons le premier (M, M') de ces points, et pour déterminer le plan tangent qui s'y rapporte, nous l'assujettirons (n° **103**) à passer par deux tangentes de la surface, savoir : la tangente au méridien et la tangente au parallèle; mais comme la projection de la courbe méridienne relative au point (M, M') n'est pas donnée immédiatement, et qu'ainsi nous ne pouvons pas lui mener directement une tangente, nous rabattrons encore le plan vertical OMK sur le méridien principal OB. Par là le point (M, M') sera transporté en (G, G'), et il sera facile alors de construire la tangente G'H' qui viendra percer le plan horizontal au point H sur OB : puis, si l'on ramène le méridien mobile dans la position OMK, le pied H de cette tangente décrira évidemment un arc de cercle terminé en T, tandis que le point de contact G' reviendra en M'; donc, en projetant le point T sur la ligne de terre, on obtiendra M'T' et MT pour les projections de la tangente au méridien qui passe par le point (M, M'). Observons d'ailleurs que cette tangente prolongée doit rencontrer l'axe de la surface, au même point Z' où aboutissait la droite G'H'. Fig. 44.

Quant au parallèle relatif à ce point (M, M'), il est évidemment projeté sur le cercle GMF et sur G'F'; par conséquent sa tangente est l'horizontale (MV, M'V') perpendiculaire au plan méridien OMK. Maintenant, le plan qui renfermera les deux tangentes ainsi déterminées, aura pour trace horizontale une droite TU passant par le pied T de la première tangente, et menée parallèlement à MV qui est une horizontale contenue dans ce plan tangent; puis, on aura la trace verticale UV' de ce même plan, en construisant le point V' où la droite (MV, M'V') va percer le plan vertical.

Le plan tangent relatif au point (M, M'') s'obtiendra d'une manière analogue, en rabattant d'abord le point M'' en G'' sur le méridien principal, et menant à celui-ci la tangente G''L'. Ensuite le pied (L, L') de cette droite étant ramené dans le méridien OK, viendra en R; et comme la tangente au parallèle est ici (MV, M''V''), les traces du plan tangent seront RS parallèle à MV, et SV''.

134. Il est bon de remarquer que, d'après la direction de la tangente MV au parallèle, chaque plan tangent à une surface de révolution, aura toujours *sa trace horizontale perpendiculaire à celle du plan méridien* qui passe par le point de contact, du moins tant que l'axe de la surface sera vertical.

135. Observons encore que les deux plans tangents en (M, M') et (M, M''),

ayant leurs traces TU et RS parallèles, devront se couper suivant une horizontale; et par suite de la symétrie de la surface actuelle, cette horizontale sera située dans le plan de l'équateur E'B'. En effet, comme les tangentes G'H' et G"L' à l'ellipse méridienne se rencontraient nécessairement en un point α situé sur l'axe de cette ellipse, ce point transporté en 6 dans le méridien OK avec les deux tangentes, leur sera toujours commun, et restera dans le plan de l'équateur E'B' : donc l'horizontale qui est l'intersection des deux plans tangents, passera par le point 6; et c'est aussi pour cette raison que les traces verticales de ces plans doivent se couper en un point P″ situé sur la droite E'B'6 prolongée.

Fig. 44. **136.** Pour obtenir la *normale* de la surface de révolution au point (M, M'), on se rappellera (n° **130**) que toutes les normales, le long d'un même parallèle, vont couper l'axe au même point, et que d'ailleurs chacune est renfermée dans le plan méridien qui passe par le point de contact. Ainsi, après avoir rabattu sur le méridien principal le point M' en G', on tirera par ce dernier une droite G'N' perpendiculaire à la tangente G'H'; puis, en joignant le pied N' de cette normale avec le point donné M', on obtiendra la normale N'M' relative à ce dernier point. C'est là du moins sa projection verticale; et quant à sa projection horizontale, elle tombe évidemment sur OM.

Observons ici que cette normale étant perpendiculaire au plan tangent TUV', les traces de ce dernier devront se trouver (n° **33**) respectivement perpendiculaires aux droites OM et N'M'γ; ce qui offrira une vérification des constructions déjà effectuées pour le plan tangent, ou même, si l'on veut, un moyen de trouver *à priori* ses traces, puisque alors il s'agirait de mener par un point connu (M, M') un plan perpendiculaire à la droite (MO, M'N'). *Voyez* n° **36**.

137. On a vu (n° **132**) qu'il était facile, en partant de la projection horizontale M d'un point de la surface, de conclure la projection verticale M' ou M″ : si donc on applique le même procédé à divers points K, M, Q,.... pris dans le plan méridien OK, on pourra ainsi construire la projection verticale de la courbe méridienne renfermée dans ce plan, et cette courbe devra être tangente aux droites TM' et R'M″; puis, en répétant la même opération pour d'autres plans méridiens que OK, on obtiendrait autant de positions que l'on voudrait de l'ellipse mobile A'B'D', ce qui servirait à compléter la représentation graphique de la surface.

C'est aussi par des opérations analogues, qu'étant données les projections d'une *génératrice* quelconque d'une surface de révolution, on en conclurait

facilement le méridien principal, ou toute autre section méridienne. On pourra se proposer, comme exemple, le cas où cette génératrice est *une droite qui ne rencontre pas l'axe;* et alors on trouvera que la méridienne est une hyperbole, ainsi que nous le verrons plus loin (nº **148**).

138. *Du plan tangent au* TORE. Si l'on fait tourner un cercle (A'B'C'B", ABC) autour d'une droite (O"Z', O) qui ne passe point par son centre, mais qui est située dans son plan, ce méridien circulaire engendrera une espèce de *surface annulaire*, nommée un *tore*, dont tous les points seront projetés horizontalement entre *l'équateur* décrit avec le rayon OC = O'C', et le *cercle de gorge* décrit par le rayon OA = O'A' : mais il faut bien remarquer que les deux demi-cercles B'C'B" et B'A'B" engendreront deux nappes très-différentes de forme, quoique l'une et l'autre viennent se réunir le long des circonférences parcourues par les extrémités B' et B" du diamètre vertical. La nappe extérieure est *convexe*, c'est-à-dire que toutes les courbes qui y seraient tracées par un même point (N, N') se trouveraient situées d'un même côté du plan tangent en ce point. En effet, pour déterminer ce plan, il faut construire la tangente N'P' du méridien, et par le pied P de cette droite, mener une perpendiculaire PP' à la trace ON du méridien (nº **134**); or on voit que la méridienne B'N'B" et le parallèle N'I' sont tous deux à gauche du plan tangent N'P'P; et quoique nous ayons choisi le point (N, N') sur le méridien principal, afin de rendre plus simple la construction du plan tangent, il est bien évident que les mêmes circonstances arriveraient pour tout autre point de la nappe extérieure, puisqu'elle est de révolution et par conséquent symétrique tout autour de l'axe (O"Z', O). Fig. 45.

Au contraire, si nous prenons un point (M, M') sur la nappe intérieure, le plan M'T'T, tangent en ce point, traversera la surface; car le méridien B'M'B" sera évidemment à droite de ce plan, tandis que le parallèle M'V' se trouvera à gauche : aussi le plan M'T'T coupera le tore suivant une courbe à nœud, qui est représentée en projection horizontale par (MHEGE"M*hege*"M), et que nous apprendrons plus tard à construire (*voyez* nº **267**). Mais cette intersection n'empêche pas le plan M'T'T de renfermer les tangentes du méridien, du parallèle, et de toutes les autres courbes tracées sur la surface par le point (M, M'); de sorte que ce plan est réellement tangent au tore en cet endroit, et sécant dans tous les autres points communs; circonstance qui tient à ce que la nappe intérieure est une surface *non-convexe* ou *à courbures opposées*, tout-à-fait comparable à la gorge d'une poulie.

139. Dans l'épure actuelle, où nous avons voulu représenter les principaux

parallèles de la surface, une partie de la trace verticale M'T' du plan tangent à la nappe intérieure, se trouve, il est vrai, cachée par le tore; mais nous avons dû néanmoins la laisser en trait plein, parce qu'elle reçoit la projection verticale de la courbe d'intersection, dont la branche antérieure *hrefg* est visible sur le plan vertical.

140. HYPERBOLOÏDE DE RÉVOLUTION *à une nappe*. Nous avons nommé ainsi (n° **84**) la surface que décrit une demi-hyperbole en tournant autour de son axe imaginaire; mais cette surface qui jouit de diverses propriétés très-remarquables, peut encore être engendrée par *une droite assujettie à tourner, par un mouvement de révolution* (n° **75**), *autour d'une autre droite fixe qui n'est pas dans un même plan avec la première.*

FIG. 47. Pour le démontrer, représentons la droite fixe par OZ, et la droite mobile par ADM : soit OD leur plus courte distance qui sera horizontale, si l'on regarde l'axe OZ comme vertical. Cette ligne OD décrira, dans le mouvement de révolution autour de OZ, un cercle horizontal EDF qui sera évidemment le plus petit des parallèles, ou le *cercle de gorge* de la surface; et la tangente DP à ce cercle sera nécessairement la projection horizontale de la droite mobile ADM; d'où il suit que cette droite ira percer le plan méridien quelconque ZOX, en un point M situé sur la verticale élevée par le point P (*). Or, si l'on construisait ainsi tous les points M, M', F,..... dans lesquels le plan fixe ZOX est successivement rencontré par la droite mobile ADM dans ses diverses positions, on obtiendrait la *méridienne* MM'F de la surface engendrée par cette droite; et par conséquent la question est réduite à prouver que cette courbe MM'F est une hyperbole qui a pour demi-axe réel la distance OF=OD. Pour y parvenir, rapportons le point quelconque M à des coordonnées parallèles aux axes OX, OZ; et comme la distance OD reste invariable pendant le mouvement de la droite, aussi bien que l'angle MDP formé par celle-ci avec l'horizon, posons

$$\mathrm{OP}=x,\quad \mathrm{PM}=z,\quad \mathrm{OD}=\delta,\quad \text{tang. MDP}=\alpha;$$

alors les triangles rectangles MPD et ODP donneront

$$\text{tang. MDP}=\frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{DP}}=\frac{\mathrm{MP}}{\sqrt{\overline{\mathrm{OP}}^2-\overline{\mathrm{OD}}^2}};$$

(*) La figure est censée construite en perspective sur ce plan ZOX comme tableau; et par conséquent toutes les lignes principales situées derrière ce plan, ont été ponctuées.

ou bien, en substituant les notations précédentes,

$$\alpha = \frac{z}{\sqrt{x^2 - \delta^2}};\ \text{d'où}\ \alpha^2 x^2 - z^2 = \alpha^2 \delta^2;$$

équation qui prouve que la méridienne est bien une hyperbole qui a pour demi-axe réel $x = \delta$; donc le lieu parcouru par la droite mobile ADM est effectivement un hyperboloïde de révolution à une nappe.

141. Cette surface admet *une seconde génératrice* rectiligne; en effet, si dans le plan vertical MDP tangent au cercle de gorge, on trace une droite BDN qui fasse avec la verticale DV un angle NDV égal à VDM, cette ligne BDN, en tournant aussi autour de OZ, engendrera *la même surface* que ADM, parce que deux points quelconques M et N, pris à la même hauteur sur ces droites, décriront le même cercle MNL. Pour justifier cette dernière assertion, il suffira de joindre deux à deux les points M, N, Z, V, où un même plan horizontal rencontre les diverses lignes dont nous venons de parler; et à l'aide des triangles rectangles MVD, NVD, qui sont évidemment égaux, on démontrera que les triangles rectangles ZVM, ZVN le sont pareillement; d'où l'on conclura que ZM = ZN, et qu'ainsi les deux points M et N se trouvent bien à la même distance de l'axe OZ. Il résulte de là qu'il existe sur l'hyperboloïde deux systèmes de droites,

$$A,\ A_2,\ A_3,\ \ldots\ldots\ldots\ \text{et}\ B,\ B_2,\ B_3,\ \ldots\ldots\ldots,$$

dont le premier se compose des positions successives que prend la génératrice AD, et le deuxième des diverses positions occupées par BD. D'ailleurs, puisque toutes ces droites sont deux à deux dans des plans verticaux, tels que MDN, il s'ensuit que *toutes les génératrices des deux systèmes se projettent, sur le cercle de gorge, suivant des tangentes à cette circonférence.*

142. Par chaque point R de la surface il passe deux de ces droites; car les génératrices AD et BD viendront passer à deux époques différentes de leur révolution, par ce point R; et elles y occuperont deux positions nécessairement distinctes RA_3, RB_2, puisque la première sera située à gauche, et la seconde à droite du plan méridien ZOR. Il suit de là que le plan tangent en R sera déterminé (n° **103**) par l'ensemble des deux droites RA_3 et RB_2, puisque ces lignes se trouvent sur la surface, et qu'elles sont elles-mêmes leurs propres tangentes. Mais il importe beaucoup d'observer que le plan A_3RB_2, quoique renfermant la droite RB_2 tout entière, *ne sera pas tangent dans un autre point de cette ligne;* car en D_2, par exemple, le plan tangent sera $A_2D_2B_2$; or ce dernier ne peut coïncider avec A_3RB_2, parce que les deux génératrices A_3R et A_2D_2 appartien-

nent au même système, et dès lors ne sauraient être contenues dans un même plan, comme nous allons le démontrer.

FIG. 47. **143.** *Deux droites* AD *et* A_2D_2, *qui appartiennent au même système de génératrices, ne se trouvent jamais dans un même plan.* En effet, ces droites étant projetées horizontalement sur les tangentes DT et D_2T qui se coupent en T, ne pourraient avoir de communs que les points qui sont situés sur la verticale TS; or cette verticale ira évidemment rencontrer A_2D_2 en S au-dessus du cercle de gorge, et AD au-dessous en S′, parce que les parties inférieures de ces deux génératrices du même système, sont inclinées l'une et l'autre à gauche de leurs méridiens respectifs ZOD_2 et ZOD, et que le point T est entre ces méridiens. Donc, 1° les droites AD et A_2D_2 ne sauraient se rencontrer; 2° elles ne sont pas non plus parallèles, car leurs projections horizontales se coupent en T; ainsi, il reste démontré que deux génératrices du système A ne se trouvent jamais dans un même plan.

A la vérité, les projections horizontales de deux de ces droites se trouveront parallèles, quand on comparera celles qui passent par les extrémités d'un même diamètre du cercle de gorge; mais, dans l'espace, l'une de ces génératrices sera inclinée à droite, et l'autre à gauche du plan méridien mené par ce diamètre, de sorte qu'elles seront loin d'être parallèles entre elles; et d'ailleurs il est bien évident qu'alors elles ne pourront pas non plus se couper.

On démontrera d'une manière toute semblable, que les droites B, B_2, B_3,.... du second système ne sont jamais deux à deux dans un même plan.

144. *Chaque droite du système* A *coupe* (sans changer de position) *toutes les droites* B, B_2, B_3,.... *de l'autre système.* Cela est évident pour AD et BD qui sont dans le même plan vertical; mais comparons AD avec une droite quelconque B_2D_2 de l'autre système. Ces deux lignes sont encore projetées sur les tangentes au cercle de gorge DT et D_2T, et puisque celles-ci se coupent en T, la verticale TS′ ira nécessairement rencontrer les droites en question AD et B_2D_2; mais cette rencontre aura lieu pour chacune d'elles au-dessous du cercle de gorge, attendu que DA est inclinée à gauche du méridien ZOD, et D_2B_2 à droite du méridien ZOD_2, tandis que le point T se trouve entre deux. D'ailleurs, d'après la forme de la méridienne, il est évident qu'une droite comme TS′ qui est parallèle à l'axe OZ, ne peut percer la surface qu'en deux points, dont *un seul* S′ sera sur la nappe inférieure au cercle de gorge; par conséquent ce point unique devra coïncider avec ceux où la verticale TS′ a déjà rencontré les génératrices DA et D_2B_2 qui sont sur cette nappe; donc ces génératrices se coupent effectivement au point S′.

Il faut seulement observer que quand on comparera deux droites appartenant l'une au système A, l'autre au système B, et passant par les extrémités d'un même diamètre du cercle de gorge, ces droites auront des projections parallèles, et elles seront elles-mêmes dans l'espace *parallèles l'une à l'autre ;* de sorte que leur rencontre n'aura plus lieu qu'à une distance infinie, mais du moins ces deux génératrices seront encore dans un même plan.

On démontrera d'une manière analogue que chaque génératrice du système B coupe, sans changer de position, toutes les génératrices du système A, ou du moins se trouve dans un même plan avec chacune d'elles.

145. On désigne sous le nom général de SURFACES GAUCHES, toute surface engendrée par *une droite qui se meut de telle sorte que ses positions consécutives ne se trouvent pas deux à deux dans un même plan.* Or, en considérant l'hyperboloïde actuel, soit comme le lieu des diverses positions A, A_2, A_3,.... que prend la génératrice AD dans son mouvement de révolution autour de OZ, soit comme le lieu des diverses droites B, B_2, B_3,..... de l'autre système, on voit (n° **143**) qu'il satisfera à la définition précédente ; par conséquent l'hyperboloïde de révolution à une nappe appartient à cette classe générale de surfaces que l'on nomme *gauches*, et dont nous nous occuperons d'une manière spéciale au livre VII.

146. Si par le centre O de l'hyperboloïde, on mène parallèlement aux génératrices DA et DB, deux droites O*a* et O*b*, celles-ci formeront des angles égaux avec la verticale OZ, et par conséquent elles décriront, en tournant autour de OZ, un seul et même cône droit dont toutes les arêtes seront respectivement *parallèles aux génératrices* A, A_2, A_3,..... et B, B_2, B_3,.... de l'hyperboloïde. Ce sera le *cône asymptotique* de cette dernière surface ; car, pour le déduire de celle-ci, il suffit évidemment de poser FIG. 47.

$$\mathrm{OD} = \delta = 0, \qquad \text{dans} \qquad \alpha^2 x^2 - z^2 = \alpha^2 \delta^2$$

qui représentait (n° **140**) le méridien de l'hyperboloïde : or, par cette hypothèse, on obtient pour le méridien du cône droit, $z = \pm \alpha x$; c'est-à-dire deux droites qui sont bien les asymptotes de l'hyperbole précédente.

147. D'ailleurs, lorsque l'on fait varier la distance δ, sans changer α ou l'inclinaison de la génératrice AD, on obtient successivement divers hyperboloïdes qui ont pour méridiens des courbes *semblables ;* car les axes de l'hyperbole sont δ et $\alpha\delta$, et leur rapport est α, quantité indépendante de la distance δ. Il résulte de là que tous ces hyperboloïdes sont des surfaces semblables et con-

centriques; et comme cette similitude doit s'étendre aussi au cône asymptotique pour lequel δ est nulle, on pourra affirmer que, quand un même plan coupera l'hyperboloïde et le cône asymptotique, les sections faites ainsi dans ces deux surfaces, seront *des courbes semblables* et *concentriques* (*). Cette remarque nous sera utile plus tard.

148. Après avoir fait connaître la nature et les principales propriétés de l'hyperboloïde engendré par la révolution d'une droite, occupons-nous maintenant de la représentation exacte de cette surface au moyen de deux plans de projection. Nous regarderons toujours l'axe fixe comme vertical, et alors ses
FIG. 46. projections seront O et l'O'Z'; quant à la droite mobile, prenons-la dans une situation quelconque où elle sera projetée suivant ADB et A'D'℘; puis, construisons d'abord la méridienne de la surface, en cherchant les points dans lesquels le plan vertical OG est rencontré par les positions successives de la droite (AB, A'℘). Or, déjà dans la situation actuelle, cette droite perce le plan OG au point (M, M''), lequel appartient à la courbe demandée, et celle-ci devra *toucher* en ce point la projection A'M''℘. En effet, quoique dans l'espace la tangente de la méridienne et la droite (AB, A'℘) soient très-distinctes l'une de l'autre, ces droites sont néanmoins situées toutes deux dans le plan tangent de la surface au point (M, M''); et comme ce plan est nécessairement perpendiculaire (n° **129**) au plan méridien OG, et par conséquent au plan vertical de projection, il arrivera ici que A'℘ se confondra avec la projection verticale de la tangente, et qu'ainsi la droite A'℘ touchera elle-même la projection de la courbe méridienne en M''.

Ensuite, un point quelconque (n, n') de AB, décrira pendant le mouvement de révolution, un arc de cercle projeté sur nN et sur l'horizontale n'N': donc ce point (n, n'), quand il arrivera dans le plan vertical OG, se trouvera projeté en (N, N'); ainsi ce sera là un nouveau point de la courbe méridienne G'N'M'G'', et tous les autres se construiront de la même manière. En appliquant ce procédé à l'extrémité (D, D') de l'horizontale (OD, O'D'), qui est perpendiculaire à la fois sur l'axe et sur la génératrice, et qui mesure leur plus courte distance, on obtiendra le point (F, F') de la méridienne le plus rapproché de l'axe; et c'est ce point qui, dans la révolution complète de la droite mobile, décrira le plus petit des parallèles de la surface, ou *le cercle de gorge* projeté ici sur DFE et sur E'F'. De même, le pied (A, A') de la génératrice,

(*) Voyez l'*Analyse appliquée à la géométrie des trois dimensions*, chap. IX.

décrivant un cercle ALG qui sera la trace horizontale de la surface, fournira le point (G, G′) du méridien : et quoique cette courbe doive évidemment s'étendre d'une manière illimitée, puisque la droite génératrice a elle-même une longueur indéfinie, néanmoins, pour donner une idée plus nette de la surface, nous admettrons que la droite mobile est terminée aux deux points (A, A′) et (B, Ɓ), également distants du point (D, D′) qui décrit le cercle de gorge; de sorte que la portion de surface que nous considérerons ici, sera terminée à deux cercles égaux projetés horizontalement sur GAH, et verticalement sur G′H′ et G″H″. Au reste, nous avons démontré (n° **140**) que le méridien G′F′G″ était une branche d'hyperbole qui avait pour axe réel le diamètre E′F′ du cercle de gorge; et l'on devra observer qu'ici, *comme dans toute surface de révolution*, le méridien principal G′F′G″ forme précisément le contour apparent de la surface par rapport au plan vertical, puisque tous les plans tangents le long de ce méridien lui sont perpendiculaires (n° **129**). Par une raison semblable, le contour apparent de l'hyperboloïde relativement au plan horizontal, est le cercle de gorge DFE le long duquel tous les plans tangents sont évidemment verticaux.

149. Pour compléter la représentation graphique de cet hyperboloïde, d'après le mode de génération par une ligne droite, il faut construire un certain nombre de positions de cette génératrice rectiligne. Or, puisqu'elle doit rester à une distance constante de l'axe (O, O′Z′), sa projection horizontale sera toujours tangente au cercle DFE; menons donc à volonté la tangente $A_2D_2B_2$, puis projetons le pied A_2 sur la ligne de terre en A'_2, et le point de contact D_2 sur E′F′ en D'_2; alors nous obtiendrons $A'_2D'_2Ɓ_2$ pour la projection verticale de la droite qui était projetée horizontalement suivant A_2B_2 : d'ailleurs, l'extrémité $Ɓ_2$ qui est sur le cercle supérieur G″H″, devra évidemment se trouver projetée en B_2, ce qui offrira une vérification. Les autres positions de la génératrice se construiront d'une manière analogue, et leurs projections verticales devront encore *toucher* l'hyperbole méridienne, ainsi que nous l'avons démontré au numéro précédent pour la première droite ADB; seulement, il faut observer que quand on choisira la projection horizontale parallèle à la ligne de terre, comme KL, la projection verticale correspondante Q′Ɓ sera *l'asymptote* de l'hyperbole, puisqu'en effet une pareille génératrice ne rencontrera plus le plan méridien OG qu'à une distance infinie, sans cesser d'être, en projection verticale, tangente à l'hyperbole méridienne. Fig. 46.

150. Pour obtenir des résultats plus symétriques, on a, dans l'épure actuelle, divisé le cercle GAH en quatorze parties égales, et tracé d'abord les cordes

AB, A_2B_2, A_3B_3,..... de manière à soutendre un même nombre d'arcs partiels; par-là ces cordes, nécessairement égales, se sont trouvées tangentes à un même cercle EDF, puis on en a déduit les projections verticales, comme nous l'avons dit au numéro précédent. D'ailleurs, quoique ces cordes aboutissent deux à deux aux mêmes points de division sur le cercle GAH, on distinguera aisément les parties situées au-dessous du cercle de gorge d'avec les parties supérieures, puisque les premières étant invisibles sur le plan horizontal, sont ici représentées par des *lignes ponctuées.* Quant au plan vertical, les portions de génératrices situées au-delà du plan méridien GOH qui renferme le contour apparent de la surface (n° **148**) par rapport à ce plan de projection, sont les seules qui deviennent invisibles et qui aient dû être *ponctuées.*

151. On sait (n° **141**) que l'hyperboloïde admet un autre système de génératrices rectilignes, projetées également sur les tangentes au cercle de gorge AB, A_2B_2,....., mais qui ont dans l'espace une position inverse par rapport à la verticale. Par exemple, celle de ces nouvelles droites qui serait projetée suivant BDA (*), aurait son pied en (B, B′) et son extrémité supérieure en (A, α), tandis qu'elle couperait la droite ADB du premier système au point (D, D′); ainsi elle aurait pour projection verticale B′D′α, ligne qui a déjà reçu la projection d'une droite LMC du premier système. C'est pour éviter cette coïncidence que nous n'avons pas voulu représenter, sur l'épure, les génératrices des deux systèmes à la fois; car autrement, les parties pleines des unes tombant sur les parties ponctuées des autres, il n'aurait plus été possible de distinguer les portions visibles ou invisibles dans chacun des systèmes. Au surplus, il sera toujours facile, même sur l'épure actuelle, de retrouver les droites du système B quand on en aura besoin, puisqu'il suffira de prendre les portions pleines pour les parties ponctuées, et réciproquement, comme nous venons de l'indiquer pour la droite BDA. On pourra aussi multiplier davantage les génératrices, afin d'obtenir plus *d'effet* dans le dessin; mais nous avons cru devoir ici sacrifier quelque chose sous ce dernier rapport, afin d'offrir plus de netteté dans la position des points et des lignes remarquables qu'il fallait signaler au lecteur.

FIG. 46. **152.** *Du plan tangent à l'hyperboloïde.* Soit R la projection horizontale du

(*) Pour indiquer plus clairement la situation des diverses droites, nous aurons toujours soin de citer en premier lieu, la lettre qui désignera l'extrémité *inférieure* de la droite dont nous parlerons.

point de contact, assignée par la question : pour obtenir l'autre projection, j'observe que par le point considéré sur la surface, il passe une génératrice du système A, laquelle est projetée horizontalement suivant une tangente PRA au cercle de gorge, et verticalement suivant P'α; si donc je projette R en R' sur cette dernière droite, j'aurai déterminé complétement le point de contact (R, R'). Mais il y a une seconde solution ; car, puisque je peux mener de R une autre tangente BRQ au cercle de gorge, laquelle représentera aussi une génératrice du système A projetée verticalement suivant B'Q'', je n'aurai qu'à projeter R en R'' sur cette dernière ligne, et j'obtiendrai un second point (R, R'') qui sera situé sur l'hyperboloïde, et qui aura pareillement sa projection horizontale en R.

153. Cela posé, considérons le point (R, R'), et rappelons-nous (n° 142) qu'il doit passer par ce point unique deux génératrices de l'hyperboloïde : l'une est la droite (PRA, P'R'α) déjà employée et qui appartient au système A; l'autre appartient au système B et serait projetée sur (QRB, Q'R'6). Donc le plan tangent en (R, R') devra renfermer ces deux droites, et par suite la trace horizontale de ce plan sera QPS. Pour déterminer l'autre trace SV', il suffira d'imaginer dans ce plan tangent et par le point (R, R'), une horizontale dont les projections seront RV parallèle à la trace QPS, et R'V' parallèle à la ligne de terre ; puis, on construira le point (V, V') où cette horizontale va percer le plan vertical.

Quant au plan tangent relatif au point (R, R''), il se trouvera déterminé par les deux droites de systèmes opposés, qui se coupent en cet endroit :

L'une est (BRQ, B'R''Q'') pour le système A,
L'autre est (ARP, (A'R''P'') pour le système B.

Ainsi la trace horizontale de ce plan sera la ligne AB, et la trace verticale s'obtiendrait, comme ci-dessus, par le secours d'une horizontale menée dans ce même plan à partir du point (R, R'').

154. Revenons au plan tangent PSV' qui touche l'hyperboloïde au point (R, R'), et remarquons que sa trace horizontale PQ se trouve bien perpendiculaire au plan méridien OR qui passerait par le point de contact, ainsi que cela doit arriver (n° 134) dans toute surface de révolution dont l'axe est vertical : mais ce plan tangent PSV' n'est pas tangent à l'hyperboloïde dans tout autre point, tel que (T, T'), de la droite (PRA, P'R'α) qu'il renferme, puisque sa trace horizontale PQ ne saurait être perpendiculaire au méridien OT. Fig. 46.

D'ailleurs, par ce point (T, T') de la droite (PRA, P'R'α) qui appartient au système A, il passe une génératrice (HTB_2, $H'T'\beta_2$) du système B, laquelle est évidemment située *hors du plan* dont nous parlons, puisque le pied de cette génératrice est en H hors de la direction de PQ. Par conséquent le plan PSV' ne satisfait pas, pour le point (T, T'), à la définition du véritable contact, qui consiste à renfermer les tangentes à toutes les lignes situées sur la surface; tandis qu'au point (R, R') ce plan contient non-seulement les deux génératrices qui s'y coupent, mais aussi la tangente du parallèle qui est précisément (RV, R'V'), la tangente du méridien, et celle de toute autre courbe tracée par ce point sur l'hyperboloïde.

Nous avions déjà prouvé cette propriété singulière du plan tangent à l'hyperboloïde gauche dans le nº **142**; mais nous avons cru devoir insister sur cette circonstance et l'appuyer ici par de nouvelles considérations, parce qu'il importe de se former une idée bien nette de la position d'un plan qui est ainsi *tangent dans un point* (R, R'), et *sécant dans tous les autres points* communs avec la surface, qu'il coupe ici suivant les deux droites (PRA, P'R'α) et (QRB, Q'R'β).

155. Tous les problèmes relatifs aux plans tangents, que nous avons résolus dans ce livre, portaient sur des surfaces *cylindriques*, *coniques*, ou *de révolution*. Nous n'en ajouterons pas maintenant de nouveaux exemples, pour d'autres genres de surfaces, parce que la méthode se réduit dans tous les cas à employer le procédé général indiqué nº **103**, et que nous rencontrerons dans la suite assez d'occasions de l'appliquer; mais il resterait à traiter la question du plan tangent, *lorsque le point de contact n'est pas assigné* sur la surface. Nous l'avons fait de suite à l'égard des cylindres et des cônes, parce qu'alors la solution était trop simple pour la différer; quant aux autres surfaces, il n'en est pas de même, et l'on a besoin quelquefois de s'aider des méthodes relatives aux intersections de surfaces; c'est pourquoi nous renverrons les problèmes de ce genre à un des livres suivants.

LIVRE III.

DES SURFACES DÉVELOPPABLES ET DES ENVELOPPES.

CHAPITRE PREMIER.

Des surfaces développables.

156. Une surface est dite DÉVELOPPABLE, lorsque étant supposée flexible, mais inextensible, *elle peut être étendue sur un plan, sans éprouver aucun changement dans sa superficie.* Or on sent bien que toute surface, par exemple une portion quelconque de sphère, ne jouit pas de cette propriété; c'est pourquoi il devra y avoir, dans le mode de génération d'une surface développable, quelque condition particulière qui lui permette de snbir cette transformation, et c'est ce que nous expliquerons bientôt (n° 175). Mais, avant de nous élever à ces généralités, il nous parait utile d'examiner d'abord deux genres particuliers de surfaces qui peuvent ainsi être *développées* sur un plan; ce sont les cylindres et les cônes. D'ailleurs, le moment est venu d'introduire ici les considérations de la méthode infinitésimale qui, bien entendne, présentera toute la rigueur désirable, et offrira dans la suite le double avantage d'abréger les raisonnements et de se prêter avec facilité aux opérations graphiques de la Géométrie descriptive.

157. La tangente d'une courbe étant la limite des positions que prend une sécante, lorsque deux de ses points de section se rapprochent indéfiniment, on peut considérer la tangente comme une droite qui passe par deux points *infiniment voisins* sur la courbe, ou qui a un *élément* de commun avec elle; par-là on substitue, il est vrai, à la courbe proposée, un polygone inscrit dont les côtés et les angles extérieurs sont infiniment petits, et dont chaque côté prolongé remplace une tangente; mais toute propriété qui, dans un tel polygone, sera vraie indépendamment de la grandeur absolue de ses côtés et des angles compris, subsistera également lorsqu'on multipliera de plus en plus ces petites cordes en les rapprochant de la courbe; par conséquent cette propriété aura

lieu pareillement quand on passera à la limite, c'est-à-dire quand on considérera la courbe en question et ses véritables tangentes.

158. D'ailleurs, nous avons démontré rigoureusement (n° **95**) que, dans toute surface, les diverses courbes tracées par un même point, avaient leurs tangentes en ce point situées dans un plan unique; donc ce plan que nous avons nommé *tangent*, pourra être considéré comme ayant de commun avec la surface un *élément superficiel* formé par l'ensemble des *éléments linéaires* communs aux courbes et à leurs tangentes; ce sera l'élément de contact, qui se trouvera en général *infiniment petit dans tous les sens*, à moins que la surface ne soit d'un genre tel que le plan tangent se trouve le même pour plusieurs points consécutifs.

Fig. 48. **159.** Dans un cylindre, par exemple, nous savons (n° **99**) que le plan BAT est tangent tout le long d'une même génératrice AMB; donc ici ce plan aura de commun avec la surface un *élément superficiel* ABB'A' indéfini en longueur, mais compris entre les deux génératrices infiniment voisines qui passent par les points A et A' communs à la base AC et à sa tangente AT. On voit que nous distinguons ici, comme dans la note du n° **109**, *l'élément* de la surface d'avec *la génératrice;* et cela est essentiel : car, dans les surfaces gauches, nous reconnaîtrons que cette dernière droite sera commune aussi à la surface et au plan tangent, tandis que l'élément superficiel indéfini en longueur ne se trouvera pas tout entier dans ce plan.

De même, une surface conique qui est touchée par son plan tangent tout le long d'une génératrice (n° **100**), aura de commun avec ce plan un élément superficiel indéfini en longueur, mais compris entre deux génératrices infiniment voisines.

Fig. 48. **160.** Une surface cylindrique est toujours développable; car imaginons qu'elle a été coupée par un plan perpendiculaire à ses génératrices, suivant une courbe CA qui se nomme la *section droite* (*) ou *section orthogonale* du cylindre, et que nous regarderons comme sa base, ou comme la directrice de la droite mobile qui a engendré cette surface : puis, substituons pour un mo-

---

(*) Nous appellerons souvent, pour abréger, *cylindre droit*, celui dans lequel on prendra pour base ou pour directrice la section droite, sans vouloir exprimer par-là que cette section est un cercle; du reste, cette dénomination n'indiquera rien de particulier dans la nature du cylindre, puisqu'on sent bien que toute surface cylindrique peut être ramenée à ce cas en la coupant, comme ici, par un plan perpendiculaire à ses génératrices.

ment à cette courbe un polygone inscrit CAA′A″, ce qui transformera le cylindre en un prisme droit. Alors nous pourrons faire tourner la face B″A″A′B′ autour de l'arête B′A′ comme charnière, jusqu'à ce qu'elle vienne se placer dans le plan de la face B′A′AB; et par-là le côté A′A″, transporté en A′a″, se trouvera situé sur le prolongement de AA′, puisqu'ils continueront d'être tous les deux perpendiculaires à l'arête A′B′. Ensuite, on pourra faire tourner la face composée BAa″ b″ autour de la charnière AB, jusqu'à ce qu'elle arrive dans le plan de la face suivante; et en continuant ainsi, on amènera toutes les faces du prisme à être situées dans un plan unique, à la suite les unes des autres, de sorte que la surface prismatique se trouvera *développée*, sans avoir changé de superficie. En outre, observons bien que tous les côtés du polygone CAA′A″ formeront, après le développement, une seule et même *ligne droite* à laquelle toutes les arêtes du prisme continueront d'être perpendiculaires, ainsi que nous l'avons prouvé pour les deux premiers côtés AA′ et A′A″; et que la longueur de cette droite sera égale à la somme des côtés du polygone primitif, tandis que les diverses arêtes AB, A′B′,.... auront conservé les longueurs qu'elles avaient auparavant. Fig. 49.

161. Or il est bien évident que toutes ces conséquences seront également vraies, quelle que soit la grandeur des angles et des côtés du polygone que l'on a substitué à la courbe CAA′; par conséquent elles auront lieu aussi dans un cylindre qui est la limite des prismes inscrits, ou si l'on veut exprimer différemment la même idée, dans un cylindre qui n'est autre chose qu'un prisme dont la base serait un *polygone infinitésimal*. On peut donc affirmer, 1° que toute surface cylindrique est développable; 2° qu'après cette transformation, *la section orthogonale* ou perpendiculaire aux génératrices, *devient une droite* dont la longueur égale le périmètre de cette section; 3° que *les génératrices restent perpendiculaires à cette droite*, en conservant d'ailleurs leurs longueurs primitives soit au-dessus, soit au-dessous de cette base. Fig. 48.

162. S'il existait sur le cylindre une courbe quelconque GMM′, elle se trouverait remplacée, sur le prisme, par un polygone GMM′M″ dont les côtés ne changeraient pas de longueur, lorsqu'ils seraient entraînés avec les faces du prisme, dans leurs mouvements de rotation autour des arêtes successives; mais ce polygone changerait de forme, puisque l'angle intérieur MM′M″ (*) devien- Fig. 49.

(*) Le supplément de cet angle, savoir M″M′t, lequel serait compris entre deux tangentes consécutives, se nomme *angle de contingence*, et peut servir à apprécier la *courbure* de la courbe en cet endroit, comme nous l'expliquerons bientôt (nº 198).

drait MM'm''. Toutefois, comme dans ce développement le côté M'M'' tournera par un mouvement de révolution autour de la charnière B'M', il s'ensuit que l'angle B'M'M'' demeurera constant et égal à B'M'm'' : il en sera de même de l'angle BMM' ou TMA qui restera invariable, et dont un côté TMM' deviendra, à la limite, la tangente de la courbe que remplace actuellement le polygone GMM'. Si d'ailleurs on observe que toutes ces propriétés sont indépendantes de la petitesse plus ou moins grande des faces du prisme, et qu'ainsi elles doivent encore être vraies pour la limite de ce prisme, ou pour le cylindre de la *fig.* 48, on en déduira les conséquences suivantes :

FIG. 48. 1°. Quand on développe un cylindre sur lequel est tracée une courbe quelconque GM, cette ligne se change en une autre courbe que nous appellerons *la transformée* de la première, et dont les arcs ont *la même longueur absolue* que ceux de la courbe primitive ;

2°. Les portions de génératrices MA, M'A',...., comprises entre cette courbe et la section orthogonale CAA', *restent de même grandeur*, et toujours *perpendiculaires à la droite* suivant laquelle se transforme la base CAA'.

3°. Chaque tangente MT à la courbe primitive forme, avec la génératrice MA, *un angle qui demeure invariable ;* et d'ailleurs *cette droite* MT *se retrouve*, après le développement, *tangente à la transformée*. Cette dernière assertion se justifie en observant que, sur le développement du prisme, la ligne MT ne cesse pas d'être le prolongement d'un côté du polygone transformé. Nous verrons bientôt, dans plusieurs épures, la manière dont on fait usage de ces diverses propriétés pour exécuter graphiquement le développement d'un cylindre, et pour y construire les transformées des courbes primitivement tracées sur ce corps.

163. Nous avons dit qu'une courbe quelconque GMM' tracée sur un cylindre, se changeait, après le développement de cette surface, en une autre ligne qui généralement était encore courbe ; cependant il y a des cas particuliers où cette transformée peut être *rectiligne*, et pour trouver plus facilement les conditions qui s'y rapportent, substituons encore au cylindre et à la courbe le prisme droit et le polygone GMM' de la *fig.* 49. Alors, pour que le côté

FIG. 49. M'M'', transporté en M'm'', se trouve sur le prolongement de MM', il faut et il suffit évidemment que l'on ait

$$\textit{angle}\ B'M'm'' = A'M'M = BMM' ;$$

et puisque nous avons vu (n° 162) que le premier de ces angles demeurait égal à

l'angle primitif B'M'M", la condition précédente revient à celle-ci :

$$\text{angle } B'M'M'' = BMM' ;$$

comme il en serait de même des autres côtés consécutifs comparés entre eux, on en conclut que tous les côtés du polygone GMM'M" doivent couper les arêtes du prisme sous un angle constant. Maintenant, si l'on transporte au cylindre ces relations qui devaient toujours avoir lieu sur le prisme, quelque petites que fussent ces faces, et si l'on se rappelle (n° **157**) que les prolongements des côtés du polygone deviennent, à la limite, les tangentes de la courbe continue vers laquelle converge ce polygone, on en déduira ce théorème : *pour qu'une courbe* GM, *tracée sur un cylindre, devienne* RECTILIGNE *après le développement de cette surface, il faut et il suffit que toutes les tangentes de cette courbe fassent un angle constant avec les génératrices du cylindre.* Les courbes qui satisfont à cette dernière condition, se nomment des HÉLICES, quelle que soit la base du cylindre sur lequel elles sont tracées : ainsi les hélices sont les seules courbes qui deviennent rectilignes, par le développement de la surface cylindrique qui les contient.

164. Elles jouissent d'ailleurs de cette autre propriété bien remarquable : *un arc quelconque d'hélice* GM *est la ligne la plus courte que l'on puisse tracer sur le cylindre, entre ses extrémités* G et M. En effet, si on lui compare une autre courbe comprise entre les points G et M, ce dernier arc ne deviendra pas rectiligne quand on aura développé le cylindre; donc alors il sera plus long que l'arc d'hélice qui sera devenu une droite : mais nous avons vu (n° **162**) que, dans ce développement, les *transformées* conservaient la même longueur que les courbes primitives; donc aussi, avant le développement du cylindre, l'arc d'hélice était plus court que toute autre ligne passant par les points G et M. Fig. 48.

165. Il importe d'observer ici que toutes les courbes qui deviennent rectilignes après que le cylindre est développé, étaient primitivement *à double courbure*, c'est-à-dire que trois tangentes infiniment voisines, ou trois éléments consécutifs, n'étaient pas dans un même plan. En effet, revenons au polygone de la *fig.* 49, et considérons-y trois côtés consécutifs KM, MM', M'M", que nous supposerons dirigés de manière à former, avec les arêtes du prisme, des angles égaux entre eux et désignés par α. Si ces trois côtés pouvaient être dans un plan unique, il en serait certainement de même pour trois droites menées par un point quelconque G, parallèlement à ces côtés : or ces trois parallèles, formant aussi chacune un même angle α avec l'arête GD, se trouveront situées sur la sur-

face d'un cône droit dont GD sera l'axe, et l'on sent bien qu'une telle surface ne saurait avoir trois de ses génératrices dans un même plan, puisque alors trois points de la circonférence qui lui sert de base seraient en ligne droite. Donc il est pareillement impossible que les trois côtés consécutifs KM, MM', M'M", se trouvent dans un même plan; et cette proposition ayant lieu quelle que soit la petitesse de ces côtés, demeure également vraie pour leur prolongements, lorsque le polygone dégénère en une courbe continue, auquel cas ces prolongements sont les tangentes mêmes de cette courbe. Ainsi *les hélices sont toujours des lignes à double courbure.*

166. Il faut seulement excepter de cette conclusion générale, un cas unique qui est celui où l'angle α se trouve droit; car alors le cône qui nous a servi tout à l'heure à établir la proposition précédente, se réduit lui-même à un plan. D'ailleurs, l'hélice particulière qui répond à l'hypothèse actuelle $\alpha = 90°$, n'est autre chose évidemment que la *section droite* CAA'; et nous savons en effet (n° **161**) que cette section devient rectiligne après le développement du cylindre; mais du moins nous pouvons affirmer que *de toutes les courbes* PLANES *tracées sur un cylindre, il n'y a que la* SECTION ORTHOGONALE *qui devienne rectiligne après le développement de cette surface.*

Fig. 49. **167.** A l'occasion des hélices qui, comme nous l'avons reconnu, ne sont pas des courbes planes, nous ferons observer que dans toute courbe *gauche* (n° **7**, *note*) telle que GKM, située d'une manière quelconque dans l'espace, si trois éléments voisins KM, MM', M'M" ne sont pas dans un même plan, du moins cette condition sera toujours remplie pour deux éléments consécutifs MM' et M'M"; et le plan MM'M" se nomme *le plan osculateur* de la courbe au point M. Pour le point K, au contraire, le plan osculateur serait KMM', et ainsi de suite; de sorte que les divers plans osculateurs se coupent deux à deux suivant un élément intermédiaire, et ils ne coïncident tous ensemble qu'autant que la courbe est plane. D'ailleurs, par les considérations exposées plus haut, cela revient évidemment à définir *le plan osculateur* comme celui *qui passe par deux tangentes infiniment voisines.*

168. Observons encore qu'une ligne courbe continue, plane ou non, n'a jamais qu'une tangente unique en un point donné; mais elle admet évidemment une infinité de normales, c'est-à-dire de droites perpendiculaires à la tangente, et menées par le point de contact de celle-ci : or toutes ces normales forment nécessairement un plan perpendiculaire à la tangente, et que l'on appelle *le plan normal* de la courbe au point en question. C'est précisément le contraire de ce qui arrive pour une surface, laquelle admet, en chacun de ses points, une

infinité de tangentes formant le plan tangent, et une normale unique perpendiculaire à ce plan.

169. Une surface conique est toujours développable. Sans passer ici par toutes les considérations intermédiaires que nous avons cru devoir employer pour le cylindre, regardons immédiatement la base du cône, quelle qu'elle soit, comme un polygone *infinitésimal* CAA'A'', et ce cône lui-même comme une pyramide dont chaque face SAA' sera un *élément superficiel* infiniment étroit, qui se trouvera commun (n° **159**) à la surface et à son plan tangent le long de la génératrice SA. Alors on pourra faire tourner la face SA'A'' autour de l'arête SA', jusqu'à ce qu'elle vienne se placer dans le plan de la face SA'A, et à la suite de celle-ci; puis, faire tourner le système de ces deux faces autour de l'arête SA, et les amener dans le plan de la face précédente. En continuant de la sorte, on obtiendra un secteur polygonal (*) composé de toutes les faces de la pyramide, mises à côté les unes des autres dans un même plan, et dont par conséquent la superficie égalera l'aire de cette pyramide; d'ailleurs il est évident que, dans cette transformation, les côtés et les angles des faces SA'A'', SAA',... resteront invariables, ainsi que ceux des triangles quelconques SM'M'', SMM',..., tandis que les angles AA'A'', MM'M'' changeront de grandeur; et comme ces diverses circonstances sont également vraies, quelle que soit la petitesse des faces de la pyramide, elles subsisteront donc pareillement pour la limite de ce corps, c'est-à-dire pour un cône sur lequel les polygones CAA'A'' et GMM'M'' deviendront des courbes continues, dont les tangentes seront les prolongements des éléments AA' et MM'. Fig. 50.

170. De là résultent évidemment les conséquences suivantes : 1° *toute surface conique est développable*, et dans cette transformation, *les génératrices* ou des portions quelconques de ces droites, *ne changent pas de longueur*.

2°. La base du cône, ou toute autre courbe tracée sur sa surface, devient une ligne dont la courbure n'est plus la même que celle de la courbe primitive, et qu'on nomme *la transformée* de la première; mais *les arcs* de cette transformée *conservent la même longueur* absolue que ceux de la courbe primitive. Si cette dernière avait d'abord tous ses points à une distance constante du sommet, la transformée serait *un arc de cercle* décrit avec cette distance pour rayon.

3°. *Chaque tangente* de la courbe primitive forme avec la génératrice du cône,

(*) Ou plutôt, le système de deux secteurs opposés par le sommet, si l'on développe en même temps la pyramide supérieure SBB'B'' qui remplace la deuxième nappe du cône.

un angle qui reste *invariable* dans le développement de cette surface; et cette première droite redevient *tangente à la transformée*. Nous verrons plus loin de quelle manière on emploie ces diverses propriétés, pour exécuter graphiquement le développement d'une surface conique.

171. Pour qu'une courbe GMM′, tracée sur un cône, devienne *rectiligne* après le développement de la surface, il faut évidemment et il suffit que deux éléments consécutifs MM′, M′M″, soient dirigés de manière que

$$\text{angle } SM'M'' = SM't;$$

et comme les prolongements de ces éléments sont les tangentes de la courbe primitive, cela revient à dire que *deux tangentes consécutives* de cette courbe *doivent former des angles égaux avec la génératrice intermédiaire* : mais ces angles ne sont plus constants pour toutes les tangentes, ainsi qu'il arrivait dans le cas du cylindre (n° **163**).

Fig. 50. **172.** Toute courbe qui vérifiera la condition précédente, jouira aussi de la propriété d'être *la ligne la plus courte* que l'on puisse tracer entre deux de ses points, sur la surface conique; et cela, par les mêmes raisons qui ont été données dans le n° **164** : mais cette courbe ne présentera pas la forme d'une spirale qui s'élèverait de plus en plus vers le sommet S du cône. En effet, l'angle SMM′ sera moindre que SM′M″, puisque ce dernier égalera SM′t; ainsi, l'inclinaison SMt de chaque tangente sur la génératrice correspondante, étant d'abord un angle aigu qui va toujours en augmentant, la distance SM deviendra minimum lorsque cet angle sera droit, et alors on obtiendra le point de la courbe le plus rapproché du sommet S; puis au-delà, cette courbe s'en éloignera de plus en plus, puisque l'angle SMt deviendra obtus, et continuera de croître. Ainsi, sur un cône de révolution, par exemple, la ligne la plus courte entre deux points de la base circulaire, n'est pas l'arc de ce cercle compris entre ces deux points; mais c'est une espèce de courbe *hyperbolique* dont le sommet se trouve à égale distance des deux points en question, et qui, après le développement du cône, deviendrait une corde du *cercle* dans lequel la base primitive serait *transformée*. Les deux rayons parallèles à cette corde étaient, sur le cône primitif, les génératrices *asymptotes* de la courbe en question.

173. Au contraire, une courbe qui, sur une surface conique quelconque, jouirait d'une propriété analogue à celle de l'hélice (n° **163**), c'est-à-dire dont *chaque tangente ferait un angle constant avec la génératrice* passant par le point de contact, présenterait la forme d'une spirale qui s'approcherait indéfiniment

du sommet, lequel serait à son égard *un point asymptotique* : puis, dans le développement, cette courbe deviendrait évidemment une *spirale logarithmique*, car on sait que cette dernière a la propriété de couper tous ses rayons vecteurs sous un angle constant.

Si cet angle était droit, la transformée serait un cercle; et alors tous les rayons vecteurs étant égaux, la courbe primitive tracée sur le cône ne pourrait être qu'une *courbe sphérique*, c'est-à-dire qui résulterait de l'intersection du cône proposé avec une sphère ayant pour centre le sommet. (*Voyez* n° **319**.)

174. Surfaces développables quelconques. Généralisons maintenant les considérations que nous avons employées pour les cônes et les cylindres, et imaginons qu'une surface soit engendrée par *une droite qui se meut de telle sorte que toujours deux positions consécutives*, ou infiniment voisines, *se trouvent dans un même plan*. Nous indiquerons bientôt (n° **180**) divers modes de satisfaire à cette condition; mais, pour l'instant, il nous suffira d'admettre qu'elle a été remplie d'une manière quelconque, et que AB, A'B', A''B'',.... sont des positions infiniment voisines de la droite mobile. Alors, d'après la définition de la surface, les deux génératrices consécutives AB et A'B' se couperont nécessairement (*) en un certain point M'; de même la génératrice A'B' sera rencontrée par A''B'' en un point M'', et celle-ci le sera par la suivante en un point M''', etc.; de sorte que ces intersections successives donneront lieu à un polygone MM'M''M'''.....; ou plutôt, puisqu'on suppose les génératrices infiniment rapprochées, cela formera une courbe continue VMM'M''U à laquelle toutes ces droites seront évidemment tangentes, et qui se nomme *l'arête de rebroussement* de la surface, par une raison que nous expliquerons bientôt (n° **178**). Fig. 51.

175. Cela posé, je dis que la surface engendrée d'après la loi précédente, est *développable*. En effet, puisque les deux génératrices consécutives AMB et A'M'B' sont dans un même plan, elles comprennent entre elles une zone angulaire de la surface, infiniment étroite, mais indéfinie en longueur, et qui est nécessairement *plane*; car, pour les diverses courbes tracées sur la surface, les éléments linéaires AA', PP',.... ayant deux points de communs avec les droites AM et A'M', se trouvent tous dans le plan de ces deux génératrices. De même, les génératrices A'M'B' et A''M''B'' comprennent un autre *élément superficiel* qui est *plan* et *d'une longueur indéfinie*; et ainsi des autres. Alors, si l'on fait Fig. 51.

(*) Elles pourraient être parallèles; mais en considérant alors leur point de section comme situé à l'infini, on retrouvera toujours ce cas particulier dans l'espèce générale.

tourner le premier élément autour de la droite A'M'B' comme charnière, jusqu'à ce qu'il vienne dans le plan et à la suite du deuxième élément; puis, que l'on rabatte autour de A"B" le système de ces deux éléments sur le plan du troisième, on finira, en continuant ainsi, par dérouler sur un plan unique toute la surface proposée, sans discontinuité et sans altérer sa superficie. D'ailleurs il est bien évident, 1° que par cette transformation, on n'aura nullement changé les longueurs des portions de génératrices MA, M'A',..., non plus que celles des arcs AA', A'A",....; 2° que les angles MAA' ou MAT, MA'A" ou MA'T',.... formés par les génératrices avec les tangentes d'une courbe quelconque AD tracée sur la surface, resteront aussi *invariables*; 3° qu'au contraire les *angles de contingence* tels que TA'T', ou leurs suppléments comme AA'A", changeront de grandeur, et qu'ainsi la courbe AD aura pour *transformée* une ligne dont la courbure ne sera plus la même que primitivement. Par-là il demeure donc prouvé que toute surface qui satisfera à la condition du n° **174**, sera développable.

176. Réciproquement, cette condition est nécessaire; car, pour qu'une surface puisse être étendue sur un plan sans déchirure ni duplicature, il faut évidemment qu'elle se compose d'éléments superficiels plans, qui soient réunis seulement *deux à deux* par des bords rectilignes indéfinis, afin que ces droites puissent servir de charnières pour faire tourner ces éléments superficiels, et les amener dans un plan unique à la suite les uns des autres. Tandis que, si la droite intersection de deux éléments contigus était limitée par la rencontre d'un autre élément, il existerait en cet endroit un angle trièdre ou polyèdre, dont les faces ne pourraient être étendues sur un plan, sans laisser entre elles des interstices; et comme cette circonstance se répéterait pour chaque point où se réuniraient plus de deux éléments superficiels, il n'y aurait plus de continuité dans le développement de la surface, et la superficie en serait altérée.

177. Il résulte immédiatement de là que *le plan qui touche une surface développable* dans un point quelconque P, *est tangent tout le long de la génératrice* APMB qui passe par ce point. En effet, puisque (n° **175**) toutes les courbes AD, PX, BC,.... ont leurs éléments linéaires AA', PP', BB',.... situés dans le plan des deux droites infiniment voisines AM'B, A'M'B', il s'ensuit que ce plan renferme toutes les tangentes en A, P, B,..., et par conséquent c'est bien un seul et même plan AM'A' ou BAT, qui touche la surface développable tout le long de la génératrice AMB. Ainsi, dorénavant, quand on voudra construire le plan tangent relatif à un point Q donné sur une telle surface, il suffira de

le faire passer *par la génératrice* AQB *et par la tangente* AT *à une courbe tracée sur cette surface par un point quelconque de* AB.

Cette proposition que nous avions déjà démontrée (nos **99-100**) pour les cylindres et pour les cônes, est donc commune à toutes les surfaces développables; et elle mérite d'autant plus d'attention, qu'elle ne se vérifiera pas dans les *surfaces gauches*, quoique celles-ci admettent pareillement des génératrices rectilignes. D'ailleurs, elle va nous servir bientôt à indiquer un nouveau mode de génération des surfaces développables, en les regardant comme des *enveloppes* d'un plan mobile (n° **183**).

Observons aussi que le plan AM'A' ou BAT qui est tangent à la surface développable, coïncide précisément avec *le plan osculateur* de l'arête de rebroussement VMU, puisque les deux génératrices AM' et A'M' sont tangentes à cette courbe.

178. Nous avons dit que la courbe VMU formée par les intersections successives des génératrices, se nommait *l'arête de rebroussement* de la surface développable; et pour sentir la justesse de cette dénomination, il n'y a qu'à regarder chaque génératrice AB comme composée de deux parties MA et MB, l'une située au-dessous et l'autre au-dessus du point de contact M; puis, désigner sous le nom de *nappe inférieure* la portion de surface engendrée par les parties MA, M'A', M''A'',.... tandis que les parties MB, M'B', M''B'',.... formeront la *nappe supérieure* (*). Alors, si l'on veut passer d'une nappe à l'autre, en cheminant sur la surface d'une manière continue et dans une direction quelconque (excepté dans la direction d'une génératrice), on s'apercevra aisément que ce passage ne peut avoir lieu qu'en suivant une courbe 6Nα, qui présentera *un point de rebroussement* à l'endroit où elle rencontrera la ligne VMU. Fig. 51.

Comme cette circonstance est très-importante à remarquer, essayons de la rendre plus sensible, en projetant toute la figure sur un plan horizontal quelconque; soient donc *vnu* (*fig.* 52) la base du cylindre vertical qui passe par la courbe VNU, et *ab*, *a'b'*,... les projections des génératrices, lesquelles seront nécessairement tangentes à *vnu*. Il s'ensuit déjà qu'aucune de ces droites ne pénétrera dans le cylindre vertical *vnu*, et qu'ainsi les deux nappes de la surface Fig. 51 et 52.

(*) Ces parties de génératrice se prolongeraient indéfiniment; mais, pour rendre plus sensible la forme opposée des deux nappes, nous supposons ici que ces droites se terminent à deux plans horizontaux qui coupent la surface suivant les courbes AD et BC, dont la première tourne sa convexité, et la seconde sa concavité vers l'observateur.

développable restent en dehors de ce cylindre, sur lequel elles viennent s'appuyer le long de la courbe VNU. D'ailleurs, si l'on regarde ce cylindre comme un corps solide, et la génératrice projetée sur ab comme une droite *inflexible* qui roule, *sans glisser*, sur ce cylindre en demeurant tangente à la courbe VNU, il est évident que cette droite mobile parcourra la surface développable en question. Or, dans ce mouvement, on aperçoit bien qu'un point quelconque $\mathfrak{S}$, fixement attaché à la partie supérieure mb de la génératrice, ira d'abord en se rapprochant du cylindre, et viendra en $\mathfrak{S}'$ quand la génératrice se projettera sur $a'b'$, puis en n, lorsqu'elle sera projetée sur $a''b''$. Mais, au-delà de cette position, le point générateur se trouvera *au-dessous du point de contact* de la génératrice, quand elle continuera de rouler sur le cylindre vertical; de sorte que le point mobile commencera dès lors à s'écarter de plus en plus de ce cylindre, et il viendra en α''' pour la position $a'''b'''$, en α'''' pour $a''''b''''$,.... D'où l'on doit voir clairement que la courbe $\mathfrak{S}\mathfrak{S}'n\alpha'''$ décrite par le point $\mathfrak{S}$, se composera de deux branches qui offriront un rebroussement en n, et dont la première $\mathfrak{S}\mathfrak{S}'n$ sera située sur la nappe supérieure de la surface, tandis que l'autre $n\alpha'''$ sera sur la nappe inférieure. Nous étudierons en détail, au n° **456**, le cas particulier où la courbe VNU est une hélice.

179. En résumant tout ce qui précède, on trouve les conséquences suivantes : 1°. *Pour qu'une surface soit développable, il faut et il suffit qu'elle soit engendrée par une droite qui se meuve de manière que toujours deux positions consécutives se trouvent dans un même plan.* C'est là une propriété caractéristique pour toutes les surfaces de cette classe, laquelle comprend évidemment les deux genres particuliers des *cylindres* et des *cônes;* puisque, dans le premier, les génératrices rectilignes sont toujours parallèles, et que dans le second elles se coupent toutes au même point.

2°. *Une surface développable admet toujours une* ARÊTE DE REBROUSSEMENT *formée par les intersections successives des génératrices;* ces droites sont tangentes à l'arête de rebroussement, qui d'ailleurs divise la surface en deux nappes distinctes. Dans les surfaces coniques, l'arête de rebroussement se réduit à un point unique qui est le sommet; et dans les cylindres, cette arête se trouve transportée tout entière à une distance infinie.

3°. *Le plan tangent* d'une surface développable *est commun* pour tous les points d'une même génératrice rectiligne; et il coïncide avec *le plan osculateur* de l'arête de rebroussement.

4°. Dans le développement de la surface, *les portions des génératrices*, aussi bien que *les arcs d'une courbe quelconque* tracée sur la surface, *ne changent pas*

de longueur absolue; et *les tangentes à cette courbe forment avec les génératrices des angles qui demeurent constants*. Mais il n'en est pas ainsi des angles de *contingence*, compris entre deux de ces tangentes consécutives; et par conséquent cette courbe a pour *transformée* une ligne dont la courbure n'est plus la même qu'auparavant (*).

180. Voyons maintenant de quelle manière on pourra remplir la condition qui a servi (nº **174**) à la définition des surfaces développables. Prenons deux courbes quelconques AD et BC fixes dans l'espace; puis, assujettissons une droite mobile à glisser sur ces directrices, mais de manière que ses positions consécutives se trouvent deux à deux dans un même plan. Après avoir choisi sur la première courbe un point quelconque A', il ne faudra pas le joindre avec un point arbitraire de la deuxième, parce que rien n'assurerait que la droite ainsi tracée, serait dans un même plan avec la position très-voisine qu'elle prendrait ensuite (**); mais imaginons une surface conique qui ait pour sommet le point A' et pour base la courbe BC, et menons-lui un plan tangent qui passe (nº **125**) par la droite A'T' tangente au point A' de la directrice AD; alors, si l'on construit la droite A'B' suivant laquelle ce plan touchera le cône auxiliaire, je dis que A'B' sera la position que doit prendre la génératrice de la surface développable, lorsqu'elle passe par le point A' de la directrice; et les autres positions A''B'', A'''B''',... s'obtiendront d'une manière semblable. Pour justifier cette construction, il suffit d'observer que quand la droite mobile passera de la position A'B' à une position infiniment voisine A''B'', elle pourra être censée glisser sur les tangentes A'A''T' et B'B''S' qui coïncident avec les vraies directrices dans l'intervalle des éléments A'A'' et B'B'' : or ces deux tangentes sont évidemment situées dans un plan unique, qui est le plan tangent que nous avons mené au cône auxiliaire; donc aussi les deux génératrices A'B' et A''B'' se trouveront dans ce même plan. Fig. 51.

181. Il suffirait même d'assigner *une seule directrice* pour déterminer complètement la surface développable, si l'on assujettissait la droite mobile à de- Fig. 51.

(*) On doit excepter néanmoins l'arête de rebroussement, pour laquelle *les angles de contingence* restent *invariables*, puisqu'ici ces angles sont formés par les génératrices entre elles, et que ces droites servent précisément de charnières pour exécuter le développement. Ainsi, par exemple, l'angle AM'A' demeure constant, aussi bien que son supplément MM'M''.

(**) A moins qu'on ne voulût laisser immobile le point de la droite placé en A', et faire glisser seulement l'autre extrémité sur la courbe BC; mais par-là on n'obtiendrait qu'une surface conique, genre trop particulier de surface développable pour que nous nous y arrêtions.

meurer *constamment tangente à cette courbe.* Soit en effet VNU une ligne quelconque, fixe dans l'espace, mais qu'il faut choisir à double courbure, si l'on ne veut pas retomber sur un simple plan. Construisons les tangentes AMB, A'M'B', A''M''B'',.... pour des points M, M', M'',... extrêmement rapprochés sur la courbe; ce seront là autant de positions de la droite mobile, et je dis que la surface, lieu de toutes ces positions, sera *développable.* Car les deux génératrices infiniment voisines AMB et A'M'B' ont de commun avec la courbe, l'une l'élément MM', l'autre l'élément M'M''; donc ces génératrices se coupent au point M', et par conséquent *elles sont bien situées dans un même plan.* Un raisonnement semblable s'appliquerait aux autres génératrices consécutives; ainsi il est certain que la surface, lieu de toutes ces tangentes, est développable; et dans le cas actuel, la courbe directrice VNU est précisément l'arête de rebroussement, qui a toujours pour *plans osculateurs* les plans tangents (n° **177**) de la surface développable.

Voici encore quelques autres manières d'engendrer une surface développable.

Fig. 53. **182.** Si, sur une surface donnée que nous désignerons simplement par S, on trace une courbe fixe et quelconque CND.....; puis, que par des points très-voisins N, N', N'',.... pris sur cette ligne, on mène à la surface les plans tangents P, P', P'',..... qui sont ici figurés seulement par les droites NP, N'P',...., ces plans se couperont consécutivement suivant des droites AM, A'M', A''M'',.. *qui se trouveront deux à deux dans un même plan.* En effet, les deux premières résultant des intersections du plan P' avec le précédent P et avec le suivant P'', sont évidemment situées l'une et l'autre dans le plan P'; de même les droites A'M' et A''M'' sont toutes deux dans le plan P'', et ainsi de suite. D'où il résulte que ces diverses intersections déterminent une série de faces planes et angulaires AMA', A'M'A'', A''M''A''',... qui approcheront de former une surface *continue*, et évidemment développable, d'autant plus exactement que les points de contact N, N', N'',... seront plus voisins sur la courbe CD. Or, pour atteindre à cette limite, il suffit d'imaginer que le plan P roule sur la surface S par un mouvement continu, en lui demeurant perpétuellement tangent le long de la courbe donnée CND; alors on dit que la surface développable en question est *l'enveloppe des positions que prend le plan mobile*, parce qu'en effet *elle est touchée* par ce plan dans chacune de ses positions, puisque celles-ci ne sont autre chose que les prolongements des petits éléments superficiels AMA', A'M'A'',... qui composent la surface.

183. Ceci n'est point particulier à la surface qui nous occupe, et l'on peut

dire généralement que *toute surface développable est l'enveloppe des positions d'un plan mobile* assujetti à se mouvoir suivant *une loi déterminée*. En effet, dans le cas général, nous avons vu (n° **177**) que la surface était touchée tout le long de la génératrice AB, par un plan unique qui renfermait la génératrice infiniment voisine A'B', et qui, par suite, était le prolongement de l'élément superficiel AM'A'; de même, le plan tangent consécutif serait le prolongement de l'élément A'M"A", et ces deux plans se couperaient suivant la droite A'M'B'; de sorte que les diverses génératrices étant les intersections des plans tangents consécutifs, on peut obtenir ces droites, ou bien engendrer la surface développable, en faisant mouvoir un plan indéfini, de manière qu'il prenne successivement les positions AM'A', A'M"A",.... Mais, dans chaque surface particulière, le mouvement du plan mobile devra être réglé par *une loi déterminée*, c'est-à-dire par des conditions telles que ce plan ne puisse prendre qu'une position unique, pour chaque point de l'espace par lequel il passera. Fig. 51.

184. Ainsi, par exemple, on peut assujettir le plan mobile à *rouler sur deux surfaces fixes*, en demeurant constamment tangent à ces deux surfaces, pourvu toutefois que ni l'une ni l'autre ne soient développables; car on doit sentir que la condition de toucher une surface de ce dernier genre, même en un point indéterminé, équivaudrait à deux conditions distinctes, parce que le contact s'étendrait nécessairement tout le long d'une même génératrice (n° **177**). Cette restriction est analogue à ce que nous avons dit pour les cylindres et les cônes dans les n^{os} **118** et **125**.

185. On peut aussi exiger que le plan mobile soit constamment *osculateur* (n° **167**) à une courbe fixe, telle que la ligne VNU de la *fig.* 51; c'est-à-dire qu'il passe toujours par deux éléments consécutifs de cette ligne, qui alors deviendra évidemment l'arête de rebroussement de la surface développable, formée par les intersections successives du plan mobile.

186. Enfin on peut faire mouvoir ce plan de manière qu'il reste perpétuellement *normal* (n° **168**) à une courbe donnée VNU; car on reconnaitra, comme au n° **182**, que ses diverses positions se couperont consécutivement suivant des droites qui se trouveront deux à deux dans un même plan, et formeront ainsi une surface développable. Cette surface se réduirait évidemment à *un cylindre*, si la courbe donnée VNU était plane, puisque alors tous les plans normaux se couperaient suivant des droites perpendiculaires au plan de VNU, et par conséquent parallèles entre elles.

187. Examinons maintenant quelle condition doit remplir une courbe PP'X tracée sur une surface développable quelconque, pour qu'elle soit *la ligne la-* Fig. 51.

plus courte entre deux de ses points P et X. Il faut et il suffit qu'elle devienne *rectiligne* après le développement de la surface; car, dans cette opération, nous savons (nº **179**, 4°) que chaque transformée conserve la même longueur que la courbe primitive; et quand la surface est étendue sur un plan, il est bien certain qu'une droite est la plus courte ligne entre deux de ses points : donc, etc.

Or, pour que la courbe PP'X admette une transformée rectiligne, il est nécessaire et suffisant que *deux éléments consécutifs fassent toujours des angles égaux avec la génératrice intermédiaire*, c'est-à-dire que l'on ait pour chaque point de la courbe, la relation

$$\text{angle } MP'R = MP'P''.$$

En effet, comme ces deux angles resteront invariables de grandeur quand on fera tourner le premier autour du côté commun MP', il est évident que lorsqu'ils seront amenés dans le même plan, les deux éléments PP' et P'P'' se trouveront dans le prolongement l'un de l'autre, si la relation précédente est vérifiée. Telle est donc la condition que doit remplir la courbe PX pour être *minimum :* mais il en résulte une autre propriété qui mérite d'être remarquée.

188. *La courbe minimum* PX *a tous ses plans osculateurs* NORMAUX *à la surface développable* sur laquelle elle est tracée. Pour le démontrer, j'observe que, d'après la relation admise dans le numéro précédent, les deux tangentes consécutives PP'R et P'P''R' font des angles égaux avec la génératrice A'M'; d'où il suit que ces tangentes sont deux arêtes d'un cône droit qui aurait pour axe la ligne A'M'; et puisqu'elles sont infiniment voisines, on doit regarder le plan RP'R' comme tangent au cône dont il s'agit, le long de l'arête RP'. Mais, dans toute surface de révolution, le plan tangent (nº **129**) est perpendiculaire au plan méridien qui passe par le point de contact; donc ici le plan RP'R' est perpendiculaire sur le plan AM'A' qui contient l'axe du cône et l'arête de contact P'R. Or le premier de ces plans n'est autre chose que le plan osculateur PP'P'' de la courbe proposée, et le second est précisément le plan tangent de la surface développable; par conséquent, il est vrai de dire que chaque plan osculateur de la courbe minimum, est normal à cette dernière surface.

FIG. 53. **189.** Cette propriété dont jouit la courbe *minimum*, est d'autant plus remarquable qu'elle se trouve également vérifiée, quelle que soit la surface sur laquelle est tracée une pareille courbe. Soit, en effet, CND la ligne la plus courte entre toutes celles qui, sur une surface quelconque S, réunissent les deux points C et D : si, par tous les points N, N', N'',..... de cette courbe, nous menons des plans tangents à S, ils formeront, comme nous l'avons vu (nº **182**), une surface

développable S′ circonscrite à S, et qui aura évidemment les mêmes plans tangents que cette dernière tout le long de la courbe minimum. Il suit de là que, dans la direction CND, chaque élément superficiel (infiniment petit en tout sens) de la surface S sera commun à la surface S′, et qu'ainsi la courbe CND qui est supposée minimum sur la première, devra aussi se trouver minimum sur la seconde: mais, par cette dernière condition, la courbe CND aura ses plans osculateurs perpendiculaires (n° **188**) aux plans tangents de la surface développable S′; et comme ceux-ci sont les mêmes que les plans tangents de S, on est en droit de conclure que, *sur une surface quelconque, la courbe minimum a tous ses plans osculateurs* NORMAUX *à cette surface.*

CHAPITRE II.

Des surfaces enveloppes.

190. On appelle *surface enveloppe*, ou simplement *enveloppe*, le lieu des intersections consécutives d'une autre surface mobile, qui varie de position et même de forme, d'après une loi déterminée. Ce lieu ayant, comme nous allons le voir, la propriété de toucher le long d'une courbe, chacune des positions de la surface mobile, est appelé avec raison l'enveloppe de toutes ces positions, tandis que ces dernières se nomment les *enveloppées.* D'ailleurs, par un motif que nous expliquerons plus tard (n° **203**), on donne le nom de *caractéristique* à l'intersection de deux enveloppées consécutives, et c'est le long de cette caractéristique qu'a lieu le contact de l'enveloppe et de l'enveloppée. Ainsi, lorsqu'un plan se meut suivant une certaine loi (nos **182** — **186**), il admet pour enveloppe une surface développable, lieu de ses intersections successives qui sont ici des droites, et voilà les caractéristiques; tandis que les enveloppées sont les diverses positions du plan mobile, dont chacune touche l'enveloppe suivant une de ces caractéristiques. Mais pour mieux éclaircir ces notions générales, il faut considérer des exemples moins particuliers, et où les enveloppées soient des surfaces courbes.

191. Imaginons une sphère mobile, dont le centre O parcourt la verticale OZ, et dont le rayon OA varie suivant une certaine loi; de manière, par exemple, qu'il coïncide successivement avec les diverses ordonnées OA, O′A′, FIG. 55.

O″A″,... d'une courbe AA′X tracée dans le plan vertical de la figure. Alors deux sphères infiniment voisines, O et O′, se couperont évidemment suivant un cercle horizontal projeté sur la corde BC; de même la sphère O′ coupera la troisième O″ suivant le cercle B′C′, et ainsi des autres. Or tous ces cercles ayant leurs centres sur OZ et leurs plans perpendiculaires à cette droite, appartiendront (n° **78**) à une surface de révolution qui *touchera*, en l'enveloppant, chacune des sphères mobiles. En effet, les deux cercles infiniment voisins BC et B′C′ se trouvant à la fois sur la surface de révolution et sur la sphère O′, ces deux surfaces ont de communs tous les éléments superficiels situés sur la zone infiniment étroite BB′C′C: par conséquent elles ont l'une et l'autre les mêmes plan tangents, ou bien elles se touchent tout le long de cette zone. De même, la surface de révolution sera tangente à la sphère O″ le long de la zone B′B″C″C′; ainsi cette surface générale est bien l'*enveloppe* de toutes les sphères qui sont les *enveloppées*, et le contact avec chacune d'elles a lieu le long d'un des cercles BC, B′C′,.... qui sont les *caractéristiques* ou les intersections de deux enveloppées consécutives.

192. Si l'on ne considère, pour un instant, que les grands cercles des sphères mobiles qui sont situés dans le plan vertical de la figure, on voit que leurs circonférences forment, en s'entre-coupant, une suite d'arcs BB′, B′B″,.... dont *la ligne enveloppe* donnera évidemment le méridien DBB′F de la surface de révolution. La forme de ce méridien dépendra de la loi suivant laquelle varieront les rayons OA, O′A′,.....; si, par exemple, tous ces rayons étaient *constants* de grandeur, les caractéristiques seraient toutes des grands-cercles égaux entre eux, et le méridien une droite parallèle à OZ. Ainsi, *lorsqu'une sphère constante de rayon a son centre en mouvement sur une droite, l'enveloppe* de l'espace qu'elle parcourt *est un cylindre de révolution.*

193. Lorsqu'au contraire le méridien DBF d'une surface de révolution est assigné d'avance, il faut évidemment rendre chacune des enveloppées sphériques, tangente à ce méridien, en prenant les normales BO, B′O′,.... pour les rayons de ces différentes sphères: ainsi, l'on peut dire généralement que *toute surface de révolution est l'enveloppe de l'espace parcouru par une sphère mobile, qui a pour rayon variable la portion de chaque normale comprise entre le méridien et l'axe.*

194. Les surfaces de révolution admettent aussi pour enveloppée, une autre
Fig. 55. surface génératrice dont la forme très-simple en rend l'emploi fort utile dans certains arts. Imaginons que par des points très-voisins M, M′, M″,.. pris sur le méridien FDY, on lui mène des tangentes MT, M′T′, M″T″, et qu'on les

fasse tourner en même temps que le méridien, autour de l'axe YZ. Par-là, ces tangentes engendreront des cônes droits qui toucheront la surface de révolution chacun le long d'un parallèle; car la tangente MT ayant avec la méridienne l'élément MM′ commun, tous les éléments superficiels situés sur la zone infiniment étroite MM′N′N, seront communs au cône TMN et à la surface générale; donc ces deux surfaces se trouveront tangentes l'une à l'autre tout le long de cette zone. D'ailleurs, deux cônes consécutifs, TMN et T′M′N′, se couperont évidemment suivant le parallèle M′N′ qui réunit les deux zones de contact; d'où il résulte que toute surface de révolution peut aussi être regardée comme *l'enveloppe* (*) *de l'espace parcouru par un cône droit variable* TMN, *qui se meut de manière que son sommet reste sur l'axe, pendant que sa génératrice rectiligne demeure tangente à la méridienne.*

195. C'est par ce mode de génération que les tourneurs exécutent des surfaces de révolution. En effet, lorsqu'ils présentent au solide animé d'une vitesse de rotation, le tranchant rectiligne de leur ciseau, ils produisent sur ce solide un tronc de cône qui est une des enveloppées de la surface générale qu'ils veulent obtenir; puis, en variant convenablement l'inclinaison du ciseau, ils engendrent une série de zones coniques qu'ils savent fondre ensuite les unes dans les autres, en intercalant de nouvelles enveloppées, jusqu'à ce qu'ils arrivent à une surface qui soit sensiblement continue.

C'est encore par le secours des enveloppes que les ferblantiers exécutent des surfaces développables; car ils se servent d'une enclume cylindrique ou conique, pour plier peu à peu la feuille de fer-blanc le long d'une série de droites tracées dans son plan; et celui-ci devient alors l'enveloppée mobile dont les petites zones élémentaires composent la surface générale, laquelle se trouve ainsi l'enveloppe de toutes les positions qu'a prises le plan mobile de la feuille de métal.

196. Outre les enveloppées sphériques ou coniques qu'admettent les surfaces de révolution, ces dernières pourraient être encore produites par le mouvement d'un cylindre. En effet, si par tous les points de la méridienne on mène des droites perpendiculaires à son plan, et que l'on fasse tourner ce cylindre autour de l'axe, l'enveloppe de toutes ses positions sera nécessairement la même

(*) Il ne faut pas attacher à ce mot d'*enveloppe* l'idée d'une surface qui en renferme d'autres dans son intérieur. L'enveloppe peut être en dehors ou en dedans des enveloppées, et l'on veut seulement exprimer qu'elle touche chacune de celles-ci tout le long d'une courbe.

surface de révolution que produirait la rotation de la méridienne; car chaque arête de ce cylindre mobile a évidemment, pour courbe enveloppe de toutes ses positions individuelles, le parallèle de la surface qu'aurait décrit le point correspondant de la méridienne.

Avant de passer à une espèce très-générale de surfaces enveloppes, qui manifestera une circonstance bien remarquable produite par les intersections des caractéristiques, étudions d'abord quelques propriétés des *lignes enveloppes* relativement aux courbes planes.

Fig. 56. **197.** DÉVELOPPÉES *des courbes planes.* Soit ABX une courbe quelconque tracée dans un plan; concevons-la divisée en éléments égaux $BB' = B'B'' = B''B'''$.... et par les milieux de ces éléments, menons les normales infiniment voisines MC, M'C', M''C'',.... qui, par leurs intersections successives, formeront une courbe CC'C''.... à laquelle elles seront toutes tangentes. Cette courbe DCY, *enveloppe de toutes les normales* à la ligne primitive ABX, se nomme *la développée* de celle-ci; tandis que la ligne ABX reçoit le nom de *développante* par rapport à la courbe DCY; ces dénominations vont être justifiées par les relations suivantes.

Le point C où se coupent les deux normales MC et M'C', élevées sur les milieux des éléments égaux BB' et B'B'', se trouve évidemment à égale distance des trois points B, B', B''; par conséquent C est le centre d'un cercle qui aurait, avec la courbe AX, *deux éléments communs* BB', et B'B''. Or, comme on ne saurait assujettir une circonférence à passer par plus de trois points, c'est donc là le cercle qui, parmi tous les autres, approche davantage de se confondre avec la courbe AX dans les environs de B; aussi on l'appelle le cercle *osculateur* de cette ligne pour le point B. Quant au rayon de ce cercle osculateur, ce serait à la rigueur une des trois lignes $CB = CB' = CB''$; mais on peut y substituer $CM = CM'$, parce que ces diverses droites sont les rayons de deux cercles circonscrit et inscrit au même polygone BB'B'', et l'on sait qu'à la limite, ou pour des éléments infiniment petits, ces deux circonférences coïncident (*). D'où il résulte que *le centre* C et *le rayon* MC *du cercle osculateur,* sont déterminés *par la rencontre de deux normales infiniment voisines.*

198. Cette droite MC s'appelle aussi le *rayon de courbure* de la ligne ABX

(*) Les lignes CM et CM' sont égales, attendu que les elements BB' et B'B'' etant ici de même longueur, les triangles rectangles CMB' et CM'B' seront egaux. D'ailleurs le premier de ces

pour le point M, parce que sa longueur plus ou moins grande, indiquera une courbure plus ou moins faible. En effet, si nous voulons acquérir une idée nette de la courbure d'une ligne ABX, regardons-la comme un polygone que l'on aurait formé en pliant successivement une droite BB'b''b'''.... autour des points B', b'', b''',...; de cette manière, il est évident que la courbure au point B' sera exprimée par l'écart que l'on aura mis entre les éléments B'b'' et B'B'', c'est-à-dire par l'*angle de contingence* TB'T', ou plutôt par l'arc ε qui mesurerait cet angle dans un cercle dont le rayon serait l'unité. Or l'angle TB'T' égale l'angle MCM', et celui-ci comprend un arc de courbe MB'M' qui se confond avec le cercle osculateur décrit du rayon MC; donc l'arc ε, semblable à MB'M', et décrit avec un rayon égal à l'unité, aura pour valeur

$$\varepsilon = \frac{\text{MB'M'}}{\text{MC}} = \frac{\text{BB'}}{\text{MC}} = \frac{ds}{\rho}.$$

Mais comme la courbe ABX est divisée en éléments tous égaux entre eux, la quantité ds sera constante; et il résulte de la valeur précédente que *la courbure*, mesurée par ε, *variera* d'un point à un autre de la ligne ABX, *en raison inverse du rayon* MC $=\rho$.

199. Maintenant, si l'on plie un fil flexible MCC'C'' Y le long de la développée, et qu'après avoir attaché fixement un des points de ce fil, par exemple Y, on donne à la partie rectiligne CM une longueur telle que l'extrémité M aboutisse sur la développante ABX, cette extrémité parcourra exactement la ligne ABX, quand on déroulera successivement le fil en le tenant toujours tendu. En effet, lorsque le contact du fil avec la développée sera venu de C en C', la partie rectiligne du fil MC = M'C se sera accrue de CC', et elle aura alors pour longueur totale M'C + CC' = M'C'; mais, puisque cette dernière ligne (n° **197**) est égale à M''C', il s'ensuit que l'extrémité mobile M aboutira précisément en M''. Il en serait de même pour toutes les positions successives du fil, qui peut FIG. 56.

triangles donne

$$\text{CM} = \sqrt{\text{CB}'^2 - \text{MB}'^2} = \text{CB}'\left(1 - \frac{\text{MB}'^2}{\text{CB}'^2}\right)^{\frac{1}{2}};$$

et, en développant, on voit que quand MB' sera infiniment petit, la différence entre CM et CB' ne sera qu'un infiniment petit *du second ordre*, quantité qui doit être négligée, même vis-à-vis de MB'.

ainsi servir à décrire *la développante*, en le déroulant de dessus *la développée*; d'ailleurs, il résulte de là qu'*un arc quelconque* CC'C" *de la développée, est égal à la différence des deux rayons de courbure* MC et M"C" qui aboutissent à ses extrémités.

Observons en outre, qu'une courbe déterminée ABX n'admet jamais qu'une développée unique; tandis qu'une même développée DCY correspond à une infinité de développantes, puisqu'en prenant sur le fil MCC'Y divers points M, m,..., ils décriront des courbes différentes MM'M"X, $mm'm''x$,..., qui seront autant de développantes de la même développée DCY. Toutes ces développantes auront évidemment leurs normales communes, et se trouveront partout *équidistantes* dans la direction de ces normales; mais elles différeront beaucoup les unes des autres, quant à leurs propriétés et à leurs équations.

200. Pour citer quelques exemples simples de la théorie des développées, nous dirons que si la courbe ABX (*fig.* 56) était une parabole du deuxième degré, sa développée se composerait de deux branches indéfinies, telles que DCY et DY', placées l'une au-dessous, l'autre au-dessus de l'axe AD, et qui viendraient s'y réunir en formant un *rebroussement* au point D. Ce point est éloigné du sommet A, de la quantité AD = 2 AF = le demi-paramètre, et cette droite AD est aussi *le rayon de courbure* de la parabole pour le sommet A.

Dans une ellipse ABDE (*fig.* 76), dont les demi-axes sont $OA = a$, $OB = b$, la développée est une courbe $\alpha\beta\delta\varepsilon$ composée de quatre branches qui présentent autant de points de rebroussement, placés à des distances

$$A\alpha = D\delta = \frac{b^2}{a},\quad B\beta = E\varepsilon = \frac{a^2}{b};$$

ce sont là aussi les grandeurs des *rayons de courbure* pour les sommets A et B; car les deux branches $\alpha\beta$ et $\beta\delta$ servent à décrire la demi-ellipse ABD, tandis que les deux autres $\alpha\varepsilon$ et $\varepsilon\delta$ se rapportent à la portion inférieure AED.

Dans un cercle, la développée se réduit à un point unique, qui est le centre, et le rayon de courbure est constamment égal au rayon même du cercle donné.

Fig. 54. **201.** Mais, pour obtenir des résultats plus intéressants dans les applications que nous allons faire aux surfaces enveloppes, nous admettrons ici que l'on s'est donné immédiatement une développée circulaire YDFE, et qu'on en a déduit la développante YO"O'OX, en déroulant un fil plié sur le cercle, et dont l'extrémité mobile aurait d'abord coïncidé avec le point Y. Pour tracer graphiquement cette courbe, on divisera la circonférence en parties égales,

douze par exemple; puis, en portant sur les tangentes FO, F'O', F"O",.... des longueurs égales à $\frac{6}{12}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{4}{12}$,.... de cette circonférence, on obtiendra (n° **199**) les divers points O, O', O",... qu'il faudra réunir par un trait continu. Ce sera d'autant plus facile qu'on pourra employer à cet effet de petits arcs de cercle décrits avec les rayons FO, F'O', F"O",...; car ces distances sont précisément (n° **197**) les rayons des *cercles osculateurs* de la courbe XOY.

Cette développante XOY sera une spirale indéfinie, ayant pour origine le point Y; et même on doit regarder la spirale Y*o"ox* symétrique de la précédente, comme étant une seconde branche de la même développante, et comme ne formant avec la première qu'une seule courbe dont toutes les parties sont décrites *par le mouvement continu* d'un point unique. En effet, si au lieu d'un fil plié sur la développée, on conçoit une droite *inflexible* et indéfinie ABF*ab* qui, demeurant tangente au cercle CY, roule, *sans glisser*, sur sa circonférence, il est clair qu'un point O, fixe sur cette droite, viendra successivement se placer en O', O" et Y; puis, si la rotation de la droite continue dans le même sens, ce point O se trouvera dès lors en arrière du point de contact, et décrira sans discontinuité la branche Y*ox*. D'ailleurs on doit apercevoir que cette manière de décrire une développante quelconque par la rotation d'une droite inflexible sur la développée, équivaut à la génération indiquée n° **199**; mais le mode actuel est plus général, et il devient même nécessaire quand la développée offre des points de rebroussement, comme dans l'ellipse, la parabole,..., puisque autrement il faudrait changer souvent le point d'attache du fil, pour le transporter d'une branche sur l'autre.

202. SURFACES CANAUX. Cela posé, imaginons qu'une sphère d'un *rayon constant*, représenté par OA = OB, se meuve de manière que son centre suive la courbe horizontale XOY*ox*; l'enveloppe de toutes les positions de cette sphère mobile sera formée (n° **190**) par les intersections des enveloppées consécutives; ainsi, examinons ce que sont ici ces intersections. Pour deux positions voisines O et O' du centre mobile, les deux sphères égales se couperaient suivant un petit cercle, dont le plan serait évidemment perpendiculaire sur le milieu de la droite OO' qui joint les centres; par conséquent ce petit cercle serait projeté sur le plan de notre épure qui est horizontal, suivant une droite perpendiculaire à la corde OO', et passant par son milieu. Or, à mesure que le centre O' se rapproche de O, la corde OO' indéfiniment prolongée approche de plus en plus de la tangente à la courbe XOY, et elle coïncide avec cette tangente à la limite : donc, pour deux sphères infiniment voisines, la Fig. 54.

courbe d'intersection est *un grand cercle projeté sur la normale* AOB de la directrice XOY. Il suit de là que l'enveloppe peut être regardée comme engendrée par le grand cercle vertical AOB, dont le centre parcourrait la ligne XOY, tandis que son plan resterait normal à cette ligne; ainsi, cette enveloppe présentera la forme d'un *canal curviligne* qui aura pour axe la courbe directrice XOY, et dont toutes les sections normales à cet axe seront des cercles d'un rayon constant.

203. Ces conséquences continueront évidemment d'avoir lieu, quelle que soit la nature de la ligne XOY; c'est-à-dire que si l'on adopte successivement diverses courbes pour directrices du centre de la sphère mobile, on obtiendra des enveloppes de formes très-variées, mais dont chacune aura pour section normale un cercle du rayon OA. Ainsi, ce cercle devient *une génératrice de forme invariable, commune à toutes les surfaces qui enveloppent l'espace parcouru par une sphère d'un rayon constant*, et qui imprime à toute cette *famille* d'enveloppes, un caractère distinctif et indépendant de la nature de la directrice XOY; c'est pourquoi MONGE a donné le nom de *caractéristique* à ce grand cercle normal, et généralement il appelle ainsi l'intersection de deux enveloppées consécutives, dans *chaque famille* d'enveloppes engendrées par une même surface mobile, quelle que soit la loi du mouvement de cette dernière surface.

204. Nous avons dit (n° **190**) que l'enveloppe *toucherait* chacune des enveloppées particulières précisément le long de la caractéristique, qui est ici le grand cercle vertical et mobile AOB. En effet, trois positions infiniment voisines, S, S', S'', de la sphère mobile, se couperont suivant deux cercles situés l'un et l'autre sur la sphère S', et ils y comprendront une zone infiniment étroite, de largeur inégale, mais qui sera commune à S' et à l'enveloppe; de sorte que ces deux dernières surfaces ayant les mêmes éléments superficiels, ou les mêmes plans tangents tout le long de cette zone, se trouveront bien tangentes l'une à l'autre dans cette région commune, qui d'ailleurs comprendra, vers son milieu, la véritable caractéristique ou le grand cercle normal à la courbe XOY. Ainsi, il est vrai de dire que le contact a lieu le long de cette caractéristique.

FIG. 54. **205.** Maintenant, comparons entre elles les diverses caractéristiques projetées ici sur AOB, A'O'B',...., et pour faire mieux ressortir les circonstances assez délicates de leurs intersections, imitons le procédé indiqué vers la fin du n° **201** pour décrire la développante : c'est-à-dire, imaginons que le plan vertical AOBF de la caractéristique soit *inflexible* et indéfiniment prolongé; puis, faisons-le rouler, *sans glisser*, sur le cylindre vertical FDYE auquel il demeu-

rera tangent; alors le cercle AOB, entraîné avec le plan mobile, parcourra nécessairement l'enveloppe qui nous occupe, puisque les conditions précédentes reviennent évidemment à dire que le centre de ce cercle se mouvra sur la développante XOY, tandis que son plan restera normal à cette courbe. D'ailleurs, tous les points de cette circonférence mobile, projetés en B, R,..., A, décriront d'autres spirales BD, RL,..., AA'E, qui seront autant de développantes du cercle FDY, et dont la première et la dernière formeront le contour apparent de l'enveloppe.

206. Cela posé, tant que par la rotation du plan vertical AF sur le cylindre FDY, l'extrémité B du diamètre du cercle mobile n'aura pas atteint la développée, deux caractéristiques consécutives ne se couperont pas; car on sait (n° **197**) qu'une normale quelconque A'F' à la courbe XOY, ne serait rencontrée par la normale infiniment voisine qu'au point F' situé sur la développée, et ce point se trouve en dehors du diamètre A'B qui limite la projection de la caractéristique. Mais, dès que le point B aura touché le cylindre en D, les caractéristiques consécutives commenceront à se couper : en effet, la normale GLg, par exemple, rencontrera la normale infiniment voisine au point L situé sur la développée; et comme ce point se trouve en dedans du diamètre $Gg = AB$, il en résulte que les deux caractéristiques projetées sur Gg et sur la normale infiniment voisine, se couperont en deux points projetés en L, et situés l'un au-dessus, l'autre au-dessous du plan horizontal de l'épure. Toutefois, pour justifier complétement cette assertion, il faut ajouter que ces deux caractéristiques sont placées (n° **204**) sur une même position de la sphère mobile; autrement, les plans de ces deux cercles pourraient bien se couper suivant la verticale L, sans que leurs circonférences eussent des points communs.

Il résulte de là qu'à partir de la position DI, les diverses caractéristiques circulaires se trouveront partagées par leurs intersections consécutives, chacune en deux segments projetés

$$\begin{array}{lll} \text{sur} & LG,\ MH,\ YP,\ VQ,\ UT, & (N) \\ \text{et sur} & Lg,\ Mh,\ Yp,\ Vq,\ Ut. & (n) \end{array}$$

Les segments de la première série formeront une nappe que nous désignerons par (N), et à laquelle appartiendront les caractéristiques totales AB, A'B',..., tandis que les segments de l'autre série donneront lieu à une seconde nappe (n), qui commencera par être renfermée dans l'intérieur de la première, mais qui bientôt en sortira pour s'étendre indéfiniment jusqu'aux ca-

ractéristiques totales $a'b'$, ab,....... En outre, ces deux nappes de l'enveloppe se réuniront l'une à l'autre le long d'une ligne à double courbure projetée sur DLMYVUE, et qui n'est autre chose que le cercle vertical AB, dont le plan serait plié et enroulé sur le cylindre de la développée.

Fig. 54. **207.** Observons d'ailleurs que cette ligne à double courbure DYE, est une véritable *arête de rebroussement* pour l'enveloppe totale. Car, en se rappelant (n° **205**) qu'un point quelconque Z de la caractéristique mobile, décrit les deux branches Zα6M et M$\gamma\delta$z d'une spirale dont le rebroussement est en M, on doit apercevoir que, quand le point mobile Z est en α ou en 6, il se trouve encore sur la nappe (N) placée au-delà des points de contact D ou L; mais dès que ce point est arrivé en γ ou en δ, il appartient à la nappe (n) placée en deçà des points de contact Y ou V; par conséquent le passage de ce point mobile d'une nappe à l'autre, a lieu précisément en M, et la forme de la spirale en cet endroit prouve bien que ce passage s'effectue par un véritable rebroussement. Comme on en dirait autant des autres points de la caractéristique AB, il en faut conclure que la courbe projetée sur DMYE est une ligne de rebroussement pour les deux nappes de l'enveloppe.

Une circonstance analogue se reproduirait dans toutes les enveloppes, quelle que fût la surface mobile qui les engendrerait; c'est pourquoi Monge a donné le nom général d'*arête de rebroussement* d'une enveloppe, *à la ligne formée par les intersections consécutives des diverses caractéristiques;* et nous en avions déjà rencontré un exemple remarquable (n° **178**) dans les surfaces développables où les caractéristiques étaient des droites (n° **190**).

208. Revenons à l'enveloppe particulière qui nous occupait, et observons que les segments de caractéristiques L g, Mh,... qui appartiennent à la nappe (n) doivent être *ponctués*, parce qu'ils sont invisibles comme étant renfermés dans l'intérieur de la nappe (N). En effet, on a évidemment

$$\text{L}\,6 = \text{LM} < \text{L}\varepsilon + \varepsilon\text{M};$$

d'où, en retranchant la partie commune Lε, il résulte que

$$\varepsilon 6 < \varepsilon\text{M};$$

par conséquent, si l'on ramenait sur le cercle AOB les deux points projetés en ε et qui appartiennent l'un au segment LG, l'autre au segment Mh, le premier viendrait occuper une position ε' plus voisine du point Z et par suite du centre O, que ne l'est la position ε'' où viendrait se placer le deuxième; donc le

point ε' est plus élevé que ε'', et par conséquent le segment LG passe au-dessus du segment Mh. On expliquera par des considérations analogues, les divers modes de ponctuation employés dans l'épure; toutefois, nous ferons encore observer que les points R et ρ, Z et ζ.... du cercle mobile AOB, se trouvant respectivement à la même hauteur, décriront des spirales qui se rencontreront deux à deux; de sorte que les deux nappes (N) et (n) de l'enveloppe, se traverseront mutuellement suivant une ligne d'intersection projetée sur la droite YW.

Les surfaces que nous avons examinées dans ce chapitre, et surtout la dernière que nous venons de discuter avec détail, parce qu'elle présentait par elle-même des circonstances intéressantes, suffiront sans doute pour donner au lecteur une idée assez complète des enveloppes et de leurs particularités; c'est pourquoi nous allons passer au problème important des intersections de surfaces.

LIVRE IV.

INTERSECTIONS DE SURFACES.

CHAPITRE PREMIER.

Principes généraux.

209. Pour donner une idée générale des procédés par lesquels on parvient à déterminer l'intersection de deux surfaces, supposons qu'il s'agisse d'abord d'un cas très-simple, celui où une surface S serait coupée par *un plan horizontal* donné P. Puisque la surface est censée connue et définie, on connaîtra la forme de la génératrice (n° 70) et la loi d'après laquelle elle varie; par conséquent on pourra construire, sur les deux plans de projection, diverses positions de cette génératrice, aussi nombreuses et aussi rapprochées que l'on voudra. Désignons les projections de ces lignes par (G, G'), (G_2, G'_2), (G_3, G'_3),....; puis, observons que le plan sécant P qui est perpendiculaire au plan vertical, coupe la ligne (G, G') en un point qui doit être projeté verticalement à la rencontre de G' avec la trace du plan P; par conséquent, si l'on ramène ce point sur la ligne G au moyen d'une perpendiculaire à la ligne de terre, on obtiendra la projection horizontale m d'un point de l'intersection de S avec P. En répétant la même opération pour chaque génératrice, on se procurera une série de points m, m_2, m_3, m_4,....; et s'ils sont assez rapprochés les uns des autres, ils pourront être aisément réunis par *un trait continu* (*)

(*) Il faut sans doute de l'habitude pour réunir ainsi des points situés à certaines distances par une ligne qui n'offre ni *jarrets*, ni changements brusques de courbure : mais on ne doit rien épargner pour se former l'œil et la main par de nombreux exercices, et pour acquérir le sentiment de la continuité dans les courbes, attendu que la construction des intersections de surfaces est un des problèmes les plus utiles, soit comme moyen de recherche, soit dans les applications pratiques de la géométrie descriptive à la perspective, à la coupe des pierres, à la charpente, etc. Toutefois, nous ferons observer ici qu'il n'est pas toujours avantageux de multi-

qui fera connaître, sur le plan horizontal, la courbe suivant laquelle la surface S est coupée par le plan P. Quant à la projection verticale de cette même courbe, il est évident qu'elle se réduit, dans le cas actuel, à la trace même du plan sécant P.

210. Considérons maintenant deux surfaces quelconques S et S'; et pour trouver leur intersection, coupons-les par une série de plans horizontaux P, P_2, P_3,..... Chacun de ces plans auxiliaires, P par exemple, coupera la surface S suivant une ligne mm_2m_3....., et la surface S' suivant une autre ligne $m'm'_2m'_3$.....; ces deux lignes se construiront comme nous l'avons dit au numéro précédent, et si elles se coupent elles-mêmes sur le plan horizontal en un ou plusieurs points M, N,...., ce seront là les projections horizontales de divers points qui sont évidemment *communs aux deux surfaces* S et S', et qui dès lors appartiennent à leur intersection. Quant aux projections verticales, on les déduira des premières, en ramenant sur la trace du plan auxiliaire P, les points M, N,...., par des perpendiculaires à la ligne de terre. Maintenant, si l'on répète des opérations semblables pour les autres plans P_2, P_3,...., on obtiendra sur chaque plan de projection, une suite de points M, M_2, M_3,...., N, N_2, N_3,...., qu'il faudra réunir par un trait continu, en distinguant toutefois ceux de ces points qui appartiennent à une même branche de courbe, d'avec ceux qui font partie d'une autre branche. Cette distinction est quelquefois assez délicate; mais on y parviendra en suivant avec attention, et de proche en pro-

---

plier extrêmement les constructions auxiliaires qui déterminent les divers points m, m_2, m_3,..., parce que les petites erreurs inséparables de toute opération manuelle, portant alors sur des points très-voisins, produisent des sinuosités ou d'autres défauts choquants qui n'eussent pas été sensibles sur de plus grandes distances. Il faut donc répartir ces constructions avec mesure, en consultant de bons modèles, et les multiplier davantage dans les parties où la courbe semble offrir quelque forme singulière qui a besoin d'être vérifiée. On doit aussi profiter des notions que l'on peut avoir d'avance sur la nature de l'intersection cherchée; si, par exemple, on prévoit que la projection doit être une courbe du deuxième ou du quatrième degré, il ne devra y exister aucun arc qui puisse être coupé par une droite quelconque, en plus de deux ou de quatre points; et si le contraire arrivait, il faudrait refaire les constructions relatives à ces parties pour les rectifier. La détermination des tangentes, que nous apprendrons à effectuer, est encore un moyen de corriger la forme d'une courbe; parce que la connaissance d'une pareille droite fera aisément sentir si l'arc qui précède ou qui suit le point de tangence, a besoin d'être élevé ou abaissé pour que le contact soit complet. Au surplus, les préceptes généraux sur cette matière ne suffisent pas; et il faut réclamer encore, sur un certain nombre d'exemples bien choisis, les conseils d'un praticien habile.

che, les résultats fournis par les plans auxiliaires successifs. D'ailleurs, si l'une des surfaces S et S' avait deux nappes distinctes, comme il arrive dans un cône, il ne faudrait pas réunir des points qui seraient sur des nappes opposées.

211. La méthode que nous venons d'exposer est générale, et suffisante dans tous les cas pour obtenir l'intersection de deux surfaces quelconques S et S'; mais, au surplus, on peut donner aux plans sécants P, P_2, P_3,....., telle direction que l'on voudra, pourvu que l'on sache construire commodément les courbes auxiliaires mm_2..... et $m'm'_2$..... Ainsi, dans chaque problème, il sera avantageux de choisir les plans sécants de manière que les sections auxiliaires soient, s'il est possible, des *droites* ou des *cercles*, parce que de pareilles lignes se tracent facilement au moyen de deux données. Par exemple, s'il s'agit de deux cylindres, on prendra les plans P, P_2,...., parallèles aux génératrices des deux surfaces à la fois; s'il est question de deux cônes, on fera passer tous les plans sécants par la droite qui réunit les deux sommets. Quelquefois même on emploie, pour couper les surfaces S et S', non plus des plans, mais des surfaces courbes, telles que des sphères concentriques, qui peuvent fournir alors des cercles pour sections auxiliaires dans les deux surfaces proposées. (*Voyez* n° **333**.)

212. Quand on a construit les deux projections de l'intersection cherchée, cette courbe est certainement déterminée; mais, si elle est *plane*, il faut en outre, pour manifester plus clairement sa forme, en exécuter le *rabattement* sur un des plans de projection. Lorsqu'une des deux surfaces proposées est *développable*, on doit aussi effectuer le développement de cette surface, et y construire *la transformée* (n° **175**) de l'intersection; car cette nouvelle courbe est nécessaire à connaître dans les applications à la stéréotomie. Enfin, comme la détermination des tangentes à une courbe est un moyen de dessiner avec plus de précision le cours de cette ligne, et que cette connaissance est d'ailleurs nécessaire dans divers cas, il faudra s'exercer à cette recherche tant pour l'intersection primitive, que pour son rabattement et pour sa transformée; mais les tangentes à ces deux dernières courbes se déduisant toujours facilement de la tangente à la première, nous nous bornerons à donner pour celle-ci une méthode générale.

Fig. 57. **213.** Désignons les surfaces proposées par S et S', et soit AMB leur intersection dont il faut *trouver la tangente*.

Puisque cette courbe est située en même temps sur les deux surfaces, sa tangente MT pour le point quelconque M, doit se trouver à la fois (n° **95**) dans le plan qui touche la surface S en M, et dans celui qui touche S' au même point; donc *la tangente* MT *sera l'intersection des plans tangents aux deux surfaces*. Par

conséquent, il suffira de construire ces deux plans par les méthodes exposées précédemment, et de chercher la droite suivant laquelle ils se couperont : on pourra même se borner à trouver un seul point de cette droite, puisque le point M est déjà assigné par la question.

Lorsqu'une des surfaces proposées, par exemple S', sera un plan, ou bien quand on saura que la courbe AMB est plane, quoique les deux surfaces dont elle est l'intersection soient courbes, la règle précédente se réduira évidemment à chercher l'intersection du seul plan tangent de S avec le plan S', ou avec le plan de AMB.

214. *Autre méthode*. Si l'on construit la normale MN de la surface S pour le point M, et la normale MN' de la surface S' pour le même point, il est évident que le plan NMN' conduit par ces deux droites, se trouvera perpendiculaire à chacun des plans tangents, et par suite à leur intersection qui est MT. Ainsi, *la tangente à l'intersection de deux surfaces est une droite perpendiculaire au plan des deux normales* à ces surfaces; ce plan coïncide d'ailleurs avec le *plan normal* (n° **168**) de la courbe AMB. Il suffira donc de construire ces deux normales et le plan qu'elles déterminent, puis, de lui mener une perpendiculaire par le point donné M. Cette méthode (*) est fort précieuse, 1° parce qu'il y a des surfaces où la normale se détermine d'une manière beaucoup plus simple que le plan tangent, et indépendamment de celui-ci (n° **136**); 2° parce qu'il se rencontre quelquefois des points singuliers, pour lesquels les deux plans tangents se trouvent perpendiculaires à un même plan de projection; alors le procédé du n° **213** ne donne plus de résultat déterminé pour la tangente de la courbe projetée sur ce plan, tandis que la méthode des deux normales peut encore s'appliquer par suite de certaines relations qui, à la limite, ne deviennent pas indéterminées. Nous en verrons des exemples dans plusieurs épures de géométrie (n^os^ **340**, **488**) et dans la coupe des pierres.

215. Lorsque les surfaces en question sont placées de telle sorte qu'elles *se touchent* le long de la ligne qui leur est commune, cette intersection particulière prend le nom de *ligne de contact*, et l'une des surfaces est dite *circonscrite* à l'autre; on pourra toujours construire cette courbe par le procédé général du n° **210**, mais on ne saura plus lui mener de tangente; car, d'après l'hypothèse actuelle, les deux plans tangents dont cette droite serait l'intersection,

(*) Elle est due à M. *J. Binet*, qui en a fait lui-même des applications intéressantes à diverses épures de géométrie et de coupe des pierres.

se trouveront confondus l'un avec l'autre. La même indétermination résulterait de la méthode des deux normales; car ces droites coïncideront entre elles en même temps que les plans tangents, et le plan normal qu'elles devaient servir à fixer, restera encore indéterminé. Ainsi, pour les lignes de contact de deux surfaces, la géométrie ne fournit point de méthode graphique propre à trouver leurs tangentes (*), à moins toutefois que la ligne de contact ne soit plane; car, dans ce cas, la combinaison de son plan avec le plan tangent commun aux deux surfaces, donnerait encore la tangente cherchée.

216. Après avoir exposé ces notions générales sur les intersections de surfaces, nous allons les éclaircir en résolvant divers problèmes de ce genre, dans lesquels nous trouverons d'ailleurs l'occasion d'expliquer encore quelques particularités remarquables, telles que la recherche des *branches infinies* et celle des *asymptotes*, dont nous ne pourrions parler maintenant que d'une manière vague et obscure.

CHAPITRE II.

Des sections planes.

PROBLÈME **1.** *Trouver,* 1° *l'intersection d'un cylindre droit et d'un plan donnés;* 2° *le rabattement de cette intersection et sa tangente;* 3° *le développement du cylindre, et la transformée de l'intersection avec sa tangente.*

Fig. 58. **217.** Nous avons déjà dit (n° **160**) que par *cylindre droit* nous entendions un cylindre qui avait pour base ou pour directrice, une courbe plane et perpendiculaire aux génératrices rectilignes de cette surface, sans exiger que cette base fût un cercle; ainsi, tout en adoptant ici cette dernière forme pour exemple, nous raisonnerons d'une manière générale et applicable à toute autre courbe. D'ailleurs, comme dans chaque problème il convient de choisir les plans de projection, dans des directions propres à simplifier les opérations graphiques, nous adopterons le plan de la base ABDC pour plan horizontal, et

(*) Cependant nous indiquerons, au n° 884, une méthode propre à atteindre ce but, mais trop compliquée pour être vraiment utile dans la pratique, et remarquable seulement sous le point de vue de la théorie qu'elle servira à compléter.

nous choisirons le plan vertical perpendiculaire au plan sécant, lequel aura ainsi pour traces PQ et QR'. Quant au cylindre, il sera représenté par la courbe ABDC qui en est le contour apparent sur le plan horizontal; et sur le plan vertical, le contour apparent sera formé par les deux droites GG' et VV' qui sont évidemment les traces de deux plans tangents perpendiculaires à ce plan de projection (n° **106**). Nous supposerons de plus que le cylindre est terminé aux deux plans horizontaux GV et G'V'.

218. Cela posé, le plan PQR' coupera le cylindre vertical suivant une courbe qui, d'après la situation actuelle des plans de projection, se trouvera évidemment projetée suivant ABDC sur le plan horizontal, et sur le plan vertical suivant la portion A'D' de la trace du plan sécant. Ainsi, dans ce cas très-simple, *les projections* de l'intersection *sont connues immédiatement*, et il n'y a pas lieu d'employer la méthode générale exposée au n° **210**.

219. *Rabattement.* Pour connaître la véritable forme de l'intersection, rabattons le plan qui la contient autour de PQ, sur le plan horizontal; ou plutôt, afin d'obtenir un résultat disposé symétriquement, faisons tourner le plan PQR' autour de la droite (BC, B'), jusqu'à ce qu'il devienne parallèle au plan horizontal. Par cette révolution, la trace verticale Q'R' deviendra l'horizontale q'B', et un point quelconque de la courbe, par exemple (M, M'), décrira un arc de cercle *perpendiculaire à l'axe de rotation;* donc cet arc sera projeté verticalement sur un arc égal M'm' décrit du centre B', et horizontalement sur la droite indéfinie MF parallèle à la ligne de terre. Alors, puisque le point M' s'est transporté en m', si l'on projette ce dernier en m sur MF, on aura la position (m, m') que prend, après le rabattement, le point (M, M') de la courbe proposée. En opérant de même pour d'autres points, tels que A, D, E, F,... (*), on verra qu'ils se rabattent en a, d, e, f,...; et en réunissant ces derniers par un trait continu, la ligne amBdCna représentera l'intersection cherchée dans ses véritables dimensions.

220. Cette intersection est ici une ellipse, puisqu'en la comparant avec le cercle ABDC, on voit que pour les mêmes abscisses comptées sur la droite BC, les ordonnées perpendiculaires à cette ligne ont augmenté toutes dans le rapport constant de OA à B'A'; or on sait qu'une pareille modification change un

(*) Quoiqu'on puisse prendre ici ces points d'une manière arbitraire sur la base ABDC, il est bon, pour l'opération ultérieure du *développement*, de les choisir tous de manière qu'ils divisent la circonférence en parties égales.

cercle en une ellipse. D'ailleurs, comme il existait deux points M et N de la courbe primitive, qui avaient l'un et l'autre M′ pour projection verticale, et que ces deux points se sont transportés sur une corde *mn* évidemment perpendiculaire à O*a*, et dont le milieu est sur cette droite, il s'ensuit que la ligne *a*O*d* divise en deux parties égales et à angles droits, une série de cordes parallèles dans la courbe rabattue; donc *a*O*d* est un axe de l'ellipse, et par conséquent BOC est le second axe.

221. Cherchons maintenant la tangente de l'intersection pour un point quelconque (M, M′). D'après la règle générale (n° **215**), cette droite devant être située à la fois dans le plan PQR′ et dans le plan tangent du cylindre qui est le plan vertical MT, il en résulte immédiatement qu'elle a pour projections MT et M′Q. Ensuite, si l'on veut retrouver cette tangente sur le rabattement de l'intersection, on observera que le pied (T, Q) de cette droite décrit, comme nous l'avons expliqué pour (M, M′), un arc de cercle perpendiculaire à la charnière (BC, B′); de sorte que le pied de la tangente se transporte en *t*, et puisque le point de contact est venu en *m*, la tangente rabattue est donc *tm*. Cette droite devra *toucher* exactement la courbe *am*B*d*.

On peut encore observer que la tangente TMS de l'intersection primitive, allait rencontrer la charnière en un point (S, B′), qui doit demeurer *immobile* pendant le mouvement de rotation; ainsi, il faudra que la droite *tm*, déjà déterminée, aille passer par le point S.

Fig. 58. **222**. *Développement.* Nous avons vu (n° **161**) que, quand on développe un cylindre, la *section droite* qui est ici la base ABDC, devient rectiligne sans changer de longueur absolue; et que les arêtes lui demeurent perpendiculaires. Si donc, en supposant qu'on ouvre le cylindre le long de l'arête (D, VV′), on porte sur une droite indéfinie, des longueurs

$$D''E'' = DE, \quad E''F'' = EF, \quad F''B'' = FB, \quad B''M'' = BM, \ldots (^*),$$

(*) Observons ici que, quand la courbe ABDC est quelconque, il faut, pour rectifier les arcs DE, EF,. . ., les mesurer en employant une ouverture de compas qui représente une très-petite corde sensiblement confondue avec l'arc partiel qu'elle soutend: puis, reporter sur la droite indéfinie D″D‴ le même nombre de fois cette ouverture de compas. Mais, quand il s'agit d'un cercle, comme dans l'exemple actuel, il est beaucoup plus commode et surtout plus exact, de prendre immédiatement la droite D″D‴ égale aux $\frac{22}{7}$ du diamètre AD, puis de diviser cette droite en autant de parties égales qu'en contient la circonférence. Cela suppose d'ailleurs que les points de division de la base du cylindre ont été choisis eux mêmes à des distances égales, comme nous l'avons recommandé dans la note du n° **219**

et que par les points D″, E″, F″,... on élève des perpendiculaires égales à la hauteur VV′ du cylindre, on obtiendra, pour le développement de cette surface, le rectangle D″V″V″D″. Maintenant, rapportons-y les points de l'intersection ; et à cet effet, rappelons-nous (n° **162**) que les portions de génératrices du cylindre, comprises depuis la base jusqu'à cette courbe, doivent conserver après le développement leurs longueurs primitives. Par conséquent, si nous portons sur les verticales du développement, des distances

$$D''\delta = VD', \quad E''\varepsilon = KE', \quad F''\varphi = IF', \ldots\ldots$$

et que nous réunissions par un trait continu les extrémités de ces hauteurs, nous obtiendrons, pour la *transformée* de l'intersection, la courbe $\delta\varepsilon\varphi 6\mu\alpha\delta'$.

223. Dans l'exemple actuel, où la base du cylindre droit est un cercle, la transformée sera composée d'abord de deux parties évidemment symétriques $\alpha\delta$ et $\alpha\delta'$; car les deux arcs égaux AM et AN, qui répondent à deux points de la section projetée en M′, fourniront sur le développement, des abscisses et des ordonnées respectivement égales ; savoir :

$$A''M'' = A''N'' \quad \text{et} \quad M''\mu = N''\nu.$$

En outre, chacune de ces parties, par exemple $\alpha\delta$, se trouvera aussi composée de deux portions 6α et 6δ égales, mais inversement placées par rapport à l'horizontale $\omega 6$: cela résulte de ce qu'à partir de 6, les points φ et μ, ε et λ, proviennent des points du cylindre F′ et M′, E′ et L′, qui se trouvent à des hauteurs respectivement égales au-dessus et au-dessous du point B′. D'ailleurs, la transformée totale n'est qu'une portion d'une courbe indéfinie (*) qui, d'après la

(*) Cette courbe est une *sinusoïde* ; car, si l'on appelle x l'abscisse horizontale et y l'ordonnée verticale du point φ, comptées à partir du point 6 comme origine, puis que l'on désigne par $x' = B'U$, $y' = F'U$, les coordonnées du point analogue F′ par rapport à l'origine B′, il est évident que l'on aura les relations

$$y' = y, \quad x' = \sin BF = \sin B''F'' = \sin x, \quad y' = ax',$$

en désignant par a la tangente trigonométrique de l'angle B′B′d′. Donc, en éliminant les variables auxiliaires x', y', il viendra pour l'équation de la transformée rapportée à l'origine 6,

$$y = a \sin x; \quad \text{ou bien} \quad y = aR \sin \frac{x}{R},$$

en comptant, suivant l'usage analytique, les sinus dans le cercle dont le rayon est l'unité, et désignant par R le rayon du cylindre actuel.

relation existante entre ses coordonnées, admet une infinité de branches successives identiques avec $\delta'\alpha\delta$. On peut même, par la géométrie, faire naître ces diverses branches, en imaginant que le plan sur lequel on effectue le développement du cylindre, avait été roulé sur ce corps un nombre de fois indéfini, et en répétant les constructions antérieures sur le prolongement de la droite D″D″.

224. Construisons maintenant la tangente de la transformée $\delta'\alpha\delta$ pour un point quelconque μ. Nous savons (n° **162**, 3°) que cette droite est la position que prend, après le développement du cylindre, la tangente (MT, M′Q) de la courbe primitive; et que d'ailleurs l'angle de cette tangente avec l'arête du cylindre demeure *invariable*. Il s'ensuit que le triangle rectangle formé par cette tangente, la verticale (M, M′H), et la *sous-tangente* MT, reste aussi invariable de forme, et ne fait que tourner autour de cette verticale pour s'appliquer sur le plan du développement; il suffit donc de reproduire ici ce triangle dans ses véritables dimensions. Or, comme on a déjà la hauteur $\mu M'' = M'H$, si l'on prend M″T″ égale à la sous-tangente MT, l'hypoténuse T″μ sera la direction de la tangente cherchée.

On pourrait aussi employer un triangle rectangle, opposé par le sommet au précédent, et qui a pour côtés la verticale (M, M′*h*) et l'horizontale (MS, *h*B′). Ce triangle demeurant encore invariable de forme, il suffira de prendre $\mu\omega = M'h$ et de tirer l'horizontale $\omega 6 S'' = MS$; alors, en joignant les points S″ et μ, on obtiendra une droite qui devra se trouver le prolongement de T″μ.

225. Il est important de remarquer qu'aux deux points (A, A′) et (D, D′) de l'intersection du cylindre avec le plan PQR′, la tangente à cette courbe se trouvait parallèle à la trace PQ, puisque le plan tangent du cylindre en A ou en D est lui-même parallèle à cette trace. Il en résulte qu'en chacun de ces points, la tangente de la section formait un angle droit avec l'arête du cylindre; et comme cet angle doit demeurer invariable (n° **162**, 3°) dans le développement de la surface, il faudra qu'aux points α, δ, δ', la transformée *coupe* encore *à angles droits* les verticales A″α, D″δ, D″δ'.

226. Observons enfin qu'au point 6 de la transformée, il y aura une *inflexion ;* c'est-à-dire que si l'on construisait, comme ci-dessus, la tangente en ce point, cette ligne traverserait la courbe, en laissant l'arc 6α au-dessus d'elle, et l'arc 6δ au-dessous. Néanmoins, il ne faut pas la regarder comme une sécante; car, bien au contraire, elle a dans ce point *singulier* un contact plus intime avec la courbe que celui d'une tangente ordinaire. En effet, d'après la symétrie que nous avons prouvé exister (n° **223**) entre les deux parties 6α et 6δ, si nous me-

nions par le point β une droite quelconque qui rencontrât l'arc inférieur en μ, cette même ligne couperait nécessairement l'arc supérieur dans un autre point φ qui serait à la même distance que μ par rapport à β; donc, en faisant tourner cette sécante autour du point β, les deux points μ et φ se rapprocheront simultanément de celui-ci, et lorsque μ viendra se confondre avec β, au même instant φ coïncidera pareillement avec β. D'où l'on voit que la position limite de cette sécante sera déterminée, non par la réunion de deux points de section, mais par celle de trois points de ce genre; et qu'ainsi cette tangente particulière offrira *un contact du second ordre*, d'après lequel elle aura un élément commun avec l'arc $\beta\alpha$, et aussi un élément commun avec l'arc $\beta\delta$. D'ailleurs, ces deux arcs se trouveront évidemment de côtés opposés par rapport à la tangente, à cause des mouvements contraires que prennent simultanément les deux portions de la sécante, lorsqu'elle tourne autour du point β; donc il y aura là une inflexion (*).

Pour éviter la confusion des lignes, nous avons construit cette tangente *singulière* pour le point analogue γ, en prenant la sous-tangente $C''\beta''$ égale à $C\theta$, et en joignant les points γ et θ''.

227. Le *développement* d'un cylindre est une opération nécessaire à employer dans certains arts. Si, par exemple, on voulait former en tôle ou en fer-blanc un tuyau cylindrique qui dût se terminer à deux plans, l'un perpendiculaire, l'autre incliné sur sa longueur, il faudrait tracer, sur la feuille de métal *encore plane*, la courbe $\delta'\alpha\delta$; puis, découper cette feuille le long de cette courbe, en enlevant la partie supérieure; alors on serait certain qu'en courbant le reste de la feuille de tôle au moyen d'une enclume cylindrique, le bord supérieur présenterait la forme d'une *courbe plane*, ayant l'inclinaison voulue par la question.

(*) Il est bon d'observer que, quelle que soit la base du cylindre coupé par un plan, la transformée offrira un point d'inflexion à l'endroit où la tangente de la section primitive était *la ligne de plus grande pente* du plan sécant, du moins quand les arêtes du cylindre sont verticales; et en général, cette inflexion aura lieu au point où la tangente de la section forme un angle *minimum* avec les génératrices. En effet, si l'on se reporte à la *fig.* 49, et qu'on suppose le développement du cylindre effectué sur le plan tangent qui est le prolongement de l'élément superficiel ABB'A', on verra que si l'angle BMM' est à la fois plus petit que les angles B'M'M″ et LKM, le côté M'M″ viendra tomber après le développement, au-dessous de TM*t*, tandis que le côté MK restera au-dessus. Une inflexion contraire aurait lieu pareillement si l'angle BMM' était *maximum*; mais cet énoncé rentre dans l'autre, parce que la tangente forme avec l'arête un angle aigu et un angle obtus, dont le premier est *minimum* quand le second est *maximum*. Cette remarque intéressante est due à M. Th. Olivier.

De même si, après avoir exécuté en bois ou en pierre un cylindre droit, on voulait le terminer par un plan incliné, il faudrait construire, sur un carton flexible, le développement de ce cylindre avec la transformée $\partial'\alpha\partial$ de la section dont il s'agit; puis, découper ce carton le long de cette courbe, et le rouler ensuite sur le cylindre. Dans cet état, le bord du carton aurait repris la forme qui convient à la section plane demandée, et l'on pourrait tracer celle-ci sur le solide, en suivant avec un crayon le bord de ce carton enroulé; de sorte que l'ouvrier, connaissant ainsi le contour de la partie du solide qu'il doit enlever, pourrait achever l'ouvrage avec toute la précision désirable. Nous rencontrerons des applications fréquentes de ce procédé dans la coupe des pierres et dans la charpente.

FIG. 59. **228.** AUTRE SOLUTION *de l'intersection d'un cylindre droit par un plan.*

Il peut arriver que quelque circonstance de la question, empêche de choisir le plan vertical de projection perpendiculaire au plan sécant; alors ce dernier aurait pour traces des droites quelconques PQ et QR', et le cylindre serait toujours représenté par sa base ABDC, et par les deux verticales UU', VV', qui forment son contour apparent sur les plans fixes. Dans ce cas, suivons la méthode générale du n° **210**, et coupons le cylindre et le plan donné PQR' par divers *plans horizontaux*, tels que K'N'M'; ce dernier aura pour section dans le plan donné, une horizontale (K'M', KM), et pour section dans le cylindre, une courbe projetée sur sa base ABDC; par conséquent, les points M et N qui sont communs à ces deux sections auxiliaires sur le plan horizontal, étant projetés sur K'M', fourniront deux points (M, M') et (N, N') de l'intersection demandée. Les autres s'obtiendront d'une manière toute semblable, en menant à volonté des parallèles à la ligne de terre, comme A'L', E'F',...

229. Mais il vaut mieux interpréter autrement ces constructions, en disant que l'on mène à volonté des *plans auxiliaires* qui soient *verticaux et parallèles à la trace* PQ, comme MNK. Alors, ce plan vertical coupera le plan PQR' suivant l'horizontale (KM, K'M'), et le cylindre suivant deux génératrices projetées sur XN' et YM'; donc la rencontre de ces dernières avec la ligne K'M' fournira deux points (M, M') et (N, N') de l'intersection demandée. Cette marche offrira l'avantage de pouvoir trouver directement certains points *remarquables* qu'il importe de construire préférablement à d'autres qui en seraient même très-voisins.

1°. Si l'on applique cette méthode à la recherche des points situés sur les arêtes (A, UU'), (D, VV'), qui forment le contour apparent du cylindre sur le

plan vertical, on obtiendra les points A′ et D′ qui séparent *la partie visible* de l'intersection cherchée, d'avec la partie *invisible;* et dans ces points-là, la projection verticale A′B′D′C′ devra *toucher* les deux droites UU′ et VV′. En effet, la tangente de la courbe dans l'espace pour le point (A, A′), est nécessairement située dans le plan tangent du cylindre le long de l'arête (A, UU′); mais ce plan est ici perpendiculaire au plan vertical, et par conséquent la tangente en question se trouve projetée sur sa trace UU′, laquelle doit ainsi toucher la courbe A′B′D′C′; car d'ailleurs nous avons démontré (n° **102**) qu'une courbe et sa tangente devaient se retrouver tangentes l'une à l'autre, quand on les projetait sur un même plan.

2°. Le point *le plus haut* et le point *le plus bas* de la courbe, c'est-à-dire ceux où *la tangente sera horizontale*, s'obtiendront en cherchant les arêtes B et C, pour lesquelles le plan tangent du cylindre se trouve *parallèle à la trace* PQ. En effet, si, après avoir conduit dans cette direction la tangente BI de la base ABDC, et avoir construit comme ci-dessus le point (B, B′) de la section, on veut trouver la tangente relative à ce point, il faudra (n° **215**) chercher l'intersection du plan PQR′ avec le plan vertical BII′ qui touche le cylindre en (B, B′); or, ces deux plans ayant leurs traces parallèles, ils se couperont nécessairement suivant une horizontale I′B′ qui sera la tangente au point B′. Cette droite devient ainsi une limite de la courbe; et l'autre limite sera la tangente au point (C, C′), qui se trouvera pareillement horizontale.

230. *La tangente* en un point quelconque (M, M′) sera donnée par l'intersection du plan PQR′ avec le plan tangent du cylindre le long de l'arête verticale M; or ce dernier a pour trace la droite MT qui rencontre PQ au point T; de sorte que, sans chercher la seconde trace de ce plan tangent, on est certain que T est la trace horizontale de la tangente demandée. Dès lors, en projetant ce point sur la ligne de terre, et le joignant avec le point de contact, on obtiendra TM et T′M′ pour les projections de la tangente.

231. *Le rabattement* de la courbe pourrait s'effectuer en faisant tourner le plan PQR′ autour de sa trace PQ, pour l'abattre sur le plan horizontal; et comme dans ce mouvement de révolution, le point quelconque (M, M′) ne sortirait pas du plan vertical PM perpendiculaire à la charnière PQ, il suffirait de chercher (n° **17**) la distance du point P au point (M, M′), puis de porter cette distance sur PM prolongée, pour obtenir la position du point (M, M′) en rabattement. Les autres points se détermineraient d'une manière semblable.

Mais il vaut mieux rabattre le plan PQR′ sur le plan vertical, autour de sa trace QR′, parce que chaque horizontale telle que (KM, K′M′) conservera sa

grandeur absolue qui est KM, et deviendra parallèle à la position que prendra la trace PQ après ce rabattement. Pour trouver cette position, j'imagine que la droite (BC, B'C') soit prolongée jusqu'aux points S et R' où elle rencontre les deux traces du plan PQR'; et j'observe que cette droite, dont la vraie grandeur est le rabattement R'S'', fait partie d'un triangle rectangle dont les deux autres côtés sont QS et QR'. Si donc, avec ces trois côtés, on construit le triangle QR's, la base Q*sp* sera le rabattement de la trace QSP : alors, en tirant des parallèles à cette ligne Q*sp*, et en prenant les distances

$$I'b = IB,\quad Z'a = ZA,\quad Z'l = ZL,\quad K'n = KN,\quad K'm = KM, \ldots\ldots;$$

on obtiendra une série de points qui, réunis par un trait continu, fourniront la courbe *blmedcfab* pour la *vraie grandeur* de l'intersection du cylindre par le plan PQR'.

Quant à la tangente de ce rabattement, il suffira de prendre la distance Q*t* égale à QT, et de joindre le point *t* avec *m* par la droite *tm*.

232. Le *développement* de la surface s'effectuera, comme au n° **222**, en portant sur une droite indéfinie des longueurs égales aux arcs de la base ABDC, rectifiés au moyen de très-petites cordes, savoir :

$$B''L'' = BL,\quad L''M'' = LM,\quad M''E'' = ME,\quad E''D'' = ED, \ldots;$$

ensuite, par les points de division on élèvera des ordonnées égales aux portions correspondantes des génératrices, savoir,

$$B''\beta = GB',\quad L''\lambda = HL',\quad M''\mu = YM',\quad D''\delta = VD', \ldots..$$

et la courbe $\beta\lambda\mu\varepsilon\delta\gamma\varsigma\alpha\beta''$ sera la *transformée* de la section du cylindre.

La tangente de cette transformée au point μ est ce que devient la tangente primitive (MT, M'T'); or celle-ci étant l'hypoténuse d'un triangle rectangle qui a pour base MT et pour hauteur YM', et dont les angles demeurent *invariables* (n° **162**), il n'y aura qu'à prendre la sous-tangente M''T'' = MT, et tirer la droite T''μ. Cette ligne devra toucher la transformée en μ, point qui est ici assez près de l'inflexion; car cette circonstance arrive en ε, attendu que (*note* du n° **226**) le point (E, E') est évidemment celui où la tangente de la section serait perpendiculaire à la trace horizontale PQ du plan sécant, et qu'ainsi cette tangente est *la ligne de plus grande pente* du plan, pour le point (E, E').

PROBLÈME 2. *Trouver les points de section d'un plan quelconque* PQR′ *avec une courbe dont les projections sont* ABCDEF *et* A′B′C′D′E′F′.

233. Ce problème rentre tout-à-fait dans le précédent; car, si l'on imagine le cylindre vertical qui projette la courbe donnée suivant ABCDEF, et que l'on construise, comme au n° **228**, la projection verticale A″B″C″D″E″ de l'intersection de ce cylindre avec le plan PQR′, il est clair que les points cherchés devront se trouver sur cette intersection; et comme ils sont aussi sur la courbe donnée, il n'y aura qu'à examiner si ces deux courbes se rencontrent quelque part sur le plan vertical. Ici elles ont trois points communs, L′, M′, N′, que l'on projettera sur le plan horizontal en L, M, N, et ce sont là aussi les points où le plan PQR′ coupe la courbe proposée. Il est vrai qu'il existe un quatrième point de rencontre entre les projections verticales; mais on reconnaît aisément que ce point n'est pas commun aux deux courbes, parce qu'il tombe pour l'une sur l'arc CD, et pour l'autre sur l'arc DE. Fig. 62.

Nous avons ponctué les arcs de la courbe qui sont *au-dessous* du plan, parce que nous regardons celui-ci comme *existant* réellement, afin de faire mieux ressortir la situation des diverses parties de la ligne à double courbure : mais il n'en est pas de même dans l'épure 59, où le plan sécant se trouve combiné avec une surface, et où nous avons dû, suivant la convention générale établie au n° **108**, regarder ce plan comme enlevé, après avoir coupé le cylindre.

234. Dans le problème précédent et dans les questions analogues, on donne quelquefois à la courbe auxiliaire A″B″D″.... le nom de *courbe de recherche* ou *courbe d'erreur*, parce que les constructions que nous avons employées peuvent être présentées sous le point de vue suivant. Si le point inconnu, où la courbe proposée perce le plan PQR′, était projeté en B que je prends au hasard sur la projection horizontale ABCD...., il faudrait qu'en menant par ce point, considéré comme appartenant au plan, une parallèle (BK, K′B″) à la trace PQ, cette droite allât passer par le point (B, B′) de la courbe; or cette parallèle me fournit B″ au lieu de B′ pour projection verticale du point B; par conséquent, l'hypothèse d'où je suis parti est *une erreur*. En répétant un essai semblable sur le point C, je trouve une autre erreur en sens opposé, puisque j'obtiens une projection verticale C″ située plus haut que C′; d'où je conclus que le véritable point cherché est entre B et C, et qu'en réitérant de pareils essais pour des positions intermédiaires, je finirais par tomber sur le point de section (M, M′). Mais, au lieu de chercher à obtenir immédiatement ce point précis par des tâtonnements multipliés, il est plus commode de construire un certain nombre de points quelconques de la *courbe d'erreur;* puis, de les réunir par un trait con-

tinu dont la rencontre avec la courbe proposée fournira le point demandé (M, M′).

PROBLEME 3. *Étant donné un cylindre oblique à base quelconque, trouver 1° les projections de la* SECTION DROITE *de ce cylindre; 2° le rabattement de cette section; 3° le développement de la surface et la transformée de la courbe qui servait de base; avec les tangentes à ces diverses courbes.*

FIG. 60. **235.** Soit ABCD la base du cylindre que nous supposons plane, et dont nous adoptons le plan pour plan horizontal de projection; soit d'ailleurs (EE″, E′E″) la direction des génératrices. Alors, en menant à la base les tangentes BB″ et DD″ parallèles à EE″, ce seront les traces de deux plans tangents verticaux, et par conséquent ces droites formeront le contour apparent du cylindre sur le plan horizontal (nº 106); tandis que les tangentes EE′ et FF′, perpendiculaires à la ligne de terre, fourniront, pour le contour apparent sur le plan vertical, les génératrices E′E″ et F′F″, qui ne sont autre chose que les traces de deux plans tangents perpendiculaires au plan vertical. Nous supposons d'ailleurs que le cylindre est terminé et *fermé* par deux plans horizontaux E′F′ et E″F″, ce qui rendra invisibles sur le plan horizontal les arêtes CC″, FF″,..... et manifestera d'une manière plus sensible la situation de ces arêtes inférieures. Pour mieux accuser aussi la forme de la surface, nous regarderons toutes les arêtes que nous aurons besoin d'employer, non comme des lignes auxiliaires, mais comme des *génératrices* qui, marquées en *traits pleins* ou *ponctués*, feront discerner les parties supérieures ou antérieures d'avec les parties opposées de la surface.

236. Cela posé, puisque la *section droite* ou *section orthogonale* d'un cylindre, est la courbe tracée sur cette surface par un plan sécant perpendiculaire aux génératrices, et que d'ailleurs toutes les sections parallèles faites dans un cylindre sont identiques, menons, par un point quelconque Q de la ligne de terre, les traces PQ et QR′ respectivement perpendiculaires aux projections des génératrices, et cherchons l'intersection de la surface avec le plan PQR′. Pour obtenir cette intersection, nous couperons les deux surfaces par divers plans auxiliaires qui soient tous *verticaux* et *parallèles aux arêtes* du cylindre, parce qu'ainsi nous n'aurons à combiner que des sections rectilignes; d'ailleurs, afin de simplifier l'opération ultérieure du *développement*, il sera bon de conduire ces plans par des points de la base, qui soient deux à deux sur des cordes GM, EL,... parallèles à la trace PQ. Toutes ces dispositions étant admises, nous pouvons opérer de deux manières.

237. *Première méthode.* Soient GKI et II′ les traces d'un plan sécant vertical.

elles rencontrent celles du plan PQR′ aux points K et I′; par conséquent, l'intersection de ces deux plans est la droite (GI, I′K′); mais, comme il importe de déterminer cette ligne avec une grande exactitude, attendu que pour les autres plans auxiliaires il nous suffira évidemment de mener des parallèles à I′K′, nous allons construire un troisième point de cette droite. Cherchons, par exemple, celui qui est projeté en S; et pour cela, imaginons par ce point une horizontale parallèle à la trace PQ. Cette parallèle, qui sera nécessairement contenue dans le plan PQR′, aura pour projection horizontale SR, et elle ira percer le plan vertical en R′; donc R′S′, parallèle à la ligne de terre, est sa projection verticale; et si l'on y rapporte le point S en S′, ce dernier devra appartenir à la droite I′K′S′.

D'ailleurs, le même plan auxiliaire GKI a dû couper le cylindre suivant deux arêtes dont les pieds sont en G et H, et qui, par suite, sont projetées verticalement sur G′G″ et H′H″; par conséquent, la rencontre de ces deux droites avec la section K′S′ fournira deux points *g′* et *h′* de la projection verticale de la courbe demandée. Ensuite, on les projettera sur GHK en *g* et *h*, qui seront deux points de la projection horizontale de la même courbe.

Maintenant, considérons un autre plan sécant MNV. Il coupe le plan PQR′ suivant une droite dont la trace est (V, V′); et sans chercher d'autres points, nous sommes certains que cette section est V′*m′* parallèle à K′S′; puis, comme ce plan MNV coupe aussi le cylindre suivant les deux arêtes M′M″ et N′N″ qui rencontrent la droite V′*m′* en *m′* et *n′*, ce sont là deux nouveaux points de la courbe cherchée, qu'il restera ensuite à projeter horizontalement sur MV en *m* et *n*. Le même procédé, appliqué à d'autres plans sécants, fournira ainsi les projections *ambncd* et *a′m′b′n′c′d′* de la section orthogonale du cylindre.

238. *Deuxième méthode.* Soit ACY un plan vertical parallèle aux arêtes du cylindre : il coupe cette surface suivant deux génératrices partant des points A et C; et le plan PQR′ suivant une droite qui part du point Y et se trouve perpendiculaire à ces génératrices; donc, si l'on rabat ce plan sécant autour de AY, en portant la hauteur Y′Z′ de Y en Z″, la droite AZ″ et sa parallèle C*c*″ seront les positions nouvelles des génératrices, tandis que la perpendiculaire Y*c*″*a*″, abaissée sur ces lignes, fera connaître les rabattements *a*″ et *c*″ de deux points de la courbe cherchée. Ensuite, pour un autre plan sécant MNV, il suffira de mener M*m*″ et N*n*″ parallèlement à AZ″; et la droite V*m*″ parallèle à Y*a*″, fournira encore les rabattements *m*″ et *n*″ de deux nouveaux points de la *section droite* du cylindre. D'ailleurs, il deviendra superflu de tracer les projections de cette courbe, attendu que les rabattements ainsi obtenus suffiront, comme FIG. 60.

conséquent la projection verticale de la tangente coïncide avec celle de l'arête du cylindre. D'ailleurs, les points e' et f' seront ici les limites qui séparent la branche visible $e'd'm'f'$ de la branche invisible $e'd'h'f'$, pour l'observateur qui considère la projection verticale.

3°. Pour obtenir le point *le plus haut* et le point *le plus bas* de la courbe, c'est-à-dire ceux où sa tangente est *horizontale*, il faut chercher d'abord sur la base ABCD, quelle que soit sa forme, les points A et C où la tangente sera parallèle à la trace horizontale PQ du plan qui coupe le cylindre : alors, si l'on construit par le procédé général le point (a, a') de l'intersection qui sera situé sur l'arête AA″, je dis que la tangente en ce point se trouvera horizontale. En effet, cette tangente doit être (n° **215**) l'intersection du plan PQR′ avec le plan tangent le long de l'arête AA″; mais, par hypothèse, la trace horizontale Aθ de ce dernier plan est parallèle à PQ; donc ces deux plans ne peuvent se couper que suivant une droite parallèle à PQ, c'est-à-dire *horizontale*. Il en serait de même pour l'arête CC″, qui fournira un point (c, c') où la tangente de l'intersection sera encore horizontale. Ces deux points sont très-utiles à déterminer, pour tracer la courbe avec facilité et exactitude, sur les plans de projection.

240. Maintenant, construisons la tangente de l'intersection pour un point quelconque (m, m'). Ce point se trouve sur l'arête mM; et le plan tangent du cylindre le long de cette génératrice, ayant pour trace horizontale la tangente MT de la base, si l'on prolonge cette droite jusqu'à ce qu'elle coupe PQ en T, ce sera là un point de l'intersection du plan tangent avec le plan de la courbe, intersection qui n'est autre chose que la tangente cherchée (n° **215**). Donc, en joignant le point de contact (m, m') qui est déjà connu, avec le point T qui se projette verticalement en T′ sur la ligne de terre, on obtiendra Tm et T′m' pour les projections de la tangente demandée.

241. *Rabattement.* Pour obtenir l'intersection dans sa véritable forme, rabattons le plan PQR′ sur le plan horizontal, en faisant tourner le premier autour de sa trace PQ; puis, cherchons ce que devient alors le point quelconque (m, m') de la courbe. Ce point ne sortira pas du plan vertical mV perpendiculaire à la charnière; et comme sa plus courte distance à cette droite est évidemment la ligne $(m\text{V}, m'\text{V}')$, il n'y a qu'à évaluer, par le procédé général du n° **17**, la véritable longueur de cette ligne, puis la porter de V en μ, et ce dernier point sera le rabattement de (m, m'). Mais observons ici que, si l'on a employé la méthode du n° **238**, on connaîtra immédiatement la vraie longueur cherchée, car elle est évidemment Vm''; de sorte qu'en décrivant avec cette droite pour rayon un arc de cercle, il ira couper la ligne VM au point demandé μ. De

même, les arcs de cercle décrits avec les rayons $Y\alpha''$ et $Y\gamma''$, fourniront les points α et γ; et par des opérations semblables, on obtiendra la courbe $\alpha\lambda\mu\delta\nu\varphi\gamma\delta$ pour le rabattement de la section droite du cylindre.

242. La tangente (mT, m'T') de la courbe primitive ayant son pied T situé sur la charnière PQ, ce point restera immobile pendant le mouvement de rotation; et comme le point de contact (m, m') s'est transporté en μ, il s'ensuit que Tμ est le rabattement de la tangente, ligne qui devra toucher exactement la courbe $\alpha\lambda\mu\delta$..... au point μ.

243. *Développement.* Nous avons démontré (nº **166**) que, parmi toutes les courbes *planes* tracées sur un cylindre quelconque, la *section orthogonale* était la seule qui devînt une *ligne droite* après le développement de la surface. Par conséquent il ne suffisait pas ici de connaître la base ABCD du cylindre, pour être en état de le développer; mais il fallait nécessairement chercher la section droite (*abcd*, *a'b'c'd'*), et même construire le rabattement $\alpha\delta\gamma\delta$ de cette courbe, afin de pouvoir mesurer chacun des arcs $\alpha\lambda$, $\lambda\mu$,.... et de porter leurs longueurs *rectifiées*, à la suite les unes des autres, sur une même droite (*). Ainsi, en
Fig. 60 et 61. supposant qu'on ouvre le cylindre le long de l'arête AA'', on prendra sur une droite indéfinie xy les distances

$$\alpha_2\lambda_2 = \alpha\lambda, \quad \lambda_2\mu_2 = \lambda\mu, \quad \mu_2\delta_2 = \mu\delta, \quad \delta_2\nu_2 = \delta\nu, \ldots\ldots;$$

puis, par tous les points de division, on élèvera des perpendiculaires indéfinies sur la droite xy, et ce seront là (nº **161**) les positions des génératrices après le développement. Ensuite, pour obtenir la courbe suivant laquelle se transforme, par cette opération, la base inférieure ABCD, il faudra porter sur ces perpendiculaires, les longueurs des diverses portions de génératrices comprises entre cette base et la section droite, lesquelles ont pour projections

$$(Aa,\ A'a'),\ (Ll,\ L'l'),\ (Mm,\ M'm'),\ldots\ldots$$

et qui peuvent être évaluées par le procédé général du nº **17**. Mais ici encore la méthode du nº **238** offrira un avantage sensible; car elle fournira immédia-

(*) Nous avons déjà dit que, pour rectifier un arc tel que $\alpha\lambda$, il faut employer une ouverture de compas qui soit contenue un certain nombre de fois sur cet arc, mais assez petite pour que la corde qu'elle représente se confonde sensiblement avec l'arc partiel que soutendrait cette corde.

tement pour ces longueurs, les droites rabattues suivant

$$Aa'', \ Ll'', \ Mm'', \ldots\ldots,$$

que l'on transportera sur le développement en

$$\alpha_2 A_2, \ \lambda_2 L_2, \ \mu_2 M_2, \ldots\ldots,$$

et la courbe $A_2L_2M_2B_2C_2D_2A_2$ qui passera par les extrémités de ces droites, sera la *transformée* de la base ALMBCDA.

La transformée de la base supérieure s'obtiendrait généralement en portant, sur les perpendiculaires à xy et au-dessus de cette ligne, des distances égales aux portions de génératrices qui seraient comprises entre la section droite et la courbe $A''L''M''B''$,......; mais ici, où les deux bases sont parallèles, les longueurs des génératrices totales sont constantes; de sorte qu'il suffira d'évaluer la grandeur d'une seule arête (AA'', $A'A'''$), laquelle est donnée par le rabattement AA_3 (*fig.* 60), puis de porter cette grandeur constante sur les diverses perpendiculaires à xy, à partir des points A_2, L_2, M_2,..... On obtiendra ainsi, pour transformée de la base supérieure, une courbe $A_4L_4M_4C_4A_4$ identique avec $A_2L_2M_2C_2A_2$.

244. Observons ici que quand la base ABCD du cylindre sera un cercle, comme dans notre épure, ou même une ellipse dont un des axes BD se trouvera *perpendiculaire aux génératrices*, la section droite sera une ellipse dont les axes seront ($bd, b'd'$) et ($ac, a'c'$). En effet, le plan qui serait mené par les deux arêtes BB'' et DD'' ayant alors, par hypothèse, sa trace horizontale BD parallèle à PQ, il devra couper le plan PQR' suivant une corde (bd, $b'd'$) parallèle à PQ; par conséquent cette corde sera perpendiculaire sur les tangentes de la courbe aux points (b, b') et (d, d'), puisque ces tangentes sont dans les plans verticaux BB'' et DD''. Ainsi, la corde horizontale (bd, $b'd'$) est nécessairement un *diamètre principal*, ou un axe de l'ellipse dans l'espace, et le second axe, qui est perpendiculaire au premier, est (ac, $a'c'$). Mais il faut observer que ces deux droites, en se projetant sur le plan vertical, ne restent pas perpendiculaires, et deviennent seulement *diamètres conjugués* de $a'b'c'd'$; tandis qu'elles continuent d'être les axes de la projection horizontale $abcd$.

D'après cette remarque, et si l'on a eu soin de prendre les points G et M, E et L,..... deux à deux sur des droites parallèles à PQ, la section orthogonale rabattue suivant $\alpha\delta\gamma\delta$, se trouvera divisée par les génératrices en arcs égaux et sy-

métriquement placés quatre à quatre ; de sorte que, pour rectifier cette courbe, il suffira de mesurer seulement les trois arcs $\alpha\lambda$, $\lambda\mu$ et $\mu\delta$, puis de porter ces longueurs sur xy quatre fois de suite, mais en renversant l'ordre de ces arcs à chaque série. Les longueurs des portions de génératrices offriront aussi des relations analogues, qui permettront de n'employer que la première moitié de ces droites.

Fig. 60 et 61. **245.** Pour obtenir la tangente de la transformée, qui n'est autre chose que ce que devient la tangente primitive TM de la base du cylindre, après le développement de cette surface, il faut se rappeler (n° **162**) que, dans cette opération, le triangle projeté sur MmT reste *invariable* de forme. Or ce triangle est rectangle au point (m, m'); l'un des côtés projeté sur Mm est déjà rapporté sur le développement en $\mu_2 M_2$; le second côté Tm a pour longueur véritable $T\mu$ qui est son rabattement : donc, si l'on prend sur xy la distance $\mu_2 T_2 = \mu T$, et que l'on mène l'hypoténuse $T_2 M_2$, cette droite sera la tangente de la transformée au point M_2.

Puisque d'après ce que nous venons de dire pour un point quelconque, l'angle $T_2 M_2 \mu_2$ formé par une tangente et par l'arête correspondante, demeure le même avant et après le développement, il s'ensuit qu'aux points A_2, C_2, A_3, la transformée devra couper les génératrices *à angles droits;* car, sur le cylindre primitif, la tangente aux points A et C de la base, était évidemment perpendiculaire sur la génératrice correspondante.

PROBLÈME 4. *Étant donnés un cône droit et un plan, trouver,* 1° *les projections de leur intersection ;* 2° *le rabattement de cette courbe ;* 3° *le développement du cône et la transformée de l'intersection, ainsi que les tangentes à ces diverses courbes.*

Fig. 63. **246.** Un cône droit étant une surface de révolution engendrée par une droite qui rencontre l'axe, toute section perpendiculaire à cette dernière ligne sera un cercle ACBD, que nous regarderons comme la *directrice* ou la base du cône, et dont nous adopterons le plan pour plan horizontal de projection. Le sommet étant projeté en (S, S'), le contour apparent du cône sur le plan vertical, sera formé (n° **106**) par les deux génératrices $S'A'$, $S'B'$, qui répondent aux plans tangents $AA'S'$, $BB'S'$, perpendiculaires au plan vertical ; et si d'ailleurs on admet, pour simplifier un peu les opérations graphiques, que celui-ci a été choisi perpendiculaire au plan sécant, ce dernier aura pour traces des lignes telles que PQ et QR'.

247. Cela posé, coupons le plan PQR' et le cône par des plans auxiliaires qui

passent tous *par le sommet* (S, S′), et qui soient en outre *perpendiculaires au plan vertical*. Un de ces plans auxiliaires aura pour traces, une droite S′F′ menée par le point S′ dans une direction arbitraire, et une droite F′KF perpendiculaire à la ligne de terre. Comme cette dernière trace rencontre la base ACBD du cône en deux points F et K, j'en conclus que les génératrices SF et SK sont les sections de la surface par le plan auxiliaire S′F′F; mais celui-ci coupe le plan PQR′ suivant une droite nécessairement perpendiculaire au plan vertical, et projetée en (M′, XNM); donc la rencontre de cette droite avec les deux génératrices fournira, sur le plan horizontal, deux points M et N de la courbe demandée, lesquels seront d'ailleurs projetés verticalement en M′.

En répétant ces constructions pour d'autres plans auxiliaires, on obtiendra des points de l'intersection aussi multipliés qu'on le voudra; mais, pour l'opération ultérieure du développement, il sera utile de faire passer les traces horizontales des plans auxiliaires, par des points A, E, F, C,.... qui divisent le cercle en arcs égaux. Parmi ces plans, se trouveront les plans tangents AA′S′ et BB′S′, dont chacun fournira un point unique (G, G′) ou (H, H′); ce seront là deux sommets de l'intersection, car on voit aisément que la droite (GH, G′H′) divise en deux parties égales et à angle droit, toutes les cordes parallèles à MN; de sorte que cette droite est un *axe* de la section conique. Cette courbe qui, dans l'exemple actuel, est une ellipse, a pour projections GLMHN et G′H′.

248. La méthode précédente ne pourra pas servir à trouver les points de l'intersection, situés sur les deux arêtes SC et SD qui se projettent verticalement suivant l'axe du cône; parce qu'ici, les sections auxiliaires faites dans cette surface et dans le plan PQR′, se confondraient toutes sur le plan horizontal avec la droite CSD. Mais, si nous menons par le point I′ un *plan sécant horizontal*, il coupera le cône suivant un cercle du rayon I′V′ = SV, et le plan donné suivant une droite (I′, CD); par conséquent, la rencontre de cette ligne avec le cercle du rayon SV sur le plan horizontal, fournira les deux points demandés I et J. Fig. 63.

Ce second procédé aurait pu aussi être employé pour trouver les autres points de l'intersection du cône avec le plan PQR′; et d'ailleurs, il peut servir à vérifier la position des points pour lesquels, dans la première méthode, la rencontre des arêtes et des droites se fait sous un angle trop aigu.

249. La tangente en un point quelconque (M, M′) de la courbe, est (n° **215**) l'intersection du plan PQR′ avec le plan tangent du cône le long de l'arête SMF. Or ce dernier a pour trace horizontale la tangente FT de la base

ACBD; ainsi, le point T où se coupent les droites FT et PQ, est un point de la tangente cherchée, et même ce point en est la trace horizontale; donc enfin, cette tangente est la droite (TM, QM').

250. *Rabattement.* Faisons tourner le plan PQR' autour de sa trace QR', pour le rabattre sur le plan vertical. Dans ce mouvement, la droite (MNX, M') évidemment perpendiculaire à la charnière, demeurera à angle droit sur cet axe de rotation, et prendra la position M'm; donc, en portant sur cette dernière ligne, les distances

$$M'm = XM, \quad M'n = XN,$$

on obtiendra les points m et n pour les rabattements de M et N. Tous les autres points se trouveront semblablement, et la *vraie grandeur* de la section sera *glmihn.*

Par suite des mêmes considérations, on verra aisément que le pied T de la tangente TM, se transporte à une distance $Qt = QT$, sur une perpendiculaire à la charnière QR'; ainsi, en joignant les points t et m, on aura la droite tm qui devra *toucher* en m la courbe rabattue *glmh.*

Fig. 63. **251.** *Développement.* Nous savons (n° **170**) qu'une surface conique quelconque est développable, et que dans cette transformation, les génératrices ou des portions quelconques de ces droites, ne changent pas de longueur. Donc, puisqu'ici où le cône est droit, les arêtes comprises depuis le sommet jusqu'à la base sont toutes égales, il est évident que les extrémités de ces droites se trouveront situées, après le développement, sur une circonférence de cercle ayant pour centre le sommet du cône et un rayon égal à S'A'. Ainsi, choisissons sur le plan où l'on veut exécuter le développement, un point arbitraire S"; et avec un rayon S"A" = S'A', décrivons un cercle sur lequel nous prendrons un arc A"B"A" qui soit une fraction de la circonférence totale, exprimée par le rapport de SA à S'A'; puis, tirons le rayon A" S", et alors le secteur S"A" B"A" représentera exactement la nappe inférieure du cône, développée sur le plan que nous avons choisi. Quant à la nappe supérieure, nous en faisons abstraction ici, parce qu'elle n'est pas rencontrée par le plan PQR'; mais, dans un autre exemple, nous verrons ce qu'il faut faire pour cette seconde nappe.

252. Maintenant, pour obtenir la transformée de l'intersection (GLMH, G'H'), et en admettant que le cône a été ouvert le long de l'arête (SA, S'A'), prenons sur la circonférence A" B"A" qui est elle-même la transformée de la base

ACBD, des arcs (*)

$$A''E'' = AE, \quad E''F'' = EF, \quad F''C'' = FC, \ldots..,$$

puis, tirons les rayons $S''E''$, $S''F''$,..... sur lesquels il faudra porter des longueurs respectivement égales aux portions de génératrices, comprises entre le sommet et les divers points de la courbe (GMH, G'H'). Or, si l'on considère, par exemple, le point (M, M') situé sur la génératrice (SF, S'F'), et que l'on fasse tourner cette droite autour de l'axe, jusqu'à ce qu'elle devienne parallèle au plan vertical, il est évident qu'elle ira coïncider avec l'arête (SA, S'A'), tandis que le point M' restera sur une horizontale et se transportera en μ : donc alors, $S'\mu$ sera la véritable longueur de la droite primitive (SM, S'M'). Ainsi, après avoir mené par tous les points L', M',.... des horizontales, il faudra porter sur les rayons du développement, les distances

$$S''G'' = S'G', \quad S''L'' = S'\lambda, \quad S''M'' = S'\mu, \quad S''I'' = S'V', \ldots..,$$

et la courbe $G''L''M''I''H''N''G''$ sera la transformée de la section faite dans le cône par le plan donné PQR'.

253. Cette transformée, considérée en elle-même, ne se terminerait pas brusquement aux points G'' et G'''; mais elle se prolongerait en offrant une infinité de branches égales à $G''H''G'''$, lesquelles finiraient cependant par coïncider exactement, si le rapport de l'apothème S'A' au rayon SA de la base, était un nombre commensurable : c'est ce que montre clairement l'équation de cette courbe, où il entre une fonction circulaire et *périodique* (**). Mais, pour se rendre

(*) Ici il ne s'agit pas de *rectifier* précisément les arcs AE, EF,..., mais de les changer en arcs d'un rayon différent et de mêmes longueurs absolues que les arcs primitifs. Or, si l'on emploie des ouvertures de compas propres à représenter des cordes sensiblement confondues avec les arcs partiels qu'elles sontendraient sur le cercle ACBD, puis que l'on reporte ces ouvertures de compas sur la circonférence $A''B''A'''$, on approchera encore plus de la vérité que si on les portait sur une ligne droite; par conséquent, le procédé est le même que pour rectifier les arcs AE, EF,... Toutefois, dans le cas actuel on opérera avec plus d'exactitude et de facilité, si, comme nous l'avons recommandé, on a eu soin de prendre les points A, E, F,..... à égales distances sur la base circulaire, parce qu'alors il suffira de diviser l'arc total $A''B''A'''$ en autant de parties égales qu'il y en avait sur le cercle ACBD.

(**) Pour obtenir cette équation en coordonnées polaires, représentons par R, h, l, le rayon Fig. 63.
de la base, la hauteur et l'apothème du cône; soient d'ailleurs k=I'Y la hauteur du point (I', S)

compte synthétiquement de ces circonstances, il n'y a qu'à imaginer que le cône est enveloppé par une surface flexible, qui a fait un nombre indéfini de révolutions : alors, toutes ces nappes superposées ayant été coupées simultanément par le plan PQR', elles produiront, en se déroulant de dessus le cône, une infinité de branches identiques qui se construiront graphiquement en continuant de porter sur la circonférence A"B"A", et au-delà du point A", des arcs

---

où le plan PQR' coupe l'axe, et ω l'angle de ce plan avec l'horizon : nommons enfin ρ la distance du sommet à un point quelconque (M, M') de la courbe, et α l'angle ASF, c'est-à-dire l'arc qui mesure cet angle dans un cercle dont le rayon est l'unité ; d'où il résulte que l'arc AF $=$ Rα. Avec ces données, il serait bien facile de former les équations du plan et de la droite (SF, S'F'), puis de trouver la distance du sommet à leur point de rencontre, distance que l'on égalerait à ρ ; mais nous pouvons y arriver plus promptement de la manière suivante :

Dans le triangle formé par l'axe du cône avec la génératrice (SF, S'F'), sur laquelle est situé le point (M, M') dont nous appellerons z la hauteur, on a évidemment

$$h : h - z :: l : \rho ;$$

ensuite dans le triangle S'F'Y qui est la projection verticale du précédent, et où la droite $M'O = \frac{OI'}{\tang \omega} = \frac{k - z}{\tang \omega}$, on trouvera aisément

$$h : h - z :: R \cos \alpha : \frac{k - z}{\tang \omega} ;$$

alors si on élimine z entre les équations fournies par ces deux proportions, il viendra

$$\rho = \frac{l(h - k)}{h - R \tang \omega . \cos \alpha} .$$

Ce résultat contient deux variables ρ et α dont la première conserve la même grandeur sur le développement du cône ; mais l'angle α est alors remplacé par l'angle G"S"M" $= \theta$ qui correspond, dans le cercle du rayon l, à un arc A"F" dont la longueur absolue égale celle de l'arc AF dans le cercle du rayon R ; par conséquent on a la relation $R\alpha = l\theta$, au moyen de laquelle on peut éliminer α de l'équation précédente qui devient enfin

$$\rho = \frac{l(h - k)}{h - R \tang \omega . \cos \frac{l\theta}{R}} .$$

Cette équation que nous laissons à discuter par le lecteur, représentera toujours la transformée, soit que l'intersection primitive se trouve une ellipse, une parabole ou une hyperbole, en faisant attention que si ω varie pendant que k demeure constant, on aura pour ces trois genres

$$R \tang \omega < h , \text{ ou} = h , \text{ ou} > h .$$

égaux a AE, EF, FC,...... avec des rayons vecteurs égaux à ceux que l'on a déjà employés.

254. Quant à la tangente au point M″ de la transformée, il faut se rappeler (nº **170**) que cette droite doit faire ici avec S″F″, le même angle que formait primitivement la tangente (MT, M′Q) avec cette génératrice; et comme cela est vrai également de la tangente FT à la base, il s'ensuit que le triangle rectangle projeté sur MFT, demeure *invariable* de forme quand le cône se développe. Or, l'un des côtés de ce triangle est déjà rapporté sur le développement en M″F″; donc, si on lui élève une perpendiculaire F″T″ = FT, et que l'on tire la droite T″M″, cette ligne devra toucher la transformée au point M″.

Il résulte aussi du principe que nous venons de rappeler, qu'aux points G″, H″, G″, la courbe doit couper à angle droit le rayon vecteur correspondant; car, aux points primitifs (G, G′) et (H, H′), la tangente de l'intersection se trouvait évidemment perpendiculaire sur la génératrice du cône.

255. *Cas où la section conique est une* HYPERBOLE. Soient toujours ACBD la base du cône droit, et A′S′b′, B′S′a′, les arêtes qui forment le contour apparent de cette surface sur le plan vertical : nous tiendrons compte ici des deux nappes, en les supposant terminées à deux sections horizontales A′B′, a′b′, qui se trouvent également distantes du sommet, et qui par conséquent donnent lieu à deux cercles projetés l'un et l'autre sur ACBD. Quant au plan sécant, disposons-le de manière à couper les deux nappes du cône; et en admettant toujours que le plan vertical lui est perpendiculaire, ses traces seront R′Q et QP. FIG. 64.

256. La construction de la courbe d'intersection pourrait s'effectuer comme dans l'autre cas, au moyen de plans auxiliaires qui seraient menés par le sommet, perpendiculairement au plan vertical; mais à cause de la grande obliquité que présenteraient ici les sections rectilignes, il sera plus exact d'employer des plans horizontaux. Soit donc $\mu'\gamma'$ un de ces plans; il coupe le cône suivant un cercle projeté sur $\mu M\gamma$, et le plan donné PQR′ suivant une droite (M′, XNM); par conséquent, les points M et N communs à ces deux sections sur le plan horizontal, appartiennent à la courbe demandée dont une des branches est ainsi (PMGNI, QG′).

L'autre branche (RLHKV, H′R′) se construira de même; et l'on pourra employer une section $\delta'\lambda' = \mu'\gamma'$, laquelle fournira deux points (L, L′) et (K, L′) projetés encore sur le cercle $\mu M\gamma$. Nous ne répéterons pas ici ce que nous avons dit dans le problème précédent, sur les *sommets* et la construction de la tangente; mais nous allons passer à une recherche particulière au cas actuel.

257. Lorsqu'une courbe admet une branche infinie, et qu'on éloigne de plus en plus le point de contact d'une tangente, cette droite varie de situation, et quelquefois elle se transporte tout entière à l'infini, en même temps que le point de contact, ainsi que cela se présente dans la parabole du second degré; mais, dans d'autres cas, il arrive que cette tangente variable reste toujours en deçà d'une certaine limite, qu'elle n'atteindrait qu'autant que le point de contact serait à une distance infinie. Alors cette limite des positions de la tangente se nomme une *asymptote*, et l'on énonce cette propriété d'une manière abrégée, en disant que *l'asymptote d'une courbe est la tangente pour un point de contact infiniment éloigné.*

Fig. 64. **258.** D'après cela, proposons-nous de construire les asymptotes de la section faite dans le cône, par le plan PQR'. Le point de contact d'une tangente de cette espèce, devant être à une distance infinie, se trouvera nécessairement situé sur *une génératrice parallèle au plan sécant;* si donc on mène par le sommet, et parallèlement à PQR', un plan $S'\alpha'\alpha$ qui coupe le cône suivant les droites $S\alpha$ et $S6$, ces deux arêtes seront celles qui contiennent les points de contact des asymptotes. Considérons la première, et rappelons-nous que le plan qui touche le cône tout le long de la génératrice $S\alpha$, quelque prolongée qu'elle soit, a pour trace horizontale la tangente $\alpha\theta$ de la base; donc, l'asymptote qui doit être (n° **213**) l'intersection de ce plan tangent avec le plan PQR', passera par le point θ où se rencontrent leurs traces; et elle sera précisément la droite $\theta\omega$ parallèle à $S\alpha$, puisque ces deux plans sont l'un et l'autre parallèles à cette génératrice.

On construira de même l'autre asymptote $\varphi\omega$, qui sera parallèle à l'arête $S6$; et les deux asymptotes devront se couper en un point ω, qui soit situé précisément au milieu de l'axe réel GH, c'est-à-dire au centre de la courbe.

259. Si l'on appliquait la méthode précédente au cas d'une section *parabolique*, ce qui exigerait que le plan PQR' eût *sa trace verticale parallèle à* S'A', on trouverait que les deux arêtes $S\alpha$ et $S6$ se confondraient avec SA; de sorte que cette dernière droite étant la seule génératrice du cône qui fût parallèle au plan sécant PQR', la section aurait bien encore une branche infinie, mais elle n'admettrait plus d'asymptote; car le plan PQR' et le plan tangent le long de SA, qui devraient donner cette tangente par leur intersection, se trouveraient évidemment parallèles entre eux.

260. *Rabattement.* Cette opération s'effectuera comme dans le n° **250**, en portant sur chaque droite $M'm$ perpendiculaire à la trace verticale QR', des distances $M'm = XM$, et $M'n = XN$. Quant aux asymptotes, on rapportera d'une

manière semblable leurs pieds θ et φ, en θ' et φ'; puis, on joindra ces derniers points avec le centre (ω, ω') rabattu en ω''.

261. *Développement.* D'après les principes rappelés au n° **251**, il faudra décrire d'un point arbitraire S″, et avec un rayon égal à l'apothème S′A′, un cercle sur lequel on prendra un arc B″A″B‴ qui soit à la circonférence totale, dans le rapport de SA avec S′A′; et le secteur S″B″A″B‴ représentera le développement de la nappe inférieure du cône, en supposant qu'on ait ouvert cette surface le long de l'arête (BSA, B′S′a'). Mais, comme la nappe supérieure se développe en même temps que la première, et par un mouvement contraire autour du somet qui peut être censé immobile, cette seconde nappe aplanie viendra occuper un secteur S″$a''b''a'''$ égal au précédent, et dont les rayons extrêmes seront les prolongements de S″B″ et de S″B‴. Pour rendre plus sensible la distinction de ces deux secteurs, nous avons supposé ici que la nappe supérieure se terminait à un cercle $a_2b_2a_2$ d'un rayon un peu moindre que S″B″, et nous avons *ponctué* les parties du secteur inférieur qui sont recouvertes par l'autre; cependant, pour effectuer les constructions dont nous allons parler, il faudra toujours opérer sur le cercle primitif B″A″B‴b''. Fig. 64 et 65.

262. Cela posé, sur le rayon S″A″ qui divise en deux parties égales le premier secteur, on prendra la distance S″G″ = S′G′, et le point G″ sera la position du sommet (G, G′). Ensuite, pour un point quelconque (M, M′) de la courbe, on mènera la génératrice SMF dont la position S″F″ sur le développement, s'obtiendra en prenant l'arc A″F″ = AF; et comme la véritable distance du sommet au point (M, M′) est égale à S′μ' (n° **252**), si l'on prend une longueur S″M″ = S′μ', le point M″ sera la position actuelle de (M, M′). Les autres points se détermineront d'une manière semblable, et la *transformée* de la branche inférieure de la section conique, sera P″M″G″N″I″.

Quant à l'autre branche, elle se trouvera divisée en deux parties séparées, puisque le sommet (H, H′) était placé sur la génératrice B′S′a' suivant laquelle on a ouvert le cône, et que cette arête s'est transportée en S″a'' d'une part, et de l'autre en S″a'''. On portera donc sur ces dernières droites, deux distances S″H″ et S″H‴ égales à S′H′, et les points H″, H‴, seront les positions actuelles du sommet H′. Ensuite, pour un point quelconque (L, L′) de cette branche, on tirera la génératrice SLC dont la position S″C″ sur le développement, se trouvera en prenant l'arc a''C″ = AC; et sur le rayon S″C″, il restera enfin à porter une longueur S″L″ = S′λ' qui est la véritable distance du sommet au point (L, L′). Par des opérations analogues, on trouvera que la section faite dans la nappe supérieure du cône, a pour transformées les deux branches

$H''L''R''$ et $H''K''V''$, lesquelles doivent couper *à angles droits* les rayons $S''a$ et $S''a''$.

Fig. 64 et 65. **263.** Cherchons maintenant à retrouver les asymptotes, et observons bien que ces droites étant situées, non sur la surface même du cône, mais dans les plans tangents le long des génératrices $S\alpha$ et $S\mathcal{E}$, elles conserveront leurs positions primitives par rapport à ces arêtes autour desquelles les plans tangents ne font que tourner, lorsqu'on développe la surface. Commençons donc par déterminer ces arêtes sur le développement, en prenant les arcs $A''\alpha''=A\alpha$, $A''\mathcal{E}''=A\mathcal{E}$, et tirant les rayons $S''\alpha''$ et $S''\mathcal{E}''$: ensuite, sur les tangentes aux points α'' et $\mathcal{E}''$, nous prendrons des distances $\alpha''\theta''=\alpha\theta$, $\mathcal{E}''\varphi''=\mathcal{E}\varphi$, et les droites $\theta''O$, $\varphi''O$, respectivement parallèles aux génératrices $S''\alpha''$, $S''\mathcal{E}''$, seront les positions actuelles des asymptotes primitives.

Le point O où ces droites se coupent, doit se trouver sur le rayon $S''A''$, à cause de la symétrie des constructions précédentes, à droite et à gauche de ce rayon; mais il ne faut pas croire que ce point O est le même que l'intersection ω des asymptotes primitives, car ces droites ont changé de position l'une par rapport à l'autre.

Néanmoins, les lignes $\theta''O$ et $\varphi''O$ doivent se trouver *asymptotes* relativement aux diverses branches de la transformée. En effet, comme la forme de cette courbe doit toujours être la même, quel que soit le plan sur lequel on a développé le cône, nous pouvons concevoir que ce développement a été fait sur le plan tangent le long de l'arête $S\alpha$; alors l'asymptote $\theta\omega$ qui se trouvait dans ce plan, a dû rester immobile, aussi bien que l'élément infiniment éloigné qu'elle avait de commun avec l'hyperbole : donc cet élément est encore commun à la droite $\theta''O$ et à la transformée; par conséquent cette droite est bien une asymptote de la branche $G''M''P''$. On raisonnerait de même pour les autres branches; au surplus, ce résultat n'est qu'une conséquence de ce que nous avons démontré pour une tangente ordinaire (nº **170**).

264. *Sur le point d'inflexion.* Dans la *fig.* 65, la branche de courbe $H''L''R''$ qui commence par tourner sa concavité vers l'asymptote, finira nécessairement par présenter sa convexité à cette espèce de tangente; il doit donc y avoir un point d'*inflexion* sur cette branche, et il importe de pouvoir assigner l'endroit où arrive cette circonstance remarquable. Or on y parvient en s'appuyant sur le lemme suivant qui est facile à démontrer : Lorsqu'une droite est oblique à un plan, l'angle aigu qu'elle forme avec sa projection orthogonale sur ce plan, est le *minimum* de tous ceux qu'elle fait avec les diverses lignes tracées par son

pied dans ce même plan; et le *maximum* de ces angles est celui qu'elle forme avec le prolongement de sa projection.

Cela posé, soient PQR le plan sécant et ABMDEF la section qu'il trace dans le cône dont la base peut être une courbe quelconque : si du sommet S nous abaissons la perpendiculaire ST sur le plan sécant, et que par le pied T nous menions la tangente TMD à la section, je dis que c'est au point de contact M qu'il se produira une inflexion dans la transformée de la courbe ABMDEF. En effet, partageons celle-ci en *éléments*, et imaginons que le développement du cône soit exécuté sur le plan tangent STMP. Alors, l'angle SMT qui est *minimum* pour la génératrice SM, se trouvera plus petit que SMB, et conséquemment le côté MB prendra, après le développement, une position MB' située au-dessous de MT. Ensuite, pour la génératrice SD, l'angle *maximum* SDP sera plus grand que SDE; donc, après le développement, le côté DE occupera une position DE' située au-dessus de DP. Par conséquent la transformée A'B'MDE'F' présentera bien une *inflexion* par rapport à sa tangente en M, qui est le prolongement de l'élément MD.

Ainsi, dans l'épure 64, on abaissera sur le plan sécant PQR', la perpendiculaire S'T' que l'on prolongera jusqu'à sa rencontre avec le plan *a'b'* de la base circulaire; et en tirant par ce point de rencontre une tangente à cette circonférence, on obtiendra la génératrice du cône sur laquelle sera situé le point d'inflexion, ce qui suffit bien pour retrouver la position précise de ce point sur le développement de la *fig.* 65. La même méthode s'appliquera évidemment à l'épure 63, où la transformée présente aussi une inflexion; mais ce point *singulier* n'existerait plus, si le pied de la perpendiculaire abaissée du sommet S', tombait dans l'intérieur de la section elliptique.

PROBLÈME 5. *Trouver l'intersection d'un cône quelconque par un plan, le développement de la surface, et la transformée de l'intersection.*

265. Quel que soit le cône en question (dont nous supposerons connue la trace horizontale, puisqu'on saurait la construire en prolongeant les génératrices jusqu'à ce plan fixe), il n'y aura qu'à couper cette surface et le plan donné, par une suite de *plans auxiliaires* menés tous *par le sommet*, et les choisir, si l'on veut, *parallèles à la trace horizontale du plan sécant.* Alors chaque plan auxiliaire produira dans les deux surfaces, des sections *rectilignes* bien faciles à trouver, et dont les points de rencontre appartiendront à la courbe demandée. Il nous paraît peu nécessaire d'ajouter ici un exemple que le lec-

teur pourra se proposer lui-même; d'autant plus que nous rencontrerons bientôt des constructions analogues, dans des questions plus générales.

266. *Des branches infinies.* Pour reconnaître si la section du cône par le plan donné P admettra quelque branche de ce genre, il faut généralement conduire par le sommet un plan P′ qui soit parallèle à P, et examiner si la trace horizontale du plan P′ rencontre quelque part la base du cône. Lorsque ces lignes n'auront aucun point commun, on pourra affirmer qu'aucune des génératrices du cône n'est *parallèle au plan* P, et qu'ainsi la section n'aura que des branches *fermées*. Mais si la trace du plan P′ coupe la base du cône en un ou plusieurs points, les diverses génératrices G, G′,.... qui aboutiront à ces points, se trouveront évidemment *parallèles au plan* P, et dès lors elles n'iront le rencontrer qu'à l'infini; par conséquent, la section admettra autant de *branches infinies.*

L'*asymptote* de la branche correspondante à la génératrice G, s'obtiendra en cherchant l'intersection du plan P avec le plan tangent mené suivant cette génératrice G. Si ce plan tangent coïncidait avec P′, ce qui arrivera quand la trace horizontale de ce dernier se trouvera *tangente* à la base du cône, alors la branche infinie serait *dépourvue d'asymptote.*

267. Quant au *développement* de la surface conique, il faudrait partager la base en arcs assez petits pour être sensiblement confondus avec leurs cordes; alors, en mesurant une de ces cordes et les deux arêtes qui aboutissent à ses extrémités, on pourrait former avec ces trois droites et sur un plan quelconque, un triangle qui représenterait *un élément superficiel* du cône : puis, à la suite de ce triangle, on construirait de même l'élément adjacent qui aurait un côté commun avec le précédent; et en continuant de la sorte, on obtiendrait tous les éléments du cône étendus sur un plan, ce qui donnerait bien le développement de cette surface.

A la vérité cette marche, bonne en théorie, offrirait peu d'exactitude dans la pratique, si les opérations n'étaient pas faites avec beaucoup de soin; parce qu'il faut ici construire une suite de triangles où l'un des côtés est extrêmement petit par rapport aux deux autres, et que les erreurs partielles peuvent s'accumuler. Il serait plus avantageux, sans doute, de connaître d'avance sur le développement, une ligne droite ou circulaire sur laquelle il ne resterait plus qu'à prendre des arcs déterminés, pour fixer la position nouvelle des génératrices. Or cet avantage s'obtient en cherchant l'intersection du cône par une sphère concentrique; mais cette méthode que nous expliquerons plus loin (n^os **330** et **331**), n'est pas non plus exempte d'inconvénients assez graves.

Quand une fois le développement du cône est effectué par une méthode ou

par une autre, on y construit la *transformée* d'une section plane, ou celle de toute autre courbe, en portant sur les rayons du développement, des longueurs égales aux distances du sommet aux divers points de cette courbe, comme nous l'avons vu dans le n° **252**.

PROBLÈME 6. *Construire l'intersection d'un plan avec une surface de révolution.* Fig. 45.

268. Prenons pour exemple le *tore* dont nous avons déjà parlé au n° **158**, et qui a pour méridien le cercle (A'B'C'B'', AC) tournant autour de la verticale (O, O''Z') située dans son plan; puis, cherchons l'intersection de cette surface avec le plan M'T'T qui lui est *tangent* au point (M', M) de la nappe *intérieure*, car nous avons remarqué précédemment (n° **158**) que les plans tangents à cette nappe devaient couper la surface.

Employons ici des plans auxiliaires qui soient horizontaux, et soit F'K'N' la trace verticale d'un de ces plans. Il coupe le tore suivant deux cercles dont les rayons sont ON = I'N' et OM = I'K', tandis que son intersection avec le plan M'T'T est la droite (F', Ff) perpendiculaire au plan vertical; donc les quatre points F, F'', f'', f, où cette droite rencontre les deux cercles, appartiennent à la courbe demandée. Les autres points se trouveront d'une manière semblable; mais quand on arrivera aux parallèles extrêmes D''B'' et D'B', on n'obtiendra, pour chacun, que deux points G et g, ou H et h; tandis qu'en opérant sur le plan horizontal V'M'L', on trouvera trois points R, r et M, dont le dernier est celui où les branches de la courbe forment un *nœud*. D'après cela, l'intersection cherchée a pour projections.

MHREFGE''M*hege''*M, et G'H'.

Nous avons ponctué les parties de cette courbe qui se trouvent au-dessous de l'équateur et du cercle de gorge, parce qu'elles sont *invisibles* sur le plan horizontal; et sur le même plan, la courbe doit *toucher* ces deux cercles aux points E, E'', e'', e, attendu que le plan tangent du tore est alors évidemment vertical, et qu'ainsi la tangente de la courbe et celle du parallèle, qui sont toutes deux dans ce plan, se confondent en projection horizontale.

269. Cherchons la tangente de la courbe pour un point quelconque (F, F'); et puisque cette droite doit être (n° **213**) l'intersection du plan M'T'T avec le plan tangent du tore au point (F, F'), construisons d'abord ce dernier. D'après la méthode générale exposée n°s **133** et **134**, il faut ramener le point donné (F, F'), sur le méridien principal en (N, N'), puis tirer la tangente N'P' dont le pied est évidemment P; ensuite, après avoir reporté ce point P en π sur la trace

du méridien OF, on mènera perpendiculairement à ce méridien, la droite $\pi\theta$ qui sera la trace horizontale du plan tangent au point (F, F′) du tore. Il serait bien facile de trouver la trace verticale de ce même plan : mais cela nous est inutile ici ; car le point θ où se coupent les droites $\pi\theta$ et T′T, appartient évidemment à l'intersection du plan tangent avec le plan M′T′T, ou bien à la tangente cherchée, laquelle est par conséquent la droite (θF, T′F′).

Cette méthode devient insuffisante pour obtenir la tangente de la section au *point singulier* (M, M′), parce qu'en cet endroit le plan de la courbe se confond avec le plan tangent du tore ; mais nous apprendrons plus tard (n° **734**) à effectuer cette recherche intéressante.

270. Pour obtenir la courbe dans ses vraies dimensions, on rabattra le plan M′T′T autour de sa trace horizontale T′T, et un point quelconque tel que (F, F′), restera sur une perpendiculaire à la charnière, en se transportant à une distance indiquée par T′F′. Il sera donc bien facile d'avoir le rabattement de la section, que nous n'avons pas exécuté ici, afin de laisser lire plus nettement les constructions principales.

PROBLÈME 7. *Intersection d'un plan avec un hyperboloïde de révolution à une nappe.*

271. Nous savons (n° **140**) que cette surface peut être engendrée par une hyperbole qui tourne autour de son axe imaginaire, ou bien par la révolution d'une droite mobile autour d'une droite fixe, lesquelles ne sont pas dans un même plan. Si nous partions de la première définition, la méridienne serait connue, et nous rentrerions tout à fait dans le problème du n° **268** ; c'est pourquoi nous emploierons l'autre mode de génération, et nous représenterons la
FIG. 68. droite fixe par (O, O′Z′), et la droite mobile par (AD, A′D′). Cette dernière ligne est supposée ici *parallèle au plan vertical,* mais il sera toujours bien facile de l'amener dans cette position (n° **149**), si d'abord on l'avait assignée dans toute autre. La plus courte distance des deux droites est l'horizontale (OD, D′) qui décrit le cercle de gorge (XDY, X′Y′), et le pied (A, A′) de la droite mobile parcourt le cercle AαB qui est la trace horizontale de la surface. Nous nous bornerons ici à ce petit nombre de données, pour fixer l'hyperboloïde en question, sans exécuter la *représentation graphique* de cette surface *sur le plan vertical,* où le contour apparent serait une hyperbole (n° **148**) ; et pour laisser voir plus distinctement la courbe d'intersection sur le plan horizontal, nous réduirons la surface à sa nappe inférieure, c'est-à-dire que nous supposerons la droite mobile terminée au point (D, D′). Enfin, nous rappellerons que la génératrice du

second système (n° **141**) serait (BD, B'D'); et qu'en transportant ces deux génératrices parallèlement à elles-mêmes, dans les positions (D'A', O*a*), (D'B', O*b*), elles produiraient alors par leur révolution autour de l'axe vertical, *le cône asymptote* (n° **146**) dont la base serait le cercle *ab*, et dont le sommet (O, D') coïncide avec le centre de l'hyperboloïde qui n'est autre que le centre du cercle de gorge.

272. Cela posé, soient PQ et QR' les traces du plan sécant donné, ce qui suppose que l'on a choisi le plan vertical de projection perpendiculaire à celui-là. Pour obtenir son intersection avec l'hyperboloïde, j'emploie encore des plans auxiliaires horizontaux, tels que celui qui a pour trace verticale M'V'. Ce plan rencontre la génératrice (AD, A'D') au point (V', V), et par conséquent il coupe la surface de révolution suivant un cercle dont la projection horizontale est la circonférence VMN décrite avec la distance OV pour rayon : mais ce même plan M'V' coupe le plan donné PQR', suivant une droite (M', IMN) perpendiculaire au plan vertical; donc les points M et N communs à cette droite et au cercle précédent, sont deux points de la courbe demandée sur le plan horizontal; ils sont d'ailleurs projetés verticalement l'un et l'autre en M'. En menant d'autres plans auxiliaires parallèles à M'V', on déterminera les divers points de l'intersection qui, selon l'inclinaison du plan PQR', peut être une ellipse, une parabole, une hyperbole, ou une variété de ces courbes.

273. *Des sommets.* La droite (OP, R'Q) qui partage évidemment toutes les cordes parallèles à MN, en deux parties égales et à angles droits, est nécessairement un *axe* de la courbe, quel que soit le genre de celle-ci; si donc cette courbe a des points situés sur cet axe, ce seront les *sommets*, et il importe de les obtenir directement. Pour cela, il faudrait faire tourner la génératrice (AD, A'D') jusqu'à ce qu'elle vînt rencontrer (OP, R'Q) en un certain point G; mais si, au contraire, nous laissons immobile la première de ces lignes, et que nous fassions tourner la droite (OP, R'Q) autour de la verticale O qu'elle coupe en (O, R'), elle ira rencontrer la génératrice (AD, A'D') en un point que j'appellerai K, et qui se trouvera évidemment *sur le même parallèle* où aurait été situé le sommet G. Or il est facile de construire le point K, qui est l'intersection de la droite (AD, A'D') avec le cône engendré par la révolution de (OP, R'Q); car après avoir décrit le cercle du rayon OP, base de ce cône *auxiliaire*, on conduira par le sommet (O, R') et par la génératrice (AD, A'D'), un plan dont on trouvera la trace horizontale AC en menant par ce sommet une parallèle (R'C', OC) à la génératrice; alors, cette trace AC coupant le cercle OP en deux points F et E, fera connaître les deux arêtes OF et OE du

cône auxiliaire qui sont rencontrées par la génératrice (AD, A′D′), et par suite on aura aussi leurs points de section K et L. Maintenant, pour revenir de ces points aux véritables *sommets* G et H, on décrira avec les rayons OK et OL, deux cercles dont chacun couperait la droite OP, sur le plan horizontal, en deux points; mais on distinguera aisément lequel est vraiment situé sur la ligne indéfinie (OP, R′Q), en traçant les projections verticales K′G′ et L′H′ de ces deux cercles.

Il est bon de commencer le tracé de l'épure par la construction des sommets; parce qu'une fois ces points déterminés, on pourra mener les plans auxiliaires, tels que M′V′, à des distances convenables, et que d'ailleurs la recherche de ces sommets fera connaître le genre de la section, ainsi que nous allons l'expliquer.

Fig. 68. **274**. *Discussion*. 1°. Si la trace AC coupe la base du cône *auxiliaire* décrit par la droite (OP, R′Q), et fournit deux arêtes OF et OE qui rencontrent l'une et l'autre la génératrice AD, la section offre *deux sommets* situés sur (OP, R′Q); et par conséquent cette courbe est *une ellipse*, ou *une hyperbole* dont cette droite est l'axe réel. Ces deux cas se distingueront aisément l'un de l'autre, en examinant si un plan quelconque M′V′ mené entre les points (G, G′) et (H, H′) fournit, ou non, quelque point de la courbe. D'ailleurs, lorsque la section sera elliptique, on obtiendra le second axe en faisant passer un plan horizontal par le milieu (ω, ω′) de l'intervalle des deux sommets.

2°. Si, des deux arêtes OF et OE, l'une est parallèle à la génératrice DA, un des sommets s'éloigne à une distance infinie; et la section est *une parabole* qui a toujours pour axe, la droite indéfinie (OP, R′Q).

3°. Lorsque la trace AC se trouvera tangente au cercle du rayon OP, les deux arêtes OF et OE se confondront en une seule droite; et le point où elle coupera la génératrice AD, étant rapporté sur OP, donnera le sommet unique de la section qui se réduit alors au *système de deux droites*. Cette assertion pourrait être justifiée en remarquant qu'une hyperbole dont les deux sommets se réunissent, se réduit à ses asymptotes : mais d'ailleurs, si l'on prend la peine de construire l'épure relative à l'hypothèse actuelle, on reconnaîtra que le plan AC mené par le sommet du cône *auxiliaire*, devient alors tangent à ce cône, aussi bien que PQR′; de sorte que ces deux plans qui coïncideraient si l'on faisait tourner l'un des deux autour de la verticale O, doivent produire dans l'hyperboloïde de révolution des sections identiques. Or, le plan AC contenant déjà une génératrice DA, ne peut couper de nouveau la surface

du second degré que suivant une autre section *rectiligne*, projetée également sur une tangente au cercle de gorge (n° **141**); donc aussi le plan PQR′ produira dans l'hyperboloïde une section composée de deux droites analogues aux précédentes, et qui se couperont au point trouvé pour sommet unique sur la droite (OP, R′Q). D'ailleurs en ce point, le plan PQR′ sera tangent (n° **142**) à l'hyperboloïde.

Dans le cas très-particulier où la droite suivant laquelle se réunissent les deux arêtes OF et OE, se trouverait parallèle à DA, le plan PQR′ couperait l'hyperboloïde suivant deux génératrices parallèles entre elles, et il ne serait plus tangent à la surface que dans un point infiniment éloigné.

4°. Enfin, si la trace AC ne rencontre pas du tout le cercle du rayon OP, il n'y a aucun sommet réel sur (OP, R′Q), et la section est alors une hyperbole dont cette droite est l'axe imaginaire. Dans ce cas, la courbe se construit toujours comme au n° **272**; mais pour trouver *le centre*, et par suite l'axe réel, il faudra recourir aux asymptotes dont nous parlerons tout à l'heure : ou bien, ce qui est plus simple, on prendra le milieu ω' de l'intervalle des deux points γ' et η' où le plan PQR′ coupe les arêtes D′B′ et D′A′ du cône asymptote. Cette règle est fondée sur ce que cette surface et l'hyperboloïde, étant semblables et concentriques, doivent être coupées par le plan PQR′ suivant deux courbes qui auront *un centre commun* (n° **147**). Or, pour la section faite dans le cône asymptote, on a vu (n° **247**) que les deux sommets étaient projetés sur le plan vertical, en γ' et η'; par conséquent le milieu ω' de la distance $\gamma'\eta'$, est à la fois le centre de la section conique et celui de la section faite dans l'hyperboloïde. Il restera donc à projeter ce point en ω, sur la ligne OP que l'on sait être un axe de la courbe; et le plan horizontal conduit par ce point fera trouver les deux sommets réels par la méthode du n° **272**.

275. Pour obtenir *la tangente en un point quelconque* M de la section produite par le plan PQR′, il faut chercher l'intersection de ce plan avec celui qui touche l'hyperboloïde en M. Or ce dernier est déterminé (n° **142**) par les deux génératrices rectilignes qui passent par ce point, et nous savons que leurs projections horizontales s'obtiennent (n° **141**) en menant au cercle de gorge les tangentes $\alpha_2 M\delta_2$ et $6M\delta$; par conséquent les deux points α_2 et 6 où ces génératrices couperont le cercle OA qui est la trace horizontale de l'hyperboloïde, appartiendront nécessairement à la trace du plan tangent cherché; donc cette trace sera la droite $\alpha_2 6$T qui, par sa rencontre avec PQ, fournira le pied T de la tangente TM qu'il s'agissait de construire. Fig. 68.

A la vérité, les tangentes au cercle de gorge menées par le point M,

couperont le cercle OA en quatre points : mais d'abord, on ne devra combiner ensemble que ceux qui se trouveront tous deux en deçà, ou tous deux au-delà des points de contact δ et δ_2 par rapport à M ; car les deux génératrices que l'on cherche doivent se couper en M, et conséquemment (n° **143**) elles ne sauraient appartenir au même système, ce qui arriverait évidemment pour les droites $\alpha_2\delta_2$ et $\alpha\delta$, aussi bien que pour 6δ et $6_2\delta_2$. Ainsi l'incertitude qui pourra rester, consistera à savoir si l'on doit combiner les deux droites $\alpha_2\delta_2$ et 6δ, ou bien les deux droites $\alpha\delta$ et $6_2\delta_2$; mais pour ces dernières qui ont leurs extrémités inférieures en α et 6_2, le point de section projeté en M, se trouverait évidemment *au dessus* du cercle de gorge, tandis que le point (M, M') que nous considérons ici, est sur la nappe inférieure de l'hyperboloïde ; donc il faut encore rejeter ce deuxième couple de génératrices, qui devrait au contraire être seul conservé, dans une épure où le point considéré M se trouverait placé sur la nappe supérieure de la surface.

276. *Rabattement.* Faisons tourner le plan PQR' autour de sa trace QR', pour le rabattre sur le plan vertical. Dans ce mouvement, l'horizontale (M', IMN) restera perpendiculaire à la charnière, et deviendra M'*mn*, droite sur laquelle on portera des distances M'*m* = IM, M'*n* = IN ; ce qui fournira évidemment deux points *m*, *n*, de la courbe rabattue. Les autres points s'obtiendront d'une manière semblable, aussi bien que la tangente dont le pied T se transportera en *t*, et qui deviendra *tm*.

La surface actuelle étant *gauche*, comme nous l'avons démontré au n° **145**, elle ne saurait satisfaire à la condition essentielle du n° **179**, et il n'y a pas lieu de chercher son *développement*. Observons aussi que toutes les opérations précédentes s'effectueraient d'une manière entièrement analogue, si le plan sécant PQR' était *oblique* au plan vertical de projection, et quand même la génératrice (AD, A'D') serait assignée dans une position quelconque ; et nous engageons le lecteur à s'exercer sur de pareilles données.

Fig. 68. **277.** DES BRANCHES INFINIES. Il est très-important de savoir reconnaître *à priori* si la section de l'hyperboloïde par un plan quelconque PQR', présentera ou non des branches infinies. A cet effet, il faudra mener par le centre (O, D') du cercle de gorge une parallèle à la génératrice (AD, A'D'), et tracer la circonférence *ab* que décrit le pied (*a*, A') de cette parallèle, quand elle tourne autour de l'axe vertical O pour engendrer le *cône asymptote* ; et comme on sait (n° **146**) que toutes les arêtes de ce cône sont respectivement parallèles aux diverses génératrices de l'hyperboloïde, il n'y aura qu'à conduire par le

sommet (O, D′) un plan π parallèle à PQR′, et voir si ce plan π contient quelque arête de cette surface conique.

1°. Lorsque la trace horizontale du plan π ne rencontrera pas la base du cône asymptote, il n'y aura aucune arête de ce cône, et conséquemment aucune génératrice de l'hyperboloïde, qui soit *parallèle au plan donné* PQR′; donc aucun point de la section faite par ce dernier plan ne pourra être situé à l'infini, et dès lors cette section sera fermée et *elliptique*.

2°. Quand le plan π coupera la base du cône asymptote en deux points, il existera sur ce cône deux arêtes, et sur l'hyperboloïde *deux couples* de génératrices, qui seront parallèles au plan PQR′: donc la section faite par ce dernier dans l'hyperboloïde, offrira *deux branches infinies* et sera une *hyperbole*. D'ailleurs, chacun de ces deux couples de génératrices, composé de deux droites parallèles, déterminera un plan qui se trouvera bien *tangent* à l'hyperboloïde (n° **153**) dans le point de rencontre infiniment éloigné de ces lignes; ce sera donc l'intersection de ce plan tangent *asymptotique* par le plan donné PQR′, qui fournira l'*asymptote* de la branche correspondante. Ceci s'éclaircira par l'exemple du n° **278**.

3°. Enfin, si le plan π ne fait que toucher la base du cône asymptote, il n'y aura plus sur ce cône qu'une seule arête, et sur l'hyperboloïde qu'*un seul couple* de génératrices qui soient parallèles au plan donné PQR′; donc la section n'offrira qu'*une branche infinie* et sera une *parabole*. D'ailleurs elle n'admettra plus d'asymptote, parce que le plan tangent conduit par ces deux génératrices se trouvera lui-même parallèle au plan PQR′, comme nous le verrons clairement au n° **281**.

278. Appliquons ces règles au cas de l'épure 69, où la génératrice (ADB, A′D′A″) est prolongée autant au-dessus qu'au-dessous du cercle de gorge XDY, X′Y′), afin de limiter la surface aux deux cercles égaux A′B′ et A″B″, projetés horizontalement sur AZBS. La génératrice du second système serait (BDA, B′D′B″); et ces deux génératrices, transportées parallèlement jusqu'au centre (O, D′), détermineraient le cône asymptote qui a pour base le cercle du rayon O*a*. D'ailleurs, comme dans l'épure précédente, nous ne nous attacherons pas à effectuer la représentation graphique de l'hyperboloïde sur le plan vertical, où il n'y aura que des lignes isolées qui seront toutes visibles : ce sera seulement sur le plan horizontal que nous exprimerons la forme de la surface, en distinguant par des ponctuations diverses, les parties visibles et les parties cachées. Quant au plan sécant, nous sommes convenus (n° **108**) qu'il FIG. 69.

serait regardé comme enlevé, après avoir coupé la surface, et qu'il n'en resterait que les traces PQ et QR'.

Cela posé, si nous menons par le sommet (O, D') du cône asymptote un plan D'F'F parallèle à PQR', on voit qu'il coupe le cercle Oa en deux points et le cône asymptote suivant deux arêtes projetées sur OF et OE. Donc, en ne considérant d'abord que la première OF, et lui menant deux parallèles $\delta\alpha$, $\varepsilon\mathcal{C}$, qui soient tangentes au cercle de gorge, ce seront là deux génératrices de l'hyperboloïde qui n'iront rencontrer le plan PQR' qu'à l'infini et qui annonceront l'existence d'une branche indéfiniment prolongée. Pour obtenir l'asymptote, j'observe que le plan tangent de l'hyperboloïde dans ce point infiniment éloigné, devant contenir (n° 153) les deux génératrices $\alpha\delta$ et $\mathcal{C}\varepsilon$ qui se coupent en ce point, aura pour trace horizontale la droite $\alpha\mathcal{C}$; et comme ce plan doit fournir par son intersection avec le plan PQR' l'asymptote demandée, cette ligne se trouvera évidemment *parallèle* à $\alpha\delta$. Si donc, par le point θ où se coupent les traces PQ et $\alpha\mathcal{C}$, on mène la droite $\theta\omega$ parallèle à $\alpha\delta$, ce sera l'asymptote qu'il s'agissait de construire.

279. On pourra répéter des constructions semblables, pour la seconde branche infinie qui est indiquée par l'autre arête OE du cône asymptote; mais on doit apercevoir que, dans l'opération précédente, le plan $\delta\alpha\mathcal{C}$ qui touchait l'hyperboloïde à une distance infinie sur la génératrice $\delta\alpha$, était lui-même *tangent au cône asymptote* suivant l'arête OF. En effet, ce plan renferme le diamètre δOε du cercle de gorge, et conséquemment l'arête OF; donc sa trace passera par le point F et sera évidemment perpendiculaire au rayon OF. D'après cette remarque, il suffira de mener au cercle du rayon OE, la tangente Eφ qui, par sa rencontre avec PQ, fournira le point φ par lequel on devra tirer l'asymptote $\varphi\omega$ parallèlement à OE. Cette seconde asymptote devra couper la première en un point ω qui soit situé sur la droite OP, puisque celle-ci (n° 273) est toujours un *axe* de la courbe.

280. Si l'on voulait n'employer qu'une seule des deux génératrices $\delta\alpha$, $\varepsilon\mathcal{C}$, qui vont aboutir au point de contact de l'asymptote, on pourrait s'appuyer sur ce que la surface étant de révolution, le plan tangent doit être perpendiculaire au plan méridien qui passe par le point de contact (n° 129). Or ici, ce point est à une distance infinie sur $\alpha\delta$; donc le méridien correspondant est le plan vertical OF parallèle à $\alpha\delta$: ainsi le plan tangent cherché aurait pour trace horizontale, une droite perpendiculaire à OF et menée du point α, ce qui ferait bien retrouver la ligne $\alpha\mathcal{C}$ déjà obtenue autrement.

281. Si le plan D'F'F mené par le sommet du cône asymptote, parallèlement

a PQR′, touchait ce cône suivant une arête unique, c'est-à-dire s'il avait la position D′B′b, on voit bien (n° **279**) qu'il serait lui-même tangent à l'hyperboloïde dans le point infiniment éloigné situé sur la génératrice (BD, B′D′); or puisque ce plan tangent se trouverait ainsi parallèle à PQR′, leur intersection serait transportée tout entière à l'infini; de sorte que la courbe d'intersection présenterait bien encore *une branche infinie*, mais *qui n'aurait plus d'asymptote*.

282. Maintenant, effectuons le tracé de la courbe suivant laquelle le plan PQR′ coupe l'hyperboloïde, et cherchons d'abord les *sommets* situés sur l'*axe* (OP, R′Q). Nous avons vu (n° **273**) qu'il fallait tirer la droite (R′C′, OC) parallèle à la génératrice (AD, A′D′), et joindre les points C et A; mais comme la trace CA ne rencontre pas ici le cercle du rayon OP, on doit en conclure qu'il n'y a aucun sommet réel sur l'axe en question, et que la section est une hyperbole dont la ligne (OP, R′Q) est l'*axe imaginaire*. Alors je cherche le *centre* en projetant le point de rencontre ω des deux asymptotes sur la ligne R′Q en ω′; ou bien (n° **274**, 4°) je prends le milieu ω′ de l'intervalle des deux points γ′ et η′ où le plan PQR′ coupe les deux arêtes extrêmes du cône asymptote; puis, en faisant une section horizontale par ce point ω′, suivant la méthode du n° **272**, j'obtiens les deux sommets *réels* G et H. Cette même méthode appliquée à d'autres plans horizontaux, tels que M′V′ et V″W″, qu'il sera bon de choisir de manière à fournir des sections égales dans les deux nappes, fera trouver de nouveaux points M et N, μ et ν, de la courbe cherchée: en outre, cette ligne devra évidemment passer par les points T et S où le cercle ABS est rencontré par la trace PQ du plan sécant, aussi bien que par les points (Z, Z′) et (U, Z′) où ce même plan coupe le cercle supérieur A″B″. Fig. 69.

Enfin, comme le cercle de gorge X′Y′ est rencontré par le plan PQR′ en deux points projetés verticalement sur L′, on en conclura leurs projections horizontales L et K, dans lesquelles ce cercle et l'hyperbole devront se *toucher* sur le plan horizontal. En effet, quoique les tangentes de ces courbes dans l'espace soient très-distinctes l'une de l'autre, elles se trouvent toutes deux dans le plan tangent de l'hyperboloïde qui, pour chaque point du cercle de gorge, est évidemment *vertical;* d'où il résulte que les projections horizontales de ces deux tangentes, se confondront nécessairement.

Quant à la construction de la tangente à la section, pour un point quelconque (M, M′), elle s'effectuerait par les mêmes moyens qu'au n° **275**.

283. *Rabattement.* On effectuera cette opération comme dans l'épure précédente, en faisant tourner le plan PQR′ autour de sa trace verticale QR′, et

en portant sur des perpendiculaires à cette charnière, des distances $M'm = IM$, $M'n = IN$,.....

Quant aux asymptotes, on rabattra d'abord de la même manière, le centre (ω, ω') en ω''; puis, en rapportant les points φ et θ en φ'' et θ'', on obtiendra $\varphi''\omega''$ et $\theta''\omega''$ pour les asymptotes de la courbe rabattue.

PROBLÈME 8. *Intersection d'une droite avec un hyperboloïde de révolution à une nappe.*

Fig. 66. **284.** Nous plaçons ici ce problème, parce qu'il n'est qu'une extension de celui que nous avons résolu au n° **273**, pour une droite *qui rencontrait l'axe* de la surface; et nous allons ramener à ce cas particulier la question actuelle, où la droite proposée aura une position quelconque. Soient donc (O, O'Z') l'axe de l'hyperboloïde, (ADB, A'D'B') la génératrice rectiligne, et (PQ, P'Q') la droite dont il s'agit de trouver les points d'intersection avec la surface. Nous la supposons ici amenée, par une rotation autour de l'axe, dans une situation parallèle au plan vertical: mais cette opération préliminaire est toujours fort aisée à effectuer; et comme d'ailleurs elle laissera le point d'intersection avec la surface, sur le même parallèle où il était situé d'abord, il sera bien facile de retrouver ce point dans la position primitive.

285. Cela posé, si le plan vertical PQ *rencontre le cercle de gorge* décrit avec le rayon OD, il coupera la surface suivant une hyperbole dont l'axe réel sera (XY, X'Y'), et qui aura pour une de ses asymptotes la droite (A'B', PQ). Il serait donc facile, d'après ces données, de construire cette courbe sur le plan vertical, et sa rencontre avec P'Q' ferait alors connaître les points demandés; mais nous nous proposons d'arriver à ce résultat par des constructions *directes* et qui n'emploient que la ligne droite et le cercle. Pour cela, imaginons que l'hyperbole dont nous venons de parler et qui contient les points cherchés, tourne autour de la verticale ω : elle produira ainsi un second hyperboloïde à une nappe dont le cercle de gorge sera $(X\delta Y, X'Y')$, et qui aura pour génératrice rectiligne la droite $(\alpha\mathcal{E}, A'B')$; alors la question primitive se réduira évidemment à trouver les points d'intersection de ce nouvel hyperboloïde avec la droite (PQ, P'Q') qui rencontre son axe $(\omega, O'Z')$; et par conséquent nous sommes ramenés au problème du n° **273**.

On décrira donc avec le rayon ωP, un cercle qui sera la base d'un cône *auxiliaire* ayant pour sommet le point (ω, R'); puis, en menant la droite $(R'C', \omega C)$ parallèle à la génératrice, on déterminera la trace αC d'un plan qui coupera ce cône suivant les arêtes ωE et ωF. Ces dernières lignes vont rencontrer la gé-

nératrice aux points (L, L′) et (K, K′), que l'on ramènera sur la droite proposée en (M′, M) et (N′, N); et ces derniers points seront ceux où la droite (PQ, P′Q′) perce le second et aussi le premier hyperboloïde.

286. Si la projection horizontale PQ de la droite proposée, se trouvait *tangente au cercle de gorge* décrit avec le rayon OD, le plan vertical PQ couperait évidemment l'hyperboloïde primitif, suivant deux droites projetées sur A′B′ et sur la droite symétrique de cette dernière; dès-lors, la rencontre de ces deux droites avec P′Q′ fournirait immédiatement les points cherchés.

287. Enfin supposons, comme dans la *fig.* 67, que la droite proposée (PQ, P′Q′) se projette *en dehors du cercle de gorge* OD. Dans ce cas, le plan vertical PQ couperait encore la surface primitive suivant une hyperbole, mais son axe réel serait dirigé suivant la verticale R; de sorte qu'en faisant tourner cette courbe autour de cette verticale, on obtiendrait un hyperboloïde *à deux nappes*, et le problème ne serait plus aussi simple. C'est pourquoi je renverse la question primitive, et je me propose de trouver les points d'intersection de la droite (AB, A′B′), avec l'hyperboloïde que décrirait (PQ, P′Q′) en tournant autour de la verticale O; parce que ces nouveaux points de section seront évidemment à la même hauteur que les premiers. FIG. 67.

Or, dans ce second hyperboloïde, le cercle de gorge qui a pour rayon (OR, R′) est nécessairement coupé par le plan vertical AB, et la question rentre tout-à-fait dans le cas du n° **285** : ainsi, après avoir décrit le cercle de gorge (XρY, X′Y′) d'un troisième hyperboloïde qui aurait pour génératrice la droite ($\pi\rho$, P′R′), on trouvera, comme ci-dessus, les points (μ, M′) et (ν, N′), où cette dernière ligne serait rencontrée par (AB, A′B′) tournant autour de la verticale D; puis, il resterait à transporter ces deux points sur (AB, A′B′), en les laissant à la même hauteur. Mais les derniers points ainsi obtenus devraient ensuite, pour le problème primitif, être ramenés sur (PQ, P′Q′) en les laissant encore dans les mêmes plans horizontaux; par conséquent, l'opération se réduit à transporter immédiatement les points (μ, M′) et (ν, N′) en (M, M′) et (N, N′), qui seront les points de rencontre de la droite (PQ, P′Q′) avec le premier hyperboloïde décrit par la révolution de (AB, A′B′) autour de la verticale O.

CHAPITRE III.

INTERSECTIONS DE DEUX SURFACES COURBES.

PROBLÈME I. *Intersection de deux cylindres quelconques.*

FIG. 70. **288**. Soient ABGKH la base ou la trace horizontale du premier cylindre, et (AZ, A'Z') une de ses génératrices; soient VLMYI et (Vv, V'v') les données analogues pour le deuxième cylindre : on en déduira aisément (n° **109**) le contour apparent de chacune de ces surfaces sur le plan horizontal et sur le plan vertical; puis, pour obtenir leur intersection, il faudra employer des *plans sécants* qui soient *parallèles* à la fois *aux génératrices de l'un et de l'autre cylindre*, et qui produiront ainsi, dans ces deux surfaces, des sections évidemment rectilignes. A cet effet, menons par un point quelconque de l'arête (AZ, A'Z'), une droite (ZR, Z'R') parallèle aux génératrices du deuxième cylindre, et construisons la trace RA du plan qui passerait par ces deux droites; alors nous n'aurons plus besoin que de tirer diverses parallèles à RA, pour être certains que ce sont là les traces de plans propres à couper les deux cylindres suivant des génératrices rectilignes.

289. Considérons le plan sécant RA : il coupe le premier cylindre suivant deux arêtes projetées sur $Aa\alpha$ et $C\gamma$, et le second cylindre suivant des arêtes projetées sur Ll et Qq; par conséquent ces quatre droites qui sont dans un même plan, fourniront par la rencontre de leurs projections quatre points a, α, c, γ, appartenant à la projection horizontale de l'intersection des deux cylindres. Ensuite, si l'on projette sur la ligne de terre les pieds A, C, L, Q, de ces arêtes, on en conclura leurs projections verticales qui fourniront aussi par leurs rencontres mutuelles, les points a', α', c', γ', de la courbe d'intersection projetée sur le plan vertical; d'ailleurs il faudra, comme vérification, que ces points a et a', α et α',..... se trouvent deux à deux sur des droites perpendiculaires à la ligne de terre.

On agira de même pour d'autres plans sécants parallèles à RA; mais il est bon de commencer l'épure par déterminer les points *remarquables* dont nous allons parler, parce que ceux-là sont essentiels à construire, et qu'on pourra ensuite proportionner le nombre des plans sécants intermédiaires, aux intervalles qui resteront entre les points déjà obtenus.

290. *Points sur les plans limites.* Si l'on tire parallèlement à RA, des droites

MNB, GHI, dont chacune soit *tangente à l'une des bases* et en même temps *sécante par rapport à l'autre base*, ces droites seront les traces de deux *plans limites* entre lesquels se trouveront compris tous les points qui sont communs aux deux surfaces; car, au dehors de ces limites, on voit bien que les plans sécants parallèles à RA, ne pourraient plus couper qu'un seul des deux cylindres. D'ailleurs, si l'on applique au plan MNB la méthode générale exposée au numéro précédent, on obtiendra deux points (ϐ, ϐ') et (*b*, *b'*) dans lesquels les génératrices (M*m*, M'*m'*) et (N*n*, N'*n'*) se trouveront *tangentes à la courbe d'intersection* dans l'espace; et par suite, ce contact devra se vérifier *sur les deux plans de projection*, comme on le voit dans notre épure. En effet, la droite (Mϐ, M'ϐ') est évidemment dans le plan qui toucherait le cylindre LMN au point (ϐ, ϐ'); mais elle est aussi dans le plan sécant Mϐ qui, par hypothèse, se trouve tangent au cylindre ABC le long de l'arête Bϐ : donc cette droite (Mϐ, M'ϐ') est l'intersection des plans tangents aux deux surfaces dans le point (ϐ, ϐ'), et conséquemment (nº **213**) elle est bien *tangente à la courbe* suivant laquelle se coupent ces deux snfaces.

On prouvera de même que l'arête (N*b*, N'*b'*) est tangente à la courbe d'intersection au point (*b*, *b'*); et pareillement, le plan limite GHI fournira deux points (*g*, *g'*) et (*h*, *h'*) dans lesquels la courbe sera touchée par les arêtes (G*g*, G'*g'*) et (H*h*, H'*h'*).

291. *Points sur les contours apparents.* On fera passer des plans sécants parallèles à RA, par les points A, K, X, Y (*), où aboutissent les arêtes qui forment le contour apparent de chaque cylindre sur le plan horizontal; puis, par la méthode générale du nº **289**, on obtiendra les points (a, a'), (α, α'), (π, π'), (φ, φ'), (d, d'), dans lesquels la courbe *touchera*, mais seulement *sur le plan horizontal*, les arêtes correspondantes. En effet, au point (α, α') par exemple, la tangente de la courbe dans l'espace est distincte de la génératrice (Aα, A'α') : mais ces droites sont contenues toutes deux dans le plan tangent le long de (Aα, A'α'); et comme ici ce plan est nécessairement *vertical*, il en résulte que la projection horizontale de cette génératrice coïncidera avec celle de la tangente; par conséquent elle devra toucher la projection de la courbe sur le plan horizontal, tandis qu'il n'en sera pas de même sur le plan vertical.

(*) Ici où le point K se trouve hors des plans limites, il est inutile de mener un plan sécant par ce point.

Observons, d'ailleurs, que ce sera toujours dans quelques uns des points dont nous venons de parler, que se fera le passage de la partie visible à la partie invisible de la courbe d'intersection, considérée en projection horizontale. Au surplus, nous donnerons bientôt une règle générale pour distinguer ces parties les unes des autres.

292. De même, si par les pieds V, U, T, G, des arêtes qui forment le contour apparent de chaque cylindre sur le plan vertical, on mène des plans sécants parallèles à RA, on obtiendra des points tels que (ε, ε'), dans lesquels la courbe *touchera*, mais seulement *sur le plan vertical*, les arêtes correspondantes telles que (Vε, V'ε'). En effet, cette génératrice et la tangente de la courbe au point (ε, ε') sont toutes deux dans le plan tangent le long de (Vε, V'ε'); or ce plan étant ici perpendiculaire au plan vertical, les projections verticales de ces deux droites se confondent nécessairement, tandis qu'il n'en est pas de même de leurs projections horizontales. Quant à l'arête (Gg, G'g') elle touche, il est vrai, la courbe sur les deux plans de projection à la fois; mais cela tient à ce que, dans la figure actuelle, cette génératrice se trouve à la fois sur le contour apparent et dans le plan limite GHI.

Enfin, ce sera aussi dans quelques-uns des points dont nous venons de parler, que se fera le passage de la partie visible de la courbe à la partie invisible sur le plan vertical, parties qui ne sont pas les mêmes que pour la projection horizontale, puisque le point de vue est différent (n° **106**).

293. *La tangente en un point quelconque* (t, t') de la courbe d'intersection, sera fournie par l'intersection des deux plans qui touchent les cylindres le long des arêtes Tt et St: or les traces horizontales de ces plans sont les droites Tθ et Sθ tangentes aux bases dans les points T et S; donc le point θ où se coupent ces deux droites, appartient à la tangente demandée, laquelle est par conséquent θt.

Lorsque le point θ où vont se rencontrer les traces de deux plans tangents, se trouvera trop éloigné, comme cela arrive dans notre épure, on pourra y suppléer de la manière suivante. Le plan sécant MNB parallèle aux génératrices des deux cylindres à la fois, doit couper le plan tangent Sθ suivant une droite $\mu\omega$ parallèle à St, et le plan tangent Tθ suivant une autre droite $\lambda\omega$ parallèle à Tt; donc le point ω où se rencontrent les lignes $\lambda\omega$ et $\mu\omega$, est nécessairement commun aux deux plans tangents, et conséquemment c'est un point de la tangente cherchée $t\omega\theta$.

Nous n'avons parlé jusqu'ici que de la projection horizontale de la tangente, parce que le point (t, t') que nous avons choisi pour plus de clarté, se trouvant

placé sur le contour apparent relatif au plan vertical, la tangente est projetée sur ce même plan, suivant l'arête Tt'; mais, dans un autre cas, il suffira de projeter sur la ligne de terre, le pied ϑ de la tangente, et de le joindre avec t'; ou bien, on construira aisément les projections verticales des deux droites auxiliaires $\lambda\omega$ et $\mu\omega$ qui, par leur rencontre, fourniront un point ω' de la tangente projetée sur le plan vertical.

294. REMARQUE I. Pour distinguer sur la courbe d'intersection des deux cylindres, les parties visibles d'avec les parties invisibles en projection horizontale, il faut observer que si le cylindre ABK existait seul dans l'épure, les arêtes qui aboutissent sur l'arc ABK seraient toutes visibles, tandis que celles qui tombent sur l'arc AHK ne le seraient pas : de même, si le cylindre XMY subsistait seul, les arêtes visibles seraient celles qui aboutissent sur l'arc XVY, tandis que toutes les autres ne seraient pas vues. Mais lorsque les deux cylindres existeront simultanément, il pourra arriver qu'une arête visible sur le premier se trouve cachée en partie par le second ; toutefois, si cette arête vient à rencontrer une génératrice aussi visible sur ce dernier cylindre, alors elle redeviendra visible en cet endroit. D'un autre côté, lorsqu'un point se trouvera sur une arête qui serait invisible, en ne considérant que le cylindre auquel elle appartient, il est évident qu'à plus forte raison ce point demeurera invisible, quand les deux cylindres existeront à la fois; par conséquent, nous pouvons poser les deux règles suivantes : FIG. 70.

Un point de la courbe d'intersection sera VISIBLE, *lorsqu'il sera fourni par la rencontre de* DEUX ARÊTES VISIBLES *l'une et l'autre, sur chaque cylindre considéré isolément.*

Un point de l'intersection sera INVISIBLE, *quand il proviendra de la rencontre de deux arêtes* DONT UNE, *au moins*, SERA INVISIBLE *sur le cylindre auquel elle appartient.*

Le lecteur fera aisément l'application de ces règles à la projection horizontale de l'intersection des deux cylindres, puisque nous avons indiqué plus haut, quelles étaient les arêtes visibles sur chaque surface considérée isolément ; et par-là, il se rendra compte des parties *pleines* ou *ponctuées* que présente notre épure. Quant à la projection verticale, les règles précédentes s'appliqueront également, pourvu qu'on se rappelle que, relativement à cette projection, les seules arêtes visibles sur le premier cylindre considéré isolément, sont celles qui aboutissent sur l'arc TAG, et que les arêtes visibles du deuxième cylindre aboutissent toutes sur l'arc VMU.

Fig. 70. **295.** Remarque II. La rencontre des deux cylindres peut avoir lieu par *arrachement* ou par *pénétration*. Il y a *arrachement*, lorsque les traces MNB et GHI des deux plans limites sont, comme dans l'épure actuelle, tangentes l'une à la base ABKH, et l'autre à la base XMY; parce qu'alors, sur chaque cylindre, il existe des génératrices qui ne contiennent aucun point de l'intersection, et qu'ainsi ces deux corps ne font que *s'arracher* mutuellement une partie de leur surface, tandis que les portions correspondantes aux arcs MON et HKG, conservent leur intégrité dans toute leur longueur. En outre, il importe d'observer que, dans ce cas, toutes les parties de l'intersection formeront une branche *unique et non interrompue*, qu'un point mobile pourra parcourir d'un mouvement continu, sans cesser d'être sur les deux cylindres à la fois.

Fig. 71. Au contraire, quand les traces GHI et CAO des deux plans limites seront tangentes *à la même base*, comme dans la *fig.* 71, alors il y aura *pénétration*, parce que *toutes les génératrices du cylindre* XOY entreront dans l'autre corps, et y traceront sur la nappe correspondante à l'arc AH, *une première branche* fermée; puis, elles sortiront du cylindre par *une seconde branche* aussi fermée, et située sur la nappe CG. D'ailleurs, ces deux courbes *d'entrée* et *de sortie* seront totalement distinctes, et n'auront aucune partie commune par où un point mobile puisse passer de l'une à l'autre sans interruption; puisqu'elles se trouveront séparées, sur le grand cylindre, par les nappes ABC et HKG où il n'existe aucun point de l'intersection.

296. Remarque III. Dans tous les cas, l'intersection n'aura pas de *branche infinie*, si les deux bases sont des *courbes fermées*. En effet, pour qu'il existât une branche qui s'étendît indéfiniment, il faudrait qu'il se trouvât sur un des cylindres une génératrice parallèle à une génératrice de l'autre; mais alors, d'après la nature de ces surfaces, toutes les génératrices seraient parallèles entre elles dans les deux corps, et l'intersection n'aurait plus lieu; ou bien, elle se réduirait à *une ou plusieurs droites* correspondantes aux points de rencontre des deux bases, genre de ligne qui n'exige aucune discussion.

Quand les deux bases, ou l'une d'entre elles, seront des courbes indéfinies, il suffira d'examiner la position des plans *limites* (n° 290) par rapport à ces bases, pour reconnaître si quelqu'un des plans sécants intermédiaires, peut aller couper l'une des bases à une distance infinie.

PROBLÈME 2. *Intersection de deux surfaces coniques.*

Fig. 72. **297.** Soient (S, S′) le sommet du premier cône, et AB la courbe qui lui sert de base sur le plan horizontal : soient (T, T′) et DE les données analogues pour

le deuxième cône; alors, en menant aux bases des tangentes perpendiculaires à la ligne de terre, on obtiendra les droites S'A' et S'B', T'D' et T'E', pour les contours apparents de ces deux surfaces sur le plan vertical. Quant au plan horizontal, il n'y a d'autres limites que les traces AB et DE; car ici les sommets se trouvant projetés au-dedans des bases, il est impossible de mener à ces courbes des tangentes partant des points S et T (nº **119**), ce qui serait nécessaire pour obtenir des plans tangents *verticaux*. D'ailleurs, nous ferons abstraction des nappes supérieures des deux cônes, afin de ne pas rendre invisible, sur le plan horizontal, la branche d'intersection qui proviendra des nappes inférieures, et qui doit fixer spécialement notre attention.

298. Pour obtenir l'intersection de ces deux cônes, nous emploierons divers *plans sécants* conduits tous *suivant la droite* (ST, S'T') *qui joint les deux sommets;* car, de tels plans ne produiront dans les deux surfaces que des *sections rectilignes* faciles à construire, et d'ailleurs leurs traces horizontales devront évidemment passer toutes par le point R. Considérons donc celui de ces plans qui a pour trace la droite quelconque RIFGH : il coupe le cône T suivant deux génératrices projetées sur TF et TG, et le cône S suivant deux génératrices projetées sur SI et SH; or cette dernière droite rencontrant les précédentes aux points K et M, il s'ensuit que ces deux points appartiennent à la projection horizontale de l'intersection demandée. Nous négligerons ici les points de section qui seraient fournis par l'arête SI, attendu que cette droite ne va couper les génératrices TF et TG qu'au-delà du sommet T, et que par conséquent ces points appartiendraient à la branche d'intersection située *sur les nappes supérieures,* dont nous sommes convenus de faire abstraction.

Quant au plan vertical, il suffira de projeter sur la ligne de terre les pieds F, G, H, des génératrices que nous venons de combiner, et leurs projections verticales T'F', T'G', S'H', fourniront par leurs rencontres, les points K' et M' de la courbe d'intersection projetée sur ce plan; d'ailleurs, on sait que ces derniers points devront être liés avec K et M par la condition de se trouver deux à deux sur une même perpendiculaire à la ligne de terre; ce qui pourrait aussi servir à déduire ceux-là des autres, en n'employant qu'une seule génératrice sur le plan vertical. On opérera d'une manière toute semblable, pour d'autres droites partant du point R : mais nous recommandons de commencer le tracé de l'épure, par la recherche des divers *points remarquables* dont nous allons parler; parce que ceux-ci sont essentiels à construire, et qu'une fois leur position fixée, il sera facile de proportionner le nombre des plans sécants intermédiaires, aux intervalles qui resteront entre les points déjà obtenus.

FIG. 72. **299.** *Points sur les plans limites.* Si la trace R de la ligne (ST, S'T') n'est pas placée en dedans des deux bases, on pourra mener de ce point, deux droites RPQ et RUV dont chacune soit à la fois *tangente à l'une des bases* et *sécante par rapport à l'autre* : alors ces droites seront les traces des plans sécants *limites ;* car on voit bien que tout plan mené par les deux sommets, et qui se trouverait hors de l'espace angulaire VRQ, ne rencontrerait plus qu'un seul des cônes, et conséquemment ne pourrait renfermer aucun point de leur intersection. D'ailleurs, si l'on applique au plan limite RPQ le mode général de construction indiqué au n° précédent, on obtiendra le point (L, L') dans lequel la génératrice (SLQ, S'L'Q') se trouvera *tangente à la courbe d'intersection* dans l'espace, et ce contact devra se vérifier *sur les deux plans de projection*, comme on le voit dans notre épure. En effet, la génératrice (SQ, S'Q') est contenue dans le plan limite RQ qui, par hypothèse, se trouve tangent au cône T suivant l'arête TLP et par suite dans le point (L, L'); mais cette génératrice (SQ, S'Q') se trouve aussi évidemment dans le plan qui toucherait le cône S au point (L, L'); donc elle est l'intersection des plans tangents menés aux deux surfaces par le point (L, L'), et par conséquent (n° **213**) elle est bien tangente à la courbe suivant laquelle se coupent ces surfaces.

On prouvera de même que le plan limite RUV fournit un point (N, N'), dans lequel la courbe est touchée par l'arête (SV, S'V') sur les deux plans de projection.

300. *Points sur les contours apparents.* On fera passer des plans sécants par les points B, E, D, où aboutissent les arêtes qui forment le contour apparent de chaque surface, et par la méthode générale du n° **298**, on obtiendra les points (6, 6'), (b, b'), (ε, ε'), (δ, δ'), dans lesquels la courbe *touchera*, mais seulement *sur le plan vertical*, les arêtes correspondantes. En effet, au point (6, 6') par exemple, la tangente de la courbe dans l'espace est très-distincte de la génératrice (SB, S'B'): mais ces droites sont toutes deux dans le plan S'B'B tangent le long de cette génératrice; et comme ce plan est évidemment perpendiculaire au plan vertical, il en résulte que la tangente et la génératrice dont nous parlons, se confondront en projection verticale; par conséquent, il faudra que la droite S'B' *touche* la courbe sur le plan vertical, tandis que SB sera loin d'être tangente à la projection horizontale.

Observons, d'ailleurs, que ce sera toujours dans quelques-uns des points dont nous venons de parler, qu'aura lieu le passage de la partie *visible* à la partie *invisible* de la courbe d'intersection; c'est pourquoi il est très-important de construire les points situés sur les contours apparents, préférablement à d'autres

points qui seraient même très-voisins de ceux-là. Au surplus, nous donnerons bientôt une règle générale pour discerner les arcs visibles d'avec les arcs invisibles sur la courbe d'intersection.

301. *La tangente en un point quelconque* (M, M′) de cette courbe, sera fournie (n° **213**) par l'intersection des deux plans qui touchent les cônes suivant les arêtes SMH et TMG : or les traces horizontales de ces plans sont les droites Hθ et Gθ tangentes aux bases ; donc le point θ où se coupent ces dernières droites, est le pied de la tangente qui, par conséquent, a pour projection horizontale la droite θM. Quant à la projection verticale θ′M′, on l'obtiendra en projetant le point θ sur la ligne de terre en θ′. FIG. 72.

302. On peut encore se proposer de trouver le point le plus bas et le point le plus haut de la courbe d'intersection, c'est-à-dire ceux où *la tangente sera horizontale.* Pour cela, il faudra d'abord chercher un plan sécant R*x*X tel qu'il coupe les bases en deux points *x* et X, pour lesquels les tangentes *xy* et XY se trouvent parallèles : cette première recherche, qui sera plus ou moins facile suivant la nature des courbes AHB et DGE, pourra toujours s'effectuer d'une manière suffisamment exacte, par un petit nombre d'essais faits sur diverses sécantes menées du point R, et pour lesquelles les tangentes aux deux bases convergeront en sens contraires. Cela posé, on appliquera au plan sécant R*x*X la méthode générale du n° **298**, et l'on obtiendra un point (ξ, ξ′) pour lequel la tangente à la courbe d'intersection serait à la fois dans les deux plans tangents le long des arêtes T*x* et SX ; mais ceux-ci ayant des traces *xy* et XY qui, par hypothèse, sont parallèles entre elles, ne pourront se couper que suivant une droite parallèle aussi à XY, et par conséquent *horizontale.* Donc le point (ξ, ξ′) sera le point *le plus bas* de la courbe d'intersection, et l'on trouverait le point *le plus haut* d'une manière analogue.

303. *Remarque* I. Pour discerner sur la projection verticale de l'intersection, les arcs *visibles* d'avec ceux qui ne le sont pas, il faut observer que si le cône S existait seul dans l'épure, les arêtes qui aboutissent sur l'arc AQB, seraient toutes visibles sur le plan vertical, tandis que celles qui tombent sur l'arc AVB ne seraient pas vues : de même si le cône T subsistait seul, les arêtes visibles de cette surface seraient celles qui aboutissent sur l'arc DPE, tandis que toutes les autres seraient invisibles. Mais lorsque les deux cônes existeront simultanément, comme dans la question actuelle, il pourra se faire qu'une arête visible sur le premier, se trouve cachée en totalité ou en partie par le second ; néanmoins si cette arête vient à rencontrer une génératrice aussi visible sur cette dernière surface, alors il est clair qu'elle redeviendra visible en cet en- FIG. 72.

droit. D'un autre côté, lorsqu'un point se trouve sur une arête qui serait invisible en ne considérant que le cône auquel elle appartient, il est certain qu'à plus forte raison ce point restera invisible, quand les deux surfaces existeront à la fois. Par conséquent nous pouvons poser les deux règles suivantes, au moyen desquelles le lecteur se rendra aisément compte des parties *pleines* ou *ponctuées* que renferme notre épure sur le plan vertical.

Un point de la courbe d'intersection sera VISIBLE, *lorsqu'il sera fourni par la rencontre de* DEUX GÉNÉRATRICES VISIBLES *l'une et l'autre sur chaque surface considérée isolément ;*

Un point de l'intersection sera INVISIBLE, *quand il proviendra de la rencontre de deux génératrices* DONT UNE, *au moins*, SERA INVISIBLE *sur la surface à laquelle elle appartient.*

Ces deux règles sont également vraies pour la projection horizontale; mais ici où les deux sommets se trouvent projetés en dedans des bases, il n'existe pas de plan tangent qui soit *vertical*, et par suite (n° **106**) toutes les arêtes des deux cônes sont visibles sur le plan horizontal, lorsque chaque surface existe seule et que l'on fait abstraction des nappes supérieures, comme nous en sommes convenus dans les données de la question. Par conséquent, l'application de la première règle nous montre que la courbe d'intersection est visible en totalité sur le plan horizontal, et qu'ainsi elle doit être marquée en *trait plein*.

304. Observons encore que les règles précédentes sont aussi applicables à l'intersection de deux surfaces quelconques, pourvu que l'on entende par le mot *génératrice*, la ligne droite ou courbe qui, par son mouvement, produit la surface particulière dont il est question; et qu'après avoir déterminé (n° **106**) le contour apparent de cette surface sur chacun des plans fixes, on s'attache à reconnaître quelles sont les portions de génératrices, situées *en avant* ou *au-dessus* de ce contour apparent.

305. *Remarque* II. Dans l'intersection de deux cônes, comme dans celle de deux cylindres (n° **295**), il peut y avoir *pénétration* ou *arrachement*. Le premier cas arrive dans l'épure actuelle, parce que les traces RUV, RPQ, des deux plans limites sont tangentes *à la même base;* mais cette *pénétration* n'exclut pas toujours l'existence de branches infinies, comme on le verra dans l'épure 73. Il y aurait *arrachement* si l'un des plans limites se trouvait tangent à la première base, et l'autre tangent à la seconde.

306. DES BRANCHES INFINIES. Prenons pour exemple de cette recherche, les deux cônes représentés sur le plan vertical par D'S'E' et par A'T'B', et dont les bases sont l'ellipse DFE et le cercle AHB. En cherchant d'abord les plans *limites* (n° **299**), on obtiendra les droites RL et RK, tangentes au cercle et sécantes par rapport à l'ellipse; puis, chacune de ces traces, par exemple RL, fournira trois arêtes projetées sur TN, SM, SL, et situées dans le même plan; donc leurs rencontres donneront deux points λ et μ où la courbe sera touchée par les génératrices SL et SM (n° **299**). Pour un autre plan sécant RIGHF situé entre les plans limites, on obtiendra quatre arêtes qui fourniront seulement trois points γ, φ, f, de l'intersection, parce que la rencontre des deux génératrices TH et SG n'aurait lieu ici qu'au-delà des sommets T et S, et par conséquent sur les nappes supérieures des deux cônes, dont nous faisons abstraction par le même motif qu'au n° **297**. Fig. 73.

Les points dont nous venons de déterminer les projections horizontales, se retrouveront sur le plan vertical, en projetant sur la ligne de terre les pieds des génératrices fournies par chaque plan sécant, et en joignant ces derniers points avec T' et S'. D'ailleurs, si l'on considère les génératrices relatives au contour apparent des deux cônes, et qui, d'après la disposition actuelle des données, sont toutes quatre situées dans le plan vertical RST, on obtiendra immédiatement les points d', δ', ε', qu'il faudra projeter sur RT en d, δ, ε; puis, comme les points V et U où se coupent les deux bases, font évidemment partie de l'intersection des deux cônes, cette courbe se présentera ici sous la forme des deux branches distinctes

$$(df\lambda\varphi\delta xd,\ d'f'\lambda'\delta')\ \text{et}\ (V\mu\gamma\varepsilon U,\ V'\mu'\varepsilon').$$

307. Il y aurait une troisième branche d'intersection, si nous avions eu égard aux deux nappes supérieures : mais, dans tous les cas où les bases des deux cônes seront des courbes du second degré, la totalité des branches de l'intersection devra former, sur chaque plan de projection, un système de lignes qu'une droite ne puisse rencontrer en plus de *quatre* points. En effet, les équations des deux surfaces coniques étant alors elles-mêmes du second degré, ne pourront conduire par l'élimination d'une des variables x, y, z, qu'à une équation finale du quatrième degré au plus; de sorte que la combinaison de cette dernière équation avec celle d'une droite quelconque, ne fournira jamais plus de quatre solutions communes.

308. Dans l'épure actuelle, nous avons disposé les deux bases et les som-

mets de telle sorte que le plan vertical RST partage évidemment, en deux parties égales, toutes les cordes qui lui sont perpendiculaires dans chacune des surfaces coniques, comme UV, LK,......; ainsi ce plan est *un plan* PRINCIPAL *commun à ces deux surfaces du second degré*. Or on sait qu'alors la courbe d'intersection est non-seulement symétrique des deux côtés de ce plan, mais qu'en outre elle se projette en totalité sur ce plan principal, suivant *une ligne du second degré* (*); par conséquent les courbes $\varepsilon'\mu'V'$ et $\delta'\lambda'd'$ sont ici des portions d'une même *hyperbole*. D'ailleurs la branche $\lambda'\delta'$ prolongée jusqu'à la rencontre des deux génératrices A'T' et E'S', commencerait alors à recevoir la projection de la courbe suivant laquelle se coupent les nappes supérieures des deux cônes.

309. C'est encore par suite de la symétrie que présente l'intersection de ces deux cônes, de part et d'autre du plan vertical RST, que cette courbe vient couper brusquement les génératrices du contour apparent aux points d', δ' et ε'; au lieu qu'en général, une courbe située sur une surface quelconque doit *toucher, en projection,* le contour apparent dans le point où elle le rencontre. En effet, pour ce point, la tangente de la courbe et celle du contour apparent sont toutes deux situées dans un plan tangent qui se trouve perpendiculaire (n° **106**) au plan de projection, et par conséquent les projections de ces deux tangentes se confondent : mais lorsqu'il arrive, comme ici au point (d, d'), que la tangente de la courbe se trouve *perpendiculaire au plan vertical*, alors la projection de cette droite se réduit à un point unique d', et *l'élément* qui eût été commun à la courbe et au contour apparent, venant à s'évanouir sur la projection verticale, ces deux lignes n'offrent plus de contact entre elles.

310. Maintenant, examinons si l'intersection présentera des *branches infinies*, et pour cela cherchons *s'il existe, sur un des cônes, quelque génératrice qui soit parallèle à une des génératrices de l'autre surface conique;* car, si cette circonstance n'a pas lieu, la rencontre de deux arêtes situées dans un même plan, ne pourra se faire qu'à une distance finie, et par conséquent aucune branche de l'intersection ne s'étendra indéfiniment.

FIG. 73. Afin de reconnaître s'il existe, sur les deux cônes, deux arêtes respectivement parallèles, on imaginera que le cône T, par exemple, soit transporté *parallèlement à lui-même* jusqu'à ce que son sommet, glissant sur la droite

(*) Voyez l'*Analyse appliquée à la géométrie des trois dimensions*, chap. IX.

(TR, T'R'), vienne coïncider avec le sommet (S, S'); puis, on construira la trace horizontale de ce cône ainsi transporté, que nous appellerons le cône T''. Pour obtenir cette nouvelle base qui sera une courbe *semblable* à AVB, il faudrait, en général, mener du point (S, S') diverses droites parallèles aux arêtes du cône primitif T, et chercher leurs traces horizontales : mais lorsque le cône T aura pour base un cercle, comme dans l'exemple actuel, il suffira évidemment de mener la droite (S'a', Sa) parallèle à (T'A', TA), et la droite (S'b', Sb) parallèle à (T'B', TB), puis de décrire un cercle sur la distance *ab* comme diamètre. D'ailleurs ce cercle, ou généralement la trace du cône T'', devra être tangent aux deux plans limites RL et RK; car ceux-ci touchaient le cône T, et comme ils passent par la droite (TR, T'R') le long de laquelle a glissé le sommet du cône mobile, ils continueront d'être tangents à cette surface transportée en T''.

311. Cela posé, si la nouvelle base *a*Q*b* n'a aucun point de commun avec la base DLE du cône immobile S, les deux cônes S et T'' n'ont aucune génératrice de commune, et par suite les cônes S et T n'avaient point d'arêtes parallèles; car deux arêtes qui rempliraient cette condition, devraient évidemment coïncider, lorsque le sommet T est venu en S. Donc, dans ce cas, l'intersection des deux cônes n'admettrait aucune branche infinie.

312. Si, comme dans l'épure actuelle, la base *a*Q*b* coupe quelque part, en Q par exemple, la base DLE du cône immobile S, les deux cônes S et T'' auront une génératrice commune SQ; puis, lorsqu'on ramènera T'' en T, cette génératrice deviendra l'arête TP parallèle à SQ; ainsi ce seront là deux génératrices respectivement parallèles sur les cônes primitifs T et S, et leurs pieds P et Q devront évidemment se trouver sur une droite aboutissant en R, laquelle sera la trace du plan qui renferme ces deux arêtes. Alors, à mesure que les plans sécants se rapprocheront de RQP, deux des arêtes qu'ils fourniront seront plus près d'être parallèles, leur point de section sera plus éloigné, et enfin il se trouvera à une distance infinie, quand on arrivera aux deux génératrices TP et SQ; de sorte qu'il existera une branche infinie εμV qui convergera vers l'une ou l'autre de ces génératrices. Une conséquence analogue aura lieu pour la branche εU, dont le prolongement indéfini est indiqué par les deux génératrices parallèles S*q* et T*p*, auxquelles conduit le second point de section *q* du cercle *a*Q*b* avec l'ellipse DLE; et d'ailleurs, les deux mêmes couples de génératrices parallèles, fourniraient aussi les points infiniment éloignés de la branche d'intersection produite par les deux nappes supérieures, mais que nous n'avons pas voulu représenter dans notre épure.

FIG. 73. **313.** *Des asymptotes.* Lorsqu'une branche infinie $\varepsilon\mu$V résulte, comme ici, d'un point de *section* véritable entre les bases DLE et aQb, cette branche admet une asymptote. En effet, cette asymptote étant la tangente de la courbe pour le point infiniment éloigné vers lequel tendent les deux génératrices parallèles TP et SQ, elle sera fournie par l'intersection des plans tangents aux deux cônes, le long de ces génératrices; or, comme ceux-ci ont pour traces les droites Pθ et Qθ tangentes aux bases, et *non parallèles entre elles,* le point θ où se couperont ces traces, appartiendra à l'asymptote demandée, laquelle sera la droite $\theta\omega$ menée *parallèlement* à SQ; car ces deux plans tangents étant parallèles à SQ, ils ne peuvent se couper que suivant une ligne parallèle à cette génératrice.

L'autre asymptote $\xi\omega$ s'obtiendra d'une manière semblable, et à cause de la symétrie des données actuelles de part et d'autre du plan vertical RST, elle devra couper la première sur la droite RT; d'ailleurs, ces deux asymptotes seraient en même temps la limite des tangentes à la branche d'intersection des deux nappes supérieures.

314. En projetant le point θ ou ξ sur la ligne de terre, et menant une parallèle à la génératrice S'Q', on aurait l'asymptote commune aux deux branches μ'V' et $\lambda'\delta'$ de l'hyperbole qui reçoit la projection verticale de l'intersection; mais les considérations précédentes ne fournissent pas la seconde asymptote de cette hyperbole. La raison de cette différence est facile à apercevoir : car les branches $\mu'\varepsilon'$ et $\lambda'd'$, quoique indéfinies en elles-mêmes, ne reçoivent plus aucun point de l'intersection au-delà de ε' et de d'; ainsi elles sont vraiment *limitées*, en tant qu'on les considère comme appartenant aux deux cônes à la fois, et par suite elles n'admettent pas d'asymptotes sous ce point de vue qui est celui du problème actuel. Au lieu que, des deux branches μ'V' et $\lambda'\delta'$, la première est vraiment indéfinie sous tous les rapports (n° **312**); et quoique la seconde paraisse se terminer au point δ', quand on la regarde comme le lieu des points communs aux deux surfaces coniques, néanmoins, après un intervalle *imaginaire* sous ce rapport, cette branche redevient *réelle* à partir du point de rencontre des génératrices A'T' et E'S'; car elle reçoit alors la projection de l'intersection des deux nappes supérieures (n° **308**), qui est aussi une courbe indéfinie. Ainsi, par ce motif, la méthode des intersections devait fournir l'asymptote de cette branche d'hyperbole.

FIG. 73. **315.** *Branche infinie sans asymptote.* S'il fût arrivé, après la construction du n° **310**, que la base aQb du cône T″ eût *touché* la base DLE en un point tel que Q, alors l'arête SQ aurait été commune aux deux cônes S et T″, et par

suite les surfaces S et T auraient eu aussi deux génératrices parallèles SQ et TP; par conséquent l'intersection présenterait encore une branche infinie, mais cette courbe n'admettrait plus d'asymptote. En effet, les bases DLE et *aQb* ayant, dans l'hypothèse actuelle, *une tangente commune* en Q, les plans tangents aux cônes S et T″ le long de l'arête SQ, coïncideraient complétement: donc, lorsque T″ serait ramené parallèlement à lui-même dans la position primitive T, les plans tangents le long des génératrices SQ et TP, se trouveraient *parallèles entre eux;* et dès lors leur intersection qui doit être l'asymptote demandée, se transporterait tout entière à une distance infinie, c'est-à-dire qu'elle n'existerait plus pour nous. C'est ce qui arrive dans une parabole ordinaire, où les tangentes n'ont pas de limite finie.

PROBLÈME 3. *Intersection d'un cône et d'un cylindre.*

316. Comme cette question a beaucoup d'analogie avec les deux problèmes précédents, nous nous contenterons d'en indiquer la solution, par une figure en perspective. Soient donc SAB le cône et CDE le cylindre proposés : on mènera par le sommet S, une parallèle SR aux génératrices du cylindre; et en conduisant par cette droite divers plans sécants, ils produiront évidemment dans les deux surfaces, des sections *rectilignes* bien faciles à construire, et dont les points de rencontre mutuelle appartiendront à la courbe demandée. Fig. 74.

317. Les plans sécants *limites* s'obtiendront encore en menant, par le point R, deux droites RK et RL dont chacune soit à la fois tangente à l'une des bases, et sécante par rapport à l'autre; et ces plans fourniront des points où la courbe sera *touchée* par les arêtes du cône, ou par celles du cylindre, selon que le plan limite RL coupera l'une ou l'autre de ces surfaces (*voyez* n° **299**).

318. Quand les deux bases seront des courbes fermées, il n'y aura de *branche infinie* qu'autant qu'une des génératrices du cône se trouvera parallèle aux arêtes du cylindre; et on le reconnaîtra immédiatement, puisque alors la droite SR devra aboutir précisément sur le contour de la base ALBK. Encore, faudra-t-il que la tangente en ce point puisse couper la base du cylindre; sans quoi, aucune branche de l'intersection ne convergerait vers la génératrice SR, comme il est facile de l'apercevoir en construisant la figure relative à ce cas particulier.

PROBLÈME 4. *Intersection d'un cône et d'une sphère concentriques.*

319. Soient (S, S′) le sommet et ABCDE.... la base du cône proposé; soient Fig. 75.

aussi XKY et X'Z'Y' les projections de la sphère qui a son centre en (S, S'), et que nous supposons réduite ici à l'hémisphère inférieur, afin de laisser voir la courbe d'intersection sur le plan horizontal. Nous emploierons, pour couper ces deux surfaces, des plans verticaux menés par le sommet (S, S'); celui de ces plans sécants qui a pour trace la droite quelconque SM, rencontre la base du cône au point M, et par conséquent il coupe cette surface suivant l'arête (SM, S'M'), tandis que dans la sphère il donne pour section un grand cercle. Si donc nous rabattons ce plan SM sur le méridien principal SY, le grand cercle coïncidera avec X'Z'Y', et la génératrice deviendra (SP, S'P'); alors ces deux lignes se coupant au point (Q, Q'), il suffira de ramener celui-ci, au moyen d'un arc de cercle horizontal, sur la génératrice primitive en (*m*, *m'*), et ce sera là un point de la courbe d'intersection du cône avec la sphère.

320. Il sera bon d'appliquer en même temps, la construction précédente aux deux plans méridiens SM et SN qui rencontrent la base du cône en deux points M et N situés à égales distances de S; parce que l'on obtiendra, au moyen du même parallèle RQ' de la sphère, un second point (*n*, *n'*) situé sur la génératrice (SN, S'N'), laquelle viendrait évidemment se rabattre aussi sur S'P'. En outre, on devra spécialement construire, par le même procédé, les points de la courbe d'intersection qui seront situés sur les arêtes

(SA, S'A'), (SB, S'B'), (SE, S'E'), (SF, S'F'),

lesquelles forment le contour apparent du cône, ou bien sont placées dans le méridien qui donne le contour apparent de la sphère; parce qu'on obtiendra ainsi les quatre points

(*a*, *a'*), (*b*, *b'*), (*e*, *e'*) (*f*, *f'*),

où la courbe doit *toucher*, sur le plan vertical, l'un ou l'autre de ces contours apparents. D'ailleurs, d'après la règle établie au n° **304**, ce sera toujours dans quelques-uns de ces points, que se fera le passage de la partie *visible* à la partie *invisible* de la projection verticale; ici, par exemple, ce passage a lieu en (*b*, *b'*), et non pas en (*a*, *a'*), parce que l'arête (SA, S'A') est déjà en arrière du méridien (SX, Z'X'); tandis qu'à l'autre extrémité de la courbe, ce passage s'effectue au point (*e*, *e'*), parce que la génératrice (SE, S'E') est en avant du méridien (SY, Z'Y').

Quant à la projection horizontale, elle est visible en totalité; puisque l'hémisphère supérieur est enlevé, que la surface conique est réduite à sa

nappe inférieure, et qu'ayant son sommet projeté au dedans de la base, elle n'admet pas ici de plan tangent qui soit vertical (n° **303**).

321. Il est intéressant de déterminer la position précise du point g', où la projection verticale de l'intersection présente un *nœud*. A cet effet, nous observerons que ce nœud doit provenir de deux points (g, g') et (v, g') qui seront, 1° placés sur deux arêtes SG, SV, confondues en projection verticale, et dont par conséquent les pieds répondront à une corde GV *perpendiculaire à la ligne de terre;* 2° situés sur un même parallèle de la sphère, et dès-lors il arrivera, comme précédemment pour les points m' et n', que les pieds des génératrices rempliront la condition SG = SV, de sorte que la corde inconnue GV devra avoir son *milieu* I *placé sur* SY. Or la droite AE étant évidemment le diamètre conjugué de toutes les cordes parallèles à EE', il s'ensuit qu'elle contient aussi le milieu I de la corde GV; par conséquent cette dernière sera déterminée par la rencontre de AE avec SY, et en appliquant alors aux génératrices SG, SV, le procédé général du n° **319**, on trouvera les deux points qui se projettent en g' sur le plan vertical. Fig. 75.

322. *De la tangente.* Pour obtenir cette ligne relativement au point quelconque (m, m'), il faut chercher l'intersection des deux plans qui touchent la sphère et le cône en ce point. Or, d'après ce que nous avons dit (n° **133**) pour une surface de révolution, il suffira évidemment de mener en Q' la tangente Q'T' au méridien principal de la sphère, puis de rapporter la distance D'T' en ST, sur le méridien SM, et enfin de tirer perpendiculairement à ce dernier plan la droite $T\theta$, qui sera la trace horizontale du plan tangent de la sphère pour le point (m, m'). Quant au plan tangent du cône, il touchera cette surface tout le long de la génératrice (SM, S'M'), et par suite il aura pour trace la droite $M\theta$ qui touche la base au point M. Donc le point θ où se coupent ces deux traces appartient à la tangente demandée, laquelle est par conséquent projetée sur θm et sur $\theta' m'$.

323. On peut aussi construire le point *le plus haut* ou *le plus bas* de la courbe, c'est-à-dire plus généralement les points où *la tangente sera horizontale.* En effet, puisqu'une pareille droite se trouvera contenue à la fois dans les deux plans tangents aux surfaces proposées, il faudra évidemment que ceux-ci aient leurs traces horizontales *parallèles* l'une à l'autre. Or, en supposant que le point cherché soit sur la génératrice (SC, S'C'), le plan tangent du cône aurait pour trace la tangente au point C de la base, et le plan tangent de la sphère aurait sa trace horizontale perpendiculaire au méridien SCK; ainsi, pour que ces deux traces soient parallèles, il faudra que SC se trouve

normale à la courbe ABDE. Donc, en menant du point S dans le plan horizontal, une normale SC à la base du cône, et construisant par le procédé général du n° **319**, la rencontre de la génératrice (SC, S'C') avec la sphère, on obtiendra le point (c, c') où la tangente de l'intersection se trouvera horizontale. Ce point est ici *le plus bas*, et l'on aurait le point *le plus haut* en menant une seconde normale qui aboutirait vers le point L de la base : mais nous n'avons pas exprimé cette dernière construction sur notre épure, parce qu'il en serait résulté de la confusion avec quelques autres lignes essentielles à manifester.

D'après les données actuelles, on ne peut mener du point S que deux normales à l'ellipse ABDE; mais, pour une autre position de S, le nombre de ces normales pourra s'élever jusqu'à *quatre*, ainsi que nous allons le prouver; et alors la courbe d'intersection présentera, avec des inflexions, quatre points où sa tangente sera horizontale.

FIG. 76. **324**. MENER UNE NORMALE *à une courbe plane* ABDE, *par un point* S *donné dans son plan*. Ce problème, dont la solution serait utile dans la question précédente, ne peut être résolu par une marche directe qu'en traçant d'abord la *développée* $\alpha\delta\delta\varepsilon$ de la courbe primitive, laquelle développée s'obtient (n° **197**) par les rencontres successives des normales menées en des points très-voisins sur la courbe ABDE; ensuite, il reste à tirer du point S une ou plusieurs tangentes à cette développée, opération qui s'exécute avec toute la précision désirable, en dirigeant *une règle* de manière qu'elle passe par le point S et qu'elle s'appuie sur la courbe $\alpha\delta\delta\varepsilon$. La seule incertitude qui pourrait rester ici, porterait sur la position précise du point de contact de cette tangente avec la développée; mais cette position est tout à fait indifférente dans la question actuelle, tandis que le point C, où aboutira la normale sur la *développante* ABDE, sera clairement déterminé.

Si la courbe primitive ABDE est une ellipse, comme dans l'épure précédente, on sait (n° **200**) que la développée $\alpha\delta\delta\varepsilon$ présentera quatre branches qui se réuniront par des points de rebroussement situés sur les axes; et alors, quand le point donné S se trouvera au dehors de la développée, on ne pourra évidemment tirer à cette courbe que deux tangentes SC et SL, lesquelles seront les normales demandées pour la courbe primitive ABDE. Mais, si le point donné S' se trouve en dedans de la développée, on pourra mener à cette courbe quatre tangentes, savoir S'C et S'C'' qui toucheront, comme tout à l'heure, les branches $\delta\varepsilon$ et 6α; puis en outre, deux autres tangentes S'C' et

S'C'' qui toucheront la même branche 𝔖𝔇, entre laquelle et les deux axes, se trouve compris le point donné S'. Par-là nous avons suffisamment justifié l'assertion émise à la fin du n° **323**, sur le nombre des normales que l'on pouvait mener à la base elliptique du cône, par le point S.

325. *Méthode par une courbe d'erreur.* Pour résoudre le problème de la normale menée d'un point S à une courbe plane AA'A''A''....., on donne quelquefois une méthode qui, malgré le défaut grave qu'elle présente, mérite cependant d'être connue. Par un point arbitraire A de la courbe proposée, menons-lui une tangente AT, et abaissons sur cette dernière la perpendiculaire ST. Si le point A était vraiment celui où doit aboutir la normale partant de S, il est évident que le pied T de la perpendiculaire abaissée sur la tangente, devrait coïncider avec A, c'est-à-dire se trouver sur la courbe donnée AA'A''....: la supposition précédente est donc *erronée;* mais en menant diverses tangentes A'T', A''T''..... et abaissant dessus les perpendiculaires ST', ST''....., les pieds T, T', T''.... formeront une *courbe d'erreur* ou courbe *auxiliaire* TT'T''.... qui, par sa rencontre avec AA'A''..., fournira le point cherché N; et alors la normale demandée sera SN. Fig. 77.

326. Malheureusement, il arrive que la courbe auxiliaire TT'T''...., loin de couper AA'A''.... sous un angle bien prononcé, ce qui serait nécessaire pour accuser nettement la position du point N, se trouvera toujours tangente à la courbe primitive. Par conséquent cette marche laissera autant d'incertitude sur la position de N que si, après avoir mené les normales aux deux points voisins A et A', et avoir reconnu que l'une passait au-dessus de S et l'autre au-dessous, on se fût contenté d'estimer, à vue d'œil, la situation de N entre les points A et A'. Il faut donc avoir soin, dans tous les problèmes où l'on emploira une courbe d'erreur, d'éviter l'inconvénient que nous venons de signaler, et qui aurait encore été plus sensible, si le point S eût été placé en dedans de la ligne AA'A''....; parce qu'alors la courbe d'erreur aurait tourné sa concavité vers AA'A''...., et qu'elle eût ainsi laissé plus d'incertitude sur le lieu du contact véritable.

Quoi qu'il en soit, observons que quand la ligne donnée AA'A''.... sera fermée, la courbe d'erreur TT'T''.... sera pareillement fermée; et que si le point S est placé au dehors de la courbe primitive, la courbe d'erreur passera deux fois par ce point S, en y offrant un nœud suivant la forme

$$TT'T''T'''ST^4T^5T^6T^7.....$$

D'ailleurs elle touchera une seconde fois en n la ligne donnée AA'A"...., ce qui fournira une seconde normale Sn, dont la direction ne coïncidera pas en général avec celle de la première normale SN, quoique cela arrive ici à cause de la forme circulaire que nous avons adoptée pour la ligne primitive.

FIG. 77. **327.** MENER UNE TANGENTE *à une courbe plane* BB'B"... *par un point* S *donné dans son plan.* Quoiqu'il suffise, pour obtenir *la direction* de cette tangente SM avec toute l'exactitude que comportent les opérations graphiques, de diriger *une règle* de manière qu'elle passe par le point S et qu'elle s'appuie sur la courbe BB'B"..., néanmoins il reste quelque incertitude sur la position du point de contact M; et si l'on a besoin de connaître celui-ci avec précision, on pourra le déterminer au moyen d'une *courbe d'erreur,* en admettant toutefois que l'on sait mener les tangentes à ligne BB'B"... par des points donnés sur cette courbe.

On construira les normales BT, B'T', B"T",... pour divers points pris sur la ligne donnée, et l'on abaissera sur ces normales, les perpendiculaires ST, ST', ST",... Alors on sent bien que si B", par exemple, était le point de contact de la tangente partie de S, il devrait arriver que le pied T" de la perpendiculaire abaissée sur la normale en B", coïncidât avec le point B", c'est-à-dire que T" devrait se trouver sur la courbe donnée; et puisqu'il n'en est pas ainsi, la supposition précédente est *erronée :* mais il en résulte que *la courbe d'erreur* TT'T"... devra passer par le point de contact que l'on cherche, et par conséquent ce point M sera fourni par l'intersection de la ligne TT'T"... avec BB'B"... Ici ces deux courbes se coupent véritablement, et la méthode n'est pas sujette à l'inconvénient signalé au n° **326**; d'ailleurs, comme la courbe d'erreur rencontre une seconde fois en m, la ligne donnée BB'B"..., il y a une seconde tangente Sm que l'on peut mener du point S.

FIG. 74 *bis.* **328.** *Autre solution.* Voici une nouvelle méthode qui aura l'avantage de ne pas exiger que l'on sache construire les normales, ou les tangentes de la courbe proposée, pour des points assignés sur cette ligne. Soit XMY la courbe à laquelle il s'agit de mener une tangente par le point S : je tire de ce point une sécante quelconque SBA sur laquelle j'élève deux perpendiculaires Aα et Bβ, égales chacune à la corde interceptée AB, et partant des deux extrémités de cette corde, mais dirigées l'une en dessus et l'autre en dessous de la sécante; je répète cette opération pour d'autres sécantes SB'A', SB"A",..., et la courbe $\alpha''\alpha\beta\beta''$ déterminée par les extrémités de toutes ces perpendiculaires, devra

évidemment passer par le point de contact cherché de la tangente SMT, puisque cette tangente est une sécante dont la partie intérieure se trouve égale à zéro. Par conséquent la rencontre des courbes XMY et $\alpha''\alpha\mathcal{6}\mathcal{6}''$, fera connaître le point M que l'on doit joindre avec S pour obtenir la tangente demandée; ou du moins, cette rencontre servira à fixer la position du point de contact M de la tangente ST, si l'on s'est contenté, comme nous l'avons dit plus haut, de tracer cette droite ST avec la règle. Il est évident d'ailleurs, que si l'on renverse toutes les perpendiculaires du côté opposé à celui où on les a d'abord élevées, on obtiendra une seconde courbe auxiliaire qui devra encore passer par le même point M, et pourra servir de vérification; et qu'enfin, il serait permis d'attribuer à chaque perpendiculaire, une longueur égale au double ou à la moitié de la corde correspondante, rapport qu'il peut être utile de faire varier, suivant la forme plus ou moins aplatie de la courbe donnée dans les environs du point M.

329. On pourrait aussi recourir à une courbe d'erreur, pour résoudre les problèmes suivants :

Mener à une courbe plane, une tangente parallèle à une droite donnée dans son plan;

Mener une tangente commune à deux courbes situées dans le même plan; mais, dans ces questions, il y aura toujours autant, et même plus d'exactitude à employer simplement *une règle* que l'on appuiera sur les deux courbes données, ou sur la courbe unique et dans la direction assignée, que d'avoir recours à des lignes auxiliaires dans la forme desquelles il entre toujours un peu d'arbitraire. Seulement, quand le lieu du contact paraîtra incertain et qu'on aura besoin de le connaître avec plus de précision, on pourra, après avoir mené la tangente, recourir à la méthode du numéro précédent.

PROBLÈME 5. *Développement d'une surface conique à base quelconque.*

330. Le problème que nous avons résolu au n° **319**, peut servir à effectuer ce développement. Car, si après avoir construit la courbe d'intersection (*abcdm*....., *a'b'c'd'm'*.....) du cône proposé avec une sphère d'un rayon arbitraire et dont le centre est placé au sommet, on développe (n° **222**) le cylindre droit qui projette cette courbe suivant *abcdm*..., et qu'on trace sur ce cylindre développé, la transformée de la ligne à double courbure (*abcdm*..., *a'b'c'd'm'*...), on obtiendra une courbe plane que je désigne par $\alpha\mathcal{6}\gamma\delta\mu$..., et dont les arcs, faciles à mesurer alors, auront la même longueur absolue que ceux de la ligne à double courbure. Ensuite, comme tous les points de cette dernière courbe se FIG. 75.

trouvaient, sur le cône, à égales distances du sommet, il est certain qu'après le développement de la surface conique, ces mêmes points devront être placés tous sur la circonférence d'un cercle décrit d'un point arbitraire S″, et avec le rayon S′Y′ de la sphère sécante. Par conséquent, après avoir tracé cette circonférence sur le plan du développement (nous laissons au lecteur le soin d'effectuer ces diverses opérations), on devra y marquer des arcs

$$\alpha'\beta',\ \beta'\gamma',\ \gamma'\delta',\ \delta'\mu',\ldots..$$

égaux en longueur absolue aux arcs

$$\alpha\beta,\ \beta\gamma,\ \gamma\delta,\ \delta\mu,\ldots..$$

de la première transformée; puis, en joignant les points de division α', β', γ',... avec le centre S″, il restera à porter sur ces rayons des longueurs

$$S''\alpha'A'',\ S''\beta'B'',\ S''\gamma'C'',\ S''\delta'D'',\ S''\mu'M'',\ldots...$$

respectivement égales à celles des génératrices du cône qui aboutissaient aux divers points

$$(A, A'),\ (B, B'),\ (C, C'),\ (D, D'),\ (M, M'),\ldots;$$

et par là on obtiendra le développement de la surface conique, sur lequel la base primitive aura pour transformée la courbe

$$A''\,B''\,C''\,D''\,M''\ldots..$$

351. Dans cette méthode, la courbe intersection du cône avec la sphère concentrique, coupe évidemment toutes les génératrices à angles droits; de sorte qu'elle tient lieu ici de ce que nous avons nommé dans les cylindres, la *section droite* ou *section orthogonale*, courbe qui nous a servi très-commodément (n° **243**) à développer un cylindre quelconque, parce que nous connaissions d'avance la forme *rectiligne* qu'elle devait prendre après le développement du cylindre. Dans les surfaces coniques, on connait aussi d'avance la forme *circulaire* que doit prendre, sur le développement, la section *orthogonale* du cône; mais malheureusement cette section n'est plus une ligne plane, de sorte que pour mesurer ses arcs, on est obligé de lui faire perdre une de ses

courbures (*), en effectuant le développement préalable d'un cylindre. Ainsi, il faut avouer que cette méthode exigeant un grand nombre d'opérations préliminaires qui multiplient toujours les chances d'erreurs, elle ne fournira pas des résultats graphiques plus exacts que si l'on avait suivi la marche plus courte indiquée au n° 267.

PROBLÈME 6. *Intersection de deux surfaces de révolution dont les axes se rencontrent.*

332. Choisissons les plans de projection de manière que le premier soit parallèle aux deux axes, et le second perpendiculaire à l'une de ces droites; ce dernier plan étant regardé comme horizontal, l'axe de la première surface aura pour projections la verticale O'Z' et le point O, tandis que l'autre axe sera projeté suivant Z'I', et OI parallèle à la ligne de terre. Les méridiens *principaux* A'B'C' et *a'b'c'*, c'est-à-dire ceux qui se trouvent dans le plan vertical OI, sont donnés par la question, et se projettent verticalement suivant leur véritable grandeur; ces courbes, qui forment en même temps les contours apparents des deux surfaces (n° 131) sur le plan vertical, sont ici deux ellipses; mais la méthode que nous allons exposer est indépendante de la nature des méridiens. Sur le plan horizontal, le premier ellipsoïde a pour contour apparent l'équateur BLX*l*; et quant à l'autre surface, nous n'en ferons pas mention sur ce plan de projection, parce que le tracé de son contour apparent exigerait ici la recherche de la courbe de contact de cet ellipsoïde avec un cylindre circonscrit et vertical (n° 106), question que nous apprendrons à résoudre plus tard, mais qui compliquerait sans utilité le problème actuel. Fig. 78.

333. Cela posé, observons que deux surfaces de révolution qui ont un axe commun en direction, ne peuvent se couper que suivant un ou plusieurs *cercles perpendiculaires à cet axe*, et décrits par les points où se rencontrent leurs méridiennes. D'ailleurs, une sphère pouvant être considérée comme de révolution autour de chacun de ses diamètres, si nous imaginons une série de sphères sécantes, ayant toutes pour centre le point (Z', O) commun aux deux axes, chacune de ces sphères coupera les surfaces proposées suivant deux cercles respectivement perpendiculaires aux axes, et dont il sera fa-

(*) Nous parlons ici suivant le langage ordinaire; mais voyez ce que nous disons aux n°s 7 et 654.

cile d'avoir les points de section. En effet, traçons du point Z', avec un rayon arbitraire, le cercle D'F'E'G' pour représenter la projection d'une de ces sphères : elle rencontre les méridiennes données aux points D' et E', F' et G'; alors il résulte des observations précédentes, que les droites D'E' et F'G' sont les projections verticales des deux cercles suivant lesquels les ellipsoïdes sont coupés par la sphère projetée sur D'F'E'G'. Or les plans de ces deux cercles ayant pour intersection une corde horizontale (M', Mm) qui tombe ici *en dedans* du contour de la sphère, nous pouvons affirmer que leurs circonférences, *situées d'ailleurs sur cette sphère*, se couperont elles-mêmes en deux points projetés verticalement sur M', et horizontalement en M et m, à la rencontre de la corde Mm avec le cercle (DME, D'E'). Ces points étant évidemment communs aux deux ellipsoïdes, appartiendront à leur ligne d'intersection ; et des opérations semblables, répétées sur d'autres sphères décrites toujours du point Z', fourniront pour les deux projections de cette courbe, les lignes

K'L'M'H' et KLMH*ml*K.

334. Il faudra spécialement appliquer la méthode précédente à la sphère qui passe par l'équateur (B'X', BLX); parce qu'on déterminera ainsi les deux points (L', L) et (L', *l*) à partir desquels la courbe passe au-dessous de l'équateur, et devient *invisible* sur le plan horizontal. D'ailleurs, quoique cette courbe d'intersection soit bien loin d'être, dans l'espace, tangente à l'équateur, néanmoins les tangentes de ces deux lignes pour le point (L', L) se trouvant l'une et l'autre dans le plan tangent qui est évidemment *vertical* tout le long de l'équateur, il en résulte que les projections horizontales de ces deux tangentes se confondront; et qu'ainsi la courbe KLM..... *touchera* le cercle BLX en L et *l*.

335. Cette conséquence générale ne souffrira d'exception que quand la tangente au point (L', L) de la ligne à double courbure, se trouvera exactement *verticale*. Alors l'élément qui eût été commun aux projections horizontales de cette tangente et de l'équateur, disparaît ou se réduit à un point mathématique; de sorte que la courbe cesse de *toucher* l'équateur, et vient le *couper* en formant ordinairement un rebroussement. Une circonstance analogue va se présenter ici pour les points (K', K) et (H', H), qui sont donnés immédiatement par la rencontre des deux méridiens principaux. En effet, dans chacun de ces points, les plans tangents aux deux surfaces sont nécessairement perpendiculaires aux plans méridiens, et par suite au plan vertical; donc leur intersec-

tion qui serait la tangente de la courbe, est aussi perpendiculaire à ce plan vertical, et s'y projette suivant *un point unique;* d'où il arrive, par les raisons précédentes, que la projection K'L'H' n'offre plus de contact avec les contours apparents des deux surfaces, tandis que ce contact a lieu ordinairement. D'ailleurs, il n'y a point ici de rebroussement aux points K' et H', parce que les deux branches de l'intersection, situées l'une en avant et l'autre en arrière du plan vertical OI, ont des positions symétriques et se confondent en projection verticale, comme on le voit d'après la construction générale qui a donné les deux points (M, M') et (*m*, M').

336. Il est utile d'observer que la projection verticale K'L'H' sera nécessairement *une ligne du second degré,* toutes les fois que les deux surfaces de révolution seront elles-mêmes de cet ordre. En effet, le plan vertical OI étant un plan méridien pour l'une et pour l'autre de ces surfaces, il divise évidemment en deux parties égales, toutes les cordes qui lui sont perpendiculaires, telles que (M*m*, M'); donc ce plan est *un plan principal* qui se trouve *commun* aux deux surfaces, et alors on démontre par un calcul fort simple, que l'intersection de celles-ci se projette sur ce plan principal, suivant une ligne du second degré (*). On devra donc profiter de cette notion acquise d'avance sur la nature de la courbe K'L'H', pour redresser les erreurs de construction qui tendraient à produire, dans cette ligne, des inflexions ou une courbure qui ne s'accorderaient pas avec la forme bien connue des sections coniques. Fig. 78.

337. Observons encore que, quel que soit le degré des deux surfaces de révolution, la courbe plane K'L'H' considérée en elle-même, et indépendamment de la courbe gauche dont elle reçoit la projection verticale, ne se termine pas brusquement aux points K' et H'; mais qu'elle doit se prolonger au delà pour rentrer sur elle-même, ou pour s'étendre indéfiniment. De sorte qu'en continuant de tracer sur le plan vertical, des cercles qui aient toujours le point Z' pour centre, et qui s'étendent au delà ou en deçà des points H' et K', on pourra, si la forme des méridiens leur permet d'être encore coupés par ces cercles, obtenir des points de la courbe K'L'H', situés au dehors de la partie qui reçoit la projection de l'intersection des deux surfaces. Cette circonstance, que l'on apercevra plus clairement dans l'épure 79 relative à une

(*) Ce théorème intéressant est dû à M. *J. Binet*. Voyez l'*Analyse appliquée à la géométrie des trois dimensions*, chap. IX.

question analogue (n° **344**), tient à ce que la propriété graphique qui sert à trouver chaque point M′ de la courbe plane K′L′H′, est plus générale que la définition de ce même point, considéré comme la projection d'un point commun aux deux surfaces. En effet, sous ce dernier rapport, il faut que M′ soit non-seulement à la rencontre des deux cordes D′E′ et F′G′, mais encore situé dans l'intérieur du cercle D′F′E′G′, comme nous l'avons énoncé n° **333**; de sorte que, quand les deux cordes D′E′ et F′G′ ne se couperont que dans leur prolongement, le point de section conviendra bien encore à la courbe plane K′L′H′, mais non plus à la courbe gauche suivant laquelle se coupent les deux surfaces de révolution.

Fig. 78. **338**. De la tangente; *première méthode*. Nous pouvons trouver cette droite pour le point (M, M′), en cherchant l'intersection des plans qui touchent les deux surfaces en cet endroit. Or, le plan tangent relatif à l'ellipsoïde A′B′C′, s'obtiendra (n° **133**) en transportant le point M′ en D′ sur le méridien principal, puis en traçant la tangente D′T′ à ce méridien; alors, si l'on ramène le pied T′ de cette tangente en T sur le méridien OM, la droite Tθ perpendiculaire à OM, sera la trace horizontale du plan cherché.

Quant à l'ellipsoïde *a′b′c′* dont l'axe n'est pas vertical, je ramène d'abord le point M′ en F′ sur le méridien principal; puis, je construis la normale F′N′, de laquelle je conclus (n° **136**) la normale (M′N′, MN) relative au point (M, M′); et alors il me suffira de mener par ce point un plan perpendiculaire à cette dernière normale. Pour cela, j'imagine dans ce plan une droite parallèle à sa trace verticale, et dont la projection verticale sera la ligne M′P′ perpendiculaire à M′N′, tandis que sa projection horizontale sera MP parallèle à la ligne de terre; ensuite, par le pied (P, P′) de cette ligne auxiliaire, je mène perpendiculairement sur MN, la droite PQ qui est évidemment la trace horizontale du plan tangent au point (M, M′) de l'ellipsoïde *a′b′c′*.

Cela posé, les traces PQ et Tθ des deux plans tangents allant se rencontrer au point θ, c'est là le pied de la tangente demandée, laquelle a ainsi pour projections θM et θ′M′.

339. *Deuxième méthode, par le plan normal.* Nous avons vu au n° **214** que la tangente à l'intersection de deux surfaces, devait être perpendiculaire au plan mené par les deux normales de ces surfaces; il nous suffira donc de trouver ce plan, qui est lui-même normal à la courbe. Or, nous avons déjà construit la normale (M′N′, MN) pour le deuxième ellipsoïde; quant au premier, nous mènerons au point D′ du méridien principal, la droite D′R′ perpendi-

culaire sur la tangente D′T′, et alors on sait (n° **130**) que la normale pour le point (M′, M), sera la droite (M′R′, MO). Cela posé, il serait bien facile de trouver la trace verticale du plan mené par les deux normales ci-dessus indiquées; mais, comme nous avons besoin de connaître seulement *la direction* de cette trace, et qu'elle sera la même sur les plans verticaux OI et O′I′ qui sont parallèles, nous observerons que les normales en question vont rencontrer les axes en R′ et N′; d'où il résulte immédiatement que N′R′ est la trace du plan normal sur le plan vertical OI, et qu'en tirant par le point M′ la droite M′θ′ perpendiculaire à cette trace, on aura la projection verticale de la tangente demandée.

Pour obtenir l'autre projection, prolongeons jusqu'au plan horizontal deux quelconques des droites qui réunissent les trois points (M′, M), (N′, N), (R′, O), lesquels sont situés dans le plan normal. Ici, on voit que la droite (N′M′, NM) perce le plan horizontal au point α, et que la droite (N′R′, NO) le rencontre en β; donc $\alpha\beta$ est la trace horizontale du plan normal, et en lui menant une perpendiculaire Mθ, ce sera la projection horizontale de la tangente cherchée.

340. La méthode que nous venons d'employer est non-seulement plus simple, dans certains cas, que celle des deux plans tangents, mais elle offre encore l'avantage de pouvoir quelquefois s'appliquer à des points particuliers, pour lesquels l'autre méthode serait insuffisante. Fig. 78.

Considérons, en effet, le point (K, K′) situé à la fois sur les deux méridiens principaux : à cause de cette position particulière, les deux plans tangents seront l'un et l'autre perpendiculaires au plan vertical, et par suite, leur intersection qui est la tangente de la courbe (K′L′H′, KLH,....), sera projetée horizontalement suivant une perpendiculaire à KO, et verticalement *en un point* unique K′. Cette construction fait connaître la position qu'occupe, dans l'espace, la tangente de la courbe gauche; mais elle n'apprend rien sur la droite qui toucherait en K′ la courbe plane K′L′A′, droite que l'on doit regarder comme la projection de la tangente qui précéderait immédiatement, dans l'espace, celle qui s'est réduite à un point unique en se projetant sur le plan vertical : tandis que la considération des deux normales manifeste une propriété constante dont jouit la courbe plane K′L′H′ regardée comme tracée dans le plan des deux méridiens, et indépendamment de la ligne à double courbure dont elle reçoit la projection. Cette propriété consiste en ce que, si l'on transporte le point quelconque M′ sur les deux méridiens, en D′ et en F′ par des perpendiculaires aux axes, puis si l'on tire les normales D′R′

et F′N′, *la droite* R′N′ *sera toujours perpendiculaire à la tangente en* M′. Or, cette relation subsistant pour tous les points de la courbe plane K′L′H′, et ne portant que *sur des lignes situées dans son plan*, elle doit être vraie aussi pour le point K′ où elle demeure évidemment applicable avec encore plus de simplicité, puisque ce point est par lui-même transporté sur les deux méridiens. Par conséquent, il suffira de mener les normales K′V′ et K′U′, puis de tracer la droite U′V′, sur laquelle on abaissera la perpendiculaire K′S′ qui sera la tangente demandée.

Une construction semblable fera trouver la tangente au point H′.

PROBLÈME 7. *Intersection d'un paraboloïde avec un hyperboloïde, tous deux de révolution, et dont les axes se rencontrent.*

FIG. 79. **341**. Soient (O, O′Z′) l'axe du paraboloïde, et A′C′B′ le méridien principal de cette surface que nous supposerons terminée au cercle (A′B′, AB), de manière que l'intérieur de ce paraboloïde soit visible sur le plan horizontal. Soit aussi (OI, Z′I′) l'axe de l'hyperboloïde, ce qui suppose que le plan vertical de projection a été choisi parallèle aux deux axes à la fois : quant au méridien de cette seconde surface, nous ne le regarderons pas comme donné par la question, parce qu'alors le problème rentrerait entièrement dans celui du n° **332** ; mais nous définirons l'hyperboloïde au moyen de la génératrice rectiligne (PQ, P′Q′) qui l'engendrerait en tournant autour de la droite fixe (OI, Z′I′), sans toutefois considérer cette seconde surface comme réellement existante ; c'est-à-dire qu'ici le paraboloïde subsistera seul, et sera traversé suivant une certaine courbe par les diverses positions de la droite mobile (PQ, P′Q′). Du reste, nous emploierons encore, pour trouver cette courbe, des sphères sécantes (n° **333**) décrites toutes du point Z′; seulement, comme nous ne connaissons pas *à priori* le méridien de l'hyperboloïde, nous ne tracerons plus arbitrairement le grand cercle d'une de ces sphères, mais nous commencerons par construire un parallèle de cet hyperboloïde.

342. Menons donc par un point ω′ pris à volonté sur l'axe, un plan F′ω′G′ qui lui soit perpendiculaire : ce plan rencontrera la génératrice au point (6′, 6), dont la distance au point ω′ sera évidemment l'hypoténuse d'un triangle rectangle construit sur les côtés ω′6′ et 6′6″ = α6 ; ainsi, en décrivant avec cette hypoténuse ω′6″, un cercle F′6″G′, ce sera le rabattement du parallèle suivant lequel l'hyperboloïde est coupé par le plan F′ω′G′; et les extrémités F′ et G′ de son diamètre, seront deux points de l'*hyperbole méridienne* qui serait située dans le plan vertical OI.

Cela posé, adoptons pour rayon d'une de nos sphères sécantes, la distance Z'F' : alors, une pareille sphère coupera l'hyperboloïde suivant le parallèle projeté sur F'G', et le paraboloïde suivant un cercle projeté sur D'E'; par conséquent le point M' où se rencontrent ces deux cordes, et qui tombe *en dedans* de la sphère, représente la projection verticale des deux points où se coupaient les circonférences de ces parallèles : ce sont donc là deux points de l'intersection des surfaces proposées, et on les retrouvera sur le plan horizontal, en y traçant le parallèle (DME, D'E') et abaissant la verticale M'*m*M.

343. Des constructions analogues fourniront autant de points que l'on voudra de la courbe

$$(K'L'\lambda'M'H',\ KL\lambda MHmlK),$$

suivant laquelle le paraboloïde est coupé par l'hyperboloïde; et le méridien V'F'S'U' de cette dernière surface, qui se conclura de tous les points tels que F', devra toucher, sur le plan vertical, la projection de la génératrice au point (S, S') dans lequel cette droite traverse le méridien principal OI. D'ailleurs, ce sera la rencontre de ce méridien V'F'S'U' avec le méridien du paraboloïde, qui fournira les points extrêmes de l'intersection (K, K') et (H, H').

344. Observons aussi qu'une même sphère pourra fournir deux points tels que L' et λ' situés sur un parallèle unique, et appartenant tous deux à l'intersection des surfaces proposées; tandis que, d'autres fois, une sphère sécante fournira deux points M' et μ', dont un seul appartiendra véritablement à l'intersection, parce que le deuxième serait placé en dehors du contour de la sphère. Cependant ce point μ', continuant de satisfaire à la propriété graphique qui sert à construire chaque point de la courbe plane K'M'H', considérée indépendamment de la courbe gauche dont elle reçoit la projection, appartiendra toujours au prolongement de cette ligne plane (n° **337**); et celle-ci sera évidemment une hyperbole, d'après les raisons citées au n° **336**.

345. *De la tangente.* Cherchons, comme précédemment (n° **339**), les normales des deux surfaces pour le point quelconque (M, M'). Dans le paraboloïde, la normale E'R' du méridien fait connaître le point R' où aboutirait, sur l'axe O'Z', la normale de la surface en (M, M'); et sans tracer cette dernière droite, il nous suffit d'avoir obtenu ce point R'.

Dans l'hyperboloïde dont le méridien n'est pas donné par la question, j'observe que le plan tangent relatif au point projeté en (6, 6') et rabattu en 6'', passerait par la tangente 6''T du parallèle et par la génératrice (6P, 6'P') qui perce le plan vertical OI en (S, S'); par conséquent, sur ce plan des deux axes, le plan tangent aurait pour trace la droite TS'; donc, en lui menant une perpendiculaire 6'N', ce sera la projection de la normale relative au point (6, 6'). Mais ce point est sur le même parallèle que (M, M'); donc aussi, pour ce dernier, la normale de la surface rencontrerait l'axe I'Z' au point N'; ainsi cette normale est déterminée.

Cela posé, le plan des deux normales en (M, M') coupera évidemment le plan vertical OI suivant la droite R'N'; donc, en abaissant sur cette ligne une perpendiculaire M'ϑ', ce sera la projection verticale de la tangente à la courbe d'intersection. Ensuite, nous pourrions chercher sur le plan horizontal de projection, la trace du plan des deux normales, lequel passe par trois points connus (M', M), (R', O), (N', N); mais il sera beaucoup plus court de déterminer cette trace sur le plan horizontal D'E', où est déjà situé le point (M, M'). Car, en prolongeant R'N' jusqu'à ce qu'elle coupe ce plan en ρ', et projetant ce dernier point en ρ, la droite ρM sera évidemment la trace demandée; si donc on lui mène la perpendiculaire Mϑ, on aura la projection horizontale de la tangente à l'intersection des deux surfaces.

LIVRE V.

DES PLANS TANGENTS DONT LE POINT DE CONTACT N'EST PAS DONNÉ.

346. Les problèmes que nous avons résolus au livre II, sur les plans tangents, supposaient que le point de contact était donné sur la surface. Il reste donc, pour compléter cette théorie importante, à examiner les questions où, sans assigner le point de contact, on exige que le plan tangent cherché remplisse certaines conditions, telles que les suivantes :

1°. Que le plan tangent passe par un point donné hors de la surface;

2°. Qu'il soit parallèle à une droite connue;

3°. Qu'il passe par une droite donnée, ou par deux points assignés dans l'espace;

4°. Que le plan tangent cherché soit parallèle à un plan donné;

5°. Qu'il touche plusieurs surfaces à la fois.

Ces diverses conditions vont faire le partage naturel de ce livre en plusieurs chapitres, dans lesquels nous ne reviendrons pas sur ce qui regarde les surfaces cylindriques ou coniques, parce que nous avons complété de suite, au chapitre III du livre II, les problèmes relatifs à ces deux genres de surfaces très-simples.

CHAPITRE PREMIER.

Des plans tangents menés par un point extérieur à la surface.

347. Soit V le point donné au dehors de la surface quelconque S : menons Fig. 80.
par ce point divers plans sécants dans une direction arbitraire, et par exemple, faisons-les passer tous par une droite quelconque VAD qui traverse la surface. Alors, ils couperont celle-ci suivant des courbes AMD, AM′D, AM″D,..... que l'on saurait construire par les méthodes exposées précédemment, et auxquelles on pourra généralement mener, du point V, des tangentes VM, VM′, VM″,.....;

de sorte que toutes ces droites formeront évidemment un cône ayant le point V pour sommet, et qui sera *circonscrit* à la surface S, c'est-à-dire qui la *touchera tout le long de la courbe* MM'M″..... En effet, pour le point M″, par exemple, le plan tangent de S renfermera la tangente M″T de la courbe MM'M″, aussi bien que l'arête M″V qui, par construction, est tangente à la surface : donc ce plan sera lui-même tangent au cône; et les deux surfaces ayant ainsi un plan tangent commun en M″, offriront un véritable contact dans ce point, et dans tous ceux de la ligne MM'M″.....

348. Cela posé, pour résoudre le problème général qui fait l'objet de ce chapitre, *il suffira de construire la ligne de contact* MM'M″ *de la surface proposée* S *avec un cône circonscrit ayant son sommet en* V, *puis de mener un plan tangent à* S *dans un quelconque des points de cette ligne;* ce plan satisfera évidemment à la question, puisqu'il touchera nécessairement (n° **347**) le cône circonscrit, et qu'ainsi il passera par le sommet V qui est le point donné.

Réciproquement, tout plan mené du point V, tangentiellement à la surface S, touchera celle-ci en un certain point que j'appelle *m*, et qui étant joint avec V, fournira une droite V*m* évidemment tangente à S; donc cette droite V*m* sera nécessairement une des arêtes du cône circonscrit VMM'M″...., et par conséquent le point *m* devra se trouver sur la courbe MM'M″..... qui devient ainsi *le lieu de toutes les solutions* du problème proposé.

Seulement, le problème sera impossible quand le cône circonscrit n'existera pas; c'est-à-dire lorsque le point V sera tellement placé que l'on ne pourra mener, de ce point, aucune tangente aux diverses sections faites par des plans passant par VAD.

349. Il résulte de là que la question qui nous occupe admet une infinité de solutions, excepté quand la surface proposée S est *développable*. En effet, nous avons vu (n° **183**) qu'une telle surface était l'enveloppe de toutes les positions d'un plan mobile, assujetti à une loi de mouvement qui ne laissait d'arbitraire qu'une seule condition (*) : donc, lorsque ce plan mobile, qui est en même temps le plan tangent de la surface développable, viendra à passer par le point donné V, il ne pourra plus prendre d'autre situation; ou du moins, il ne saurait occuper alors qu'un nombre limité

(*) Ou autrement dit, qui ne laissait qu'*une seule constante arbitraire* dans son équation; ainsi la condition de passer par le point V, fixera complètement la position de ce plan dans l'espace.

de positions, suivant la nature et le nombre des nappes de la surface. Ainsi, pour cette classe de surfaces, le problème de construire un plan tangent qui passe par un point donné, devient tout à fait déterminé (*), et c'est ce que nous avons reconnu dans les cônes et dans les cylindres (nos **116** et **123**).

350. D'ailleurs, comme une surface développable est touchée par son plan tangent tout le long d'une même génératrice rectiligne (n° **177**), il s'ensuit que si l'on effectuait ici les sections indiquées n° **347**, et qu'on leur menât des tangentes par le point V, tous les points de contact se trouveraient situés sur une droite de la surface; et le cône circonscrit se réduirait alors à un ou plusieurs plans tangents qui passeraient par le point V.

351. Le problème de mener, par un point V, un plan tangent à une surface S non développable, redeviendrait déterminé, si l'on ajoutait la condition que ce plan dût toucher la surface *sur une courbe donnée*, par exemple sur un méridien, ou sur un parallèle, dont la position serait assignée. En effet, après avoir construit la ligne de contact MM'M"... du cône circonscrit à S, il suffirait d'examiner en quels points elle rencontre la courbe donnée, et ce seraient là évidemment les points de contact des plans tangents qui satisfont au problème. Celui-ci serait impossible, si la courbe assignée sur la surface n'avait aucun point commun avec la ligne MM'M"...

352. Quant à la construction de la ligne de contact d'une surface quelconque S, avec un cône circonscrit qui a pour sommet un point donné V, courbe qui est d'ailleurs très-utile dans *la Perspective*, puisque c'est évidemment le *contour apparent* de la surface vue du point V, la seule méthode tout à fait générale est celle que nous avons indiquée n° **347**; cependant, comme elle exige des opérations graphiques assez pénibles, nous allons exposer d'autres méthodes plus simples, mais applicables seulement à certains genres de surfaces qui se rencontrent plus fréquemment. Auparavant, toutefois, nous dé-

---

(*) L'exception que présentent les surfaces développables est unique, car elle n'a point lieu pour *les surfaces gauches*. En effet, nous verrons que dans celles-ci, tout plan mené par le point V et par une génératrice rectiligne, est tangent à la surface dans un certain point qu'il faut construire; de sorte qu'en joignant ce point de contact avec V, on obtiendra encore une des arêtes du cône circonscrit, lequel subsiste ici comme dans les surfaces quelconques.

montrerons un théorème important sur ces lignes de contact, par rapport à toutes les surfaces du seond degré.

353. *La courbe de contact d'un cône circonscrit à une surface du second degré, est toujours* PLANE; *et son plan se trouve parallèle au plan diamétral qui serait conjugué avec le diamètre mené par le sommet du cône.*

FIG. 80. Soient V le sommet du cône, et S la surface du second degré dont il s'agit; nous supposerons d'abord qu'elle admet un centre O, mais du reste, elle peut être indifféremment un ellipsoïde ou bien l'un des deux hyperboloïdes. En faisant passer par la droite VO divers plans sécants, nous obtiendrons des courbes du second degré ABD, AB'D, AB''D,..... ayant toutes un diamètre commun OA; et si nous les coupons par le *plan diamétral* BB'C qui est *conjugué avec* OA, c'est-à-dire qui divise en deux parties égales toutes les cordes de la surface parallèles à cette direction, nous obtiendrons des droites OB, OB', OB'',.... qui jouiront évidemment de la même propriété, par rapport aux cordes menées dans chacune de ces courbes parallèlement à OA. Ainsi OA et OB, OA et OB', OA et OB'',.... formeront des systèmes de diamètres conjugués deux à deux, dans les diverses courbes du second degré ABD, AB'D, AB''D,....

Cela posé, tirons à l'une de ces courbes une tangente VM; puis, menons par le point de contact M, un plan parallèle à BB'C : ce nouveau plan coupera la surface S suivant une courbe MM'N, et les sections primitives suivant des ordonnées PM, PM', PM'',.... respectivement parallèles à OB, OB', OB''. Alors, si l'on mène par les divers points M', M'',.... des tangentes aux courbes AM'D, AM''D,..., je dis que ces tangentes aboutiront, sur la droite OA, au même point V d'où est partie la première MV. En effet, on sait que dans toute ligne du second ordre *rapportée à deux diamètres conjugués*, la sous-tangente ne dépend que de l'abscisse du point de contact et du diamètre sur lequel on compte cette abscisse; par conséquent, pour les divers points M, M', M'',.... qui répondent à la même abscisse OP, la sous-tangente aura une valeur commune, savoir :

$$PV = \frac{\overline{OA}^2}{OP} - OP, \text{ d'où } OV = \frac{\overline{OA}^2}{OP}.$$

Donc, toutes les tangentes menées en M, M', M'',.... formeront bien un cône circonscrit à la surface du second degré, et dont la ligne de contact sera la courbe *plane* MM'M''N, parallèle au plan diamétral BB'C qui est conjugué

avec VO (*). D'ailleurs, ce diamètre VO contiendra le centre P de la courbe MM'M''...., comme nous allons le faire voir.

354. *Dans toute surface du second degré, les diverses sections faites par des plans parallèles entre eux, sont des courbes* SEMBLABLES, *dont les centres sont situés sur le diamètre qui se trouve conjugué avec celui de ces plans sécants qui passe par le centre de la surface.* En effet, quelle que soit une de ces sections planes MM'M''N, on pourra mener par le centre O, un plan BB'B''C qui lui soit parallèle, et construire le diamètre OA conjugué avec ce dernier plan. Alors toutes les sections ABD, AB'D, AB''D,.... auront pour diamètres conjugués deux à deux, OA et OB, OA et OB', OA et OB'': donc, les ordonnées MP, MP', MP'',.... qui correspondent à la même abscisse OP, seront proportionnelles aux diamètres non communs OB, OB', OB'',....; et par conséquent ces droites considérées comme des *rayons vecteurs* PARALLÈLES menés dans les deux courbes MM'N et BB'C, satisferont à la condition générale de la *similitude*. D'ailleurs, comme le point O est évidemment le centre de figure de la courbe BB'C, il en sera nécessairement de même du point P par rapport à la courbe MM'N; ainsi les centres des sections parallèles au plan diamétral BB'C, sont bien situés tous sur le diamètre OA conjugué avec ce plan.

355. Revenons au théorème démontré n° **353** pour les surfaces douées d'un centre; et afin de l'étendre aux surfaces qui en sont dépourvues, c'est-à-dire aux deux paraboloïdes, modifions la démonstration de la manière suivante. Menons par le point donné V, une parallèle VX' à l'*axe* ou diamètre principal OX du paraboloïde; cette droite VAX' sera encore un *diamètre* de la surface, et les divers plans sécants menés par ce diamètre, fourniront des sections *paraboliques* AME, AM'E', AM''E'',..... Cela posé, tirons à l'une d'elles la tangente VM, et par le point de contact M, menons parallèlement au plan tangent du paraboloïde en A, un plan MM'M''N qui coupera les paraboles suivant des ordonnées MP, M'P, M''P,.... respectivement parallèles aux tangentes AT, AT', AT'',.... de ces courbes. Alors, pour de telles ordonnées, on sait que la soutangente sera constamment double de l'abscisse commune AP; par conséquent toutes les tangentes en M, M', M'',.... aboutiront au même point V, et formeront ainsi un cône circonscrit qui touchera le paraboloïde le long de FIG. 81.

(*) Dans le cas particulier où la surface est une sphère, la courbe de contact du cône circonscrit devient *un petit cercle, perpendiculaire à la droite* VO qui réunit le sommet V avec le centre de la sphère. D'ailleurs, cela se prouve directement, en faisant tourner autour de VO, un grand cercle et sa tangente menée du point V.

la courbe *plane* MM'M''N. En outre, on voit que le plan de cette courbe est *parallèle au plan tangent* en A, lequel remplace ici le plan diamétral conjugué avec VX'; car ce dernier serait à une distance infinie.

Dans l'ellipsoïde de la figure 80, le plan tangent en A était aussi parallèle à BB'B''C, et par suite à la courbe de contact MM'M''N : mais nous n'avons pas voulu employer alors ce plan tangent, parce qu'il n'existerait plus dans les hyperboloïdes, si le diamètre VO ne rencontrait pas la surface.

PROBLÈME 1. *Trouver la courbe de contact d'une surface de révolution, avec un cône circonscrit dont le sommet est donné.*

Fig. 84. **356.** Soient (O, I'Z') l'axe de révolution que nous regarderons comme vertical, et (X'C'Y'D', CD) le méridien principal de la surface. Ici, cette courbe est une ellipse dont un diamètre principal coïncide avec l'axe de révolution; mais la méthode que nous allons exposer est tout-à-fait générale, et applicable à un méridien quelconque. Soit d'ailleurs (V, V') le point assigné pour le sommet du cône circonscrit : la courbe X'M'Y' suivant laquelle il touchera l'ellipsoïde, peut se déterminer en construisant successivement les points qui se trouvent sur chaque parallèle de la surface, ou bien ceux qui sont situés sur les divers méridiens; ce qui va donner lieu à deux méthodes, dont chacune suffit à elle seule pour tracer la courbe demandée.

357. *Méthode du parallèle.* Soit (E'F', EMF) le parallèle choisi arbitrairement sur la surface de révolution S : en substituant à celle-ci un cône droit engendré par la révolution de la tangente E'Z' autour de l'axe, il est évident que ce cône touchera la surface S tout le long du cercle E'F'; et qu'ainsi tout plan tangent qui sera mené à ce cône par le point (V, V'), touchera S dans le point où l'arête de contact rencontrera le cercle E'F'. Par conséquent ce point de rencontre appartiendra à la courbe demandée X'M'Y', qui n'est autre chose (nº **348**) que *le lieu des points de contact des divers plans tangents menés à la surface* S, *par le point* (V, V').

358. La question est donc réduite à trouver un plan qui, partant du point (V, V'), aille toucher le cône Z'E'F' : or on y parviendrait (nº **123**) en joignant le sommet (Z', O) (*) avec (V, V'), puis en cherchant le point où cette

(*) Les trois points désignés par Z' dans notre épure, sont censés représenter le point unique où la tangente E'Z' irait couper l'axe vertical, point qui est le sommet du cône droit, mais qui n'a pu se trouver ici renfermé dans le cadre.

droite irait couper le plan horizontal E'F', et menant enfin de ce dernier point des tangentes au cercle (E'F', EMF). Mais comme le sommet (Z', O) peut se trouver, ainsi que cela arrive ici, placé à une distance incommode, et que d'ailleurs le point d'où partiraient les tangentes à la base du cône, varierait aussi à mesure qu'on changerait de parallèle, nous allons employer une marche qui obviera à ces deux inconvénients.

Adoptons pour base du cône droit, le cercle (G'H', GPH) suivant lequel il est coupé par le plan horizontal V'G'H': alors cette nouvelle base contenant *dans son plan* le point donné (V, V'), il deviendra inutile de recourir au sommet du cône, et il suffira de mener les tangentes à la base actuelle par le point (V, V'); d'ailleurs, comme ce sont les points de contact qui seuls nous intéressent, décrivons sur la droite VO comme diamètre, une circonférence qui coupe le cercle GPH aux points P et Q, et les rayons OP et OQ seront évidemment les projections horizontales des génératrices suivant lesquelles le cône droit sera touché par les plans tangents menés de (V, V'). Donc, en prolongeant ces rayons jusqu'au parallèle donné EMF, les points M et N que l'on projettera sur E'F' en M' et N', seront deux points qui appartiendront (n° 357) à la courbe de contact de la surface S avec le cône circonscrit dont le sommet serait en (V, V').

359. Pour trouver les points de cette courbe qui seront sur un autre parallèle, on agira d'une manière toute semblable; et la *même circonférence* décrite sur VO comme diamètre, *servira pour toutes ces opérations*, puisque les tangentes à la base du nouveau cône droit devront encore partir du point (V, V'). Par exemple, si nous considérons le parallèle (E"F", EMF) égal au précédent, il faudra tirer la tangente E"G" qui, en tournant autour de l'axe vertical, décrirait un cône droit dont la base, considérée dans le plan horizontal V'G', sera le cercle (G"H", G"P"H") : celui-ci étant coupé par la circonférence VO en deux points P" et Q", les rayons OP" et OQ" sont les projections horizontales des arêtes de contact du cône droit G"E"F"H" avec les plans tangents qui lui seraient menés par le point (V, V'); puis, la rencontre de ces rayons avec le parallèle (EMF, E"F"), fournira les points (M", M"), (N", N") situés sur ce parallèle, et appartenant à la courbe de contact de la surface S avec le cône circonscrit qui a son sommet en (V, V').

360. *Méthode du méridien.* Pour trouver les points de cette même courbe qui sont situés sur un méridien quelconque αOδ, imaginons par tous les points de cette méridienne des droites perpendiculaires à son plan, et dont l'ensemble formera *un cylindre* horizontal, évidemment *circonscrit* à la surface S le long FIG. 84.

de cette courbe méridienne. Alors, si par le point (V, V') nous menons à ce cylindre un plan tangent, ce dernier se trouvera aussi tangent à l'ellipsoïde dans le point où il touchera la base du cylindre; et par conséquent ce point appartiendra à la courbe cherchée, puisque celle-ci (n° **348**) est le lieu de tous les points de contact de l'ellipsoïde avec les plans tangents qui partent de (V, V').

Or, pour construire ce plan tangent au cylindre horizontal, il faut (n° **116**) tirer du point (V, V') une parallèle aux génératrices de cette surface, c'est-à-dire une droite (VP", V'H") perpendiculaire au plan vertical αOϐ qui contient la base du cylindre; puis, du point P" où cette droite rencontre ce plan méridien, mener à cette base une ou plusieurs tangentes. Mais pour réaliser cette dernière opération, je rabats la méridienne αOϐ sur le plan vertical, ainsi que le point P"; ce dernier se transporte évidemment en (H", H"), et en tirant les tangentes H"φ', H"F", j'obtiens les points de contact (φ', φ), (F", F) sur la base du cylindre rabattue; donc, en les ramenant par des arcs de cercle horizontaux dans le méridien primitif αOϐ, ils auront pour véritable positions (ψ, ψ') et (M"; M").

361. Ce dernier point coïncide avec un de ceux que nous avons obtenus par la *méthode du parallèle*, parce qu'ici le plan méridien αOϐ a été choisi de manière à renfermer le point (M", M") déjà construit; et nous avons adopté cette disposition, afin de montrer clairement que, si les deux méthodes s'appuient sur des considérations très-différentes, elles emploient du moins *les mêmes opérations graphiques, exécutées dans un ordre précisément inverse*, comme on doit le voir ici pour le point (M", M"). Au reste, quelle que soit la méthode que l'on emploiera, il est des points particuliers qui s'obtiendront par un procédé direct; et nous recommandons de *commencer l'exécution de l'épure* par la recherche de ces *points remarquables*.

362. *Points sur les contours apparents.* Quant à ceux qui seront situés sur l'équateur (C'D', CLD), il est clair que les plans qui toucheront l'ellipsoïde en ces points, se trouveront *verticaux*, et dès lors leurs traces horizontales seront les tangentes VL et VK partant du point V; d'ailleurs, les points de contact L et K se trouvant déterminés en projection horizontale, par la rencontre du cercle CLD avec la circonférence dont VO est le diamètre, il suffira de projeter L et K en L' et K' sur C'D'. Observons, en outre, que ces deux points étant sur le contour apparent de la surface relativement au plan horizontal, ils formeront les limites communes de *l'arc visible* LMXK et de *l'arc invisible* LM"YK sur cette projection; d'ailleurs, le premier de ces arcs se distinguera

aisément de l'autre, en examinant si l'un de ses points (M, M') est placé *au-dessus* de l'équateur C'D'.

De même, pour les points situés sur le méridien principal (X'C'Y'D', CD), les plans tangents de l'ellipsoïde se trouveront (n° **129**) perpendiculaires au plan vertical; ainsi leurs traces passeront par le point V', et seront les deux tangentes V'X', V'Y', dont les points (*) de contact X' et Y' devront être projetés en X et Y sur CD. D'ailleurs, comme ces deux points sont placés sur le contour apparent de la surface par rapport au plan vertical, ils sépareront *l'arc visible* X'M'Y' *de l'arc invisible* X'N'Y' *sur cette projection;* et l'on distinguera le premier de ces deux arcs, en examinant si l'un de ses points (M, M') est placé *en avant* du plan vertical CD qui contient le méridien principal.

363. *Points limites.* Nous entendons par là les points où *la tangente* de la courbe de contact *se trouvera horizontale*, et qui seront par conséquent plus haut ou plus bas que tous les points voisins. D'abord, cette circonstance ne pourra se rencontrer que dans le méridien VO qui passe par le sommet (V, V') du cône circonscrit : en effet, la méthode générale qui a fourni (n° **358**) les points (M, M') et (N, N'), montre évidemment que les divers points de la courbe sont deux à deux *situés sur des cordes horizontales* (MN, M'N') *que le plan vertical* VO *divise chacune en deux parties égales;* donc, lorsqu'un de ces points correspondants se trouvera dans le plan vertical VO, l'autre s'y trouvera aussi, et par suite la corde relative à ces points ainsi confondus, sera devenue tangente à la courbe, sans avoir cessé d'être horizontale.

Maintenant, pour déterminer ces points limites que nous savons être placés sur le méridien VO, j'observe que la droite qui joindrait l'un d'entre eux avec (V, V'), serait nécessairement *tangente à la méridienne* VO, puisqu'elle se trouverait à la fois dans le plan de cette courbe et dans le plan tangent de l'ellipsoïde; donc, si je rabats cette méridienne sur le plan vertical, ainsi que le point (V, V') qui sera transporté évidemment en V'', puis que je mène la tangente V''U', dont je déterminerai exactement le point de contact U' au moyen des cordes supplémentaires, il n'y aura plus qu'à projeter ce point en U, et à le ramener par un arc de cercle horizontal dans sa véritable position (R, R'). Ce sera là le point le plus bas de la courbe, et la *tangente*

(*) Il suffira de mener ces tangentes avec une règle appuyée sur le point V' et sur le méridien; mais ensuite, il faudra fixer leurs points de contact avec précision, en se servant des cordes supplémentaires de l'ellipse méridienne.

horizontale U'R' indiquera le dernier des parallèles qui peuvent contenir des points de cette ligne.

Le point le plus haut (T, T') s'obtiendrait semblablement; mais nous n'avons pas voulu effectuer la construction qui s'y rapporte, dans la crainte de jeter quelque confusion sur la figure.

364. Dans l'exemple actuel où la surface de révolution est du second degré, la courbe de contact est nécessairement *plane* (nº **353**), et ici c'est une ellipse qui a pour un de ses *axes*, dans l'espace, la droite (RT, R'T'); puisque les tangentes aux extrémités de cette ligne lui sont perpendiculaires, attendu qu'elles le sont au plan vertical VO (nº **363**). Il serait même facile d'en conclure le deuxième axe et les deux autres sommets, en faisant une section horizontale dans l'ellipsoïde par le milieu de la droite (RT, R'T'); et l'on doit observer que ces deux *diamètres principaux* resteront les *axes* de la projection horizontale RLTK, parce que l'un d'eux étant horizontal, l'angle compris entre leurs projections demeurera droit; tandis que sur le plan vertical, ces deux diamètres ne seront plus perpendiculaires l'un à l'autre, et deviendront simplement *deux diamètres conjugués obliques* de la courbe R'L'T'K'.

365. REMARQUE. Si l'on se rappelle que toute surface de révolution peut être considérée comme *l'enveloppe d'un cône mobile* (nº **194**) toujours circonscrit le long d'un parallèle, ou bien encore comme *l'enveloppe d'un cylindre mobile* (nº **196**) toujours circonscrit le long d'un méridien, on sentira que dans les deux méthodes employées nºˢ **357** et **360**, nous avons eu pour but de substituer à la surface de révolution proposée, une *enveloppée* conique ou cylindrique, pour laquelle la construction du plan tangent mené du point (V, V'), était plus facile que pour la surface primitive. Or, comme les surfaces de révolution admettent aussi *une enveloppée sphérique* (nº **193**) dont le rayon est la normale au méridien, il en résulte une troisième méthode, moins avantageuse dans la pratique, mais qu'il est intéressant de connaître.

FIG. 84. **366.** *Troisième méthode, par une enveloppée sphérique.* Avec la normale E'ω du méridien, traçons un cercle qui, en tournant autour de l'axe vertical, engendrera une sphère évidemment tangente à la surface de révolution S tout le long du parallèle E'F'; puis, imaginons un cône circonscrit à cette sphère, et ayant pour sommet le point donné (V, V'). La courbe de contact de ce cône auxiliaire avec la sphère, sera un petit

cercle (n° **353**, *note*) dont le plan se trouvera perpendiculaire à la droite (V'ω, VO); et comme dans les points où ce petit cercle rencontrera le parallèle E'F', les plans tangents de la sphère seront communs à la surface S, il s'ensuit que ces points appartiendront à la courbe cherchée X'M'Y'. Or, si nous faisons tourner simultanément la sphère et son cône circonscrit, autour de la verticale O, jusqu'à ce que l'axe (V'ω, VO) de celui-ci soit devenu parallèle au plan vertical, le sommet (V, V') se transportera en V''; et en menant les tangentes V''γ, V''δ, le cercle de contact sur la sphère se trouvera alors projeté suivant la corde γδ. Dans cette situation, ce cercle de contact coupe le parallèle E'F' en deux points placés aux extrémités de la corde projetée verticalement sur le point ε'; or, comme la distance de cette corde à l'axe de révolution, ne changera pas quand nous ramènerons la sphère et le cône circonscrit dans leurs positions primitives, il est clair qu'en reportant par un arc de cercle, le point ε' sur le méridien primitif VO en ε, et en tirant par ce dernier point une corde perpendiculaire à VO, les intersections de cette corde avec le parallèle EMF, fourniront les points demandés M et N, qu'il faudra ensuite projeter en M' et N' sur E'F'.

PROBLÈME **2**. *Par un point donné, mener à une surface de révolution un plan tangent qui la touche sur un parallèle donné.*

367. Il ne sera pas nécessaire ici, comme nous l'avions annoncé généralement au n° **351**, de construire la courbe de contact de la surface avec un cône circonscrit; il suffira évidemment d'appliquer au parallèle assigné par la question, la méthode du n° **357** ou celle du n° **366**, et l'on obtiendra directement les points de contact des plans tangents demandés. Dès-lors ces plans seront faciles à construire (n° **132**).

PROBLÈME **3**. *Par un point donné, mener à une surface de révolution un plan tangent qui la touche sur un méridien donné.*

368. Ce problème se résoudra encore directement, en appliquant au méridien assigné par la question, la méthode expliquée au n° **360**. On connaîtra ainsi les points de contact des plans tangents que l'on cherche, et ces plans seront alors faciles à déterminer (n° **132**).

PROBLÈME **4**. *Trouver la courbe de contact d'une surface* QUELCONQUE *du second degré, avec un cône circonscrit dont le sommet est donné.*

FIG. 85. **369.** Prenons pour exemple un ellipsoïde à trois axes inégaux, et choisissons nos plans de projection parallèles à deux des trois *plans principaux* de ce corps. Alors, les contours apparents de la surface seront les deux ellipses (ABDE, A'D') et (A'C'D'F', AD), qui auront chacune deux axes communs avec l'ellipsoïde; et en désignant par (V, V') le sommet du cône circonscrit, nous chercherons à déterminer les points de la courbe de contact, qui se trouvent placés sur une section horizontale quelconque G'H'. Cette section est une ellipse *semblable* à ABDE, et dont (G'H', GH) est un des diamètres principaux; alors, si nous la regardons comme la base d'un cône *auxiliaire* qui aurait son sommet au point T' où l'axe vertical de la surface est rencontré par la tangente G'T', ce cône T'G'H' sera *circonscrit* à l'ellipsoïde. En effet, toutes les sections faites dans la surface par des plans menés suivant la verticale (O, O'T'), seraient des ellipses qui auraient un axe commun (O, C'F'); d'ailleurs, pour tous les points de ces ellipses placés sur G'H', l'abscisse O'I' étant la même, la soutangente serait aussi constamment égale à I'T'; par conséquent les tangentes à ces ellipses verticales aboutiraient toutes au point T', et formeraient bien le cône circonscrit T'G'H'. Cela posé, si nous menons à ce cône auxiliaire un plan tangent partant de (V, V'), l'arête de contact rencontrera la base G'H' en un point qui appartiendra à la courbe demandée; car, en ce point, le plan tangent du cône auxiliaire touchera l'ellipsoïde et passera d'ailleurs par le point (V, V'), ce qui est le caractère distinctif (n° **348**) de la courbe de contact de la surface avec le cône circonscrit dont le sommet serait en (V, V').

370. Maintenant, pour mener du point (V, V') un plan tangent au cône T'G'H', et afin de n'avoir à opérer que sur l'ellipse principale ABDE, *donnée immédiate* de la question, je prolonge ce cône jusqu'au plan horizontal A''D'' qui a été choisi de manière à couper cette surface suivant une ellipse égale à la précédente; puis, en adoptant cette section (A''D'', ABDE) pour base du cône, et joignant le sommet avec le point (V, V'), je cherche la rencontre de cette droite (V'T'R', VOR) avec le plan A''D''; et enfin, du point R je mène deux tangentes RP, RQ, à l'ellipse ABDE. Les points de contact de ces tangentes étant fixés avec précision (au moyen des cordes supplémentaires), je tire les rayons OP, OQ, qui seront les projections horizontales des arêtes de contact, et j'en conclus aisément leurs projections verticales T'P', T'Q'. Enfin, ces dernières coupant l'ellipse G'H' aux points M' et N', je les projette en M et N, et j'obtiens ainsi les deux points de la courbe demandée, qui sont placés sur la section horizontale G'H' de l'ellipsoïde.

On aurait pu trouver directement les points M et N, en projetant H' en H, et menant par ce dernier point des parallèles HM et HN aux cordes DP et DQ; car, dans deux ellipses semblables, telles que G'H' et A"D", les rayons vecteurs OM et OP sont proportionnels aux demi-axes OH et OD.

371. Pour toute section horizontale autre que G'H', on opérera d'une manière analogue; mais s'il arrivait que le sommet T' du cône auxiliaire fût à une distance incommode, on pourrait adopter pour base de ce cône, la section K'L' faite par le plan horizontal mené du point (V, V'); et alors il suffirait de concevoir par ce dernier point, des tangentes à cette ellipse K'L'. Or ces droites, ainsi que leurs points de contact, sont très-faciles à déterminer par une construction directe, *sans décrire la courbe*, et d'après la seule connaissance des axes, qui sont ici proportionnels avec AD et BE, et dont l'un est K'L'. Cette construction se trouvera expliquée tout à l'heure, dans un cas analogue (nº **374**).

372. *Points sur les contours apparents.* On les déterminera comme dans le problème précédent (nº **362**), en menant les tangentes V'X' et V'Y' au contour apparent de l'ellipsoïde sur le plan vertical, et projetant les points de contact X' et Y' en X et Y, sur AD. De même, les tangentes Vx et Vy au contour apparent sur le plan horizontal, fourniront deux points x et y qu'il faudra projeter en x' et y' sur A'D'. D'ailleurs, ces deux systèmes de points indiqueront les extrémités des *arcs visibles* sur les deux plans de projection.

373. *Les points limites*, c'est-à-dire ceux où la tangente de la courbe sera horizontale, se trouveront nécessairement situés dans le plan vertical VO. Fig. 85.
En effet, il résulte évidemment de la construction générale qui a donné les points P et Q, ou M et N, que les points de la courbe de contact sont deux à deux sur des cordes horizontales (MN, M'N'), constamment *parallèles au diamètre conjugué avec* OR dans l'ellipse ABDE; et par suite, chacune de ces cordes est divisée en deux parties égales par le plan vertical VOR. Donc, lorsqu'un de ces points correspondants se trouvera dans le plan VOR, l'autre y sera pareillement; et la corde qui les réunissait sera devenue tangente à la courbe, sans avoir cessé d'être horizontale.

374. Maintenant, pour construire ces points dont la hauteur sera *maximum* ou *minimum*, il suffira évidemment de mener par le point (V, V'), deux tangentes à la section produite dans l'ellipsoïde, par le plan vertical VOR. Or cette section est une ellipse dont les demi-axes sont O'C' et Oα; et si nous la rabattons sur le plan vertical, ainsi que le point (V, V') qui se transportera en V", il s'agira de mener par ce dernier deux tangentes à une

ellipse dont les demi-axes deviendront O'C' et O'α', problème qui peut se résoudre *sans tracer la courbe*. En effet, après avoir construit les foyers φ et ψ de cette ellipse, je décris un arc de cercle avec le rayon V″φ, et un second arc de cercle du point ψ comme centre, avec un rayon égal au grand axe de l'ellipse; alors, ces deux circonférences se coupant aux points ϐ et γ, on sait (*) que la droite V″∂ menée par le milieu de l'arc φϐ, est la tangente demandée, et que son point de contact ε' est fourni par sa rencontre avec la droite ψϐ. Par conséquent il n'y aura plus qu'à ramener le point (ε', ε) dans le plan vertical VO, au moyen d'un arc de cercle horizontal, et l'on obtiendra ainsi le point (λ, λ') le plus bas de la courbe de contact.

De même, la seconde tangente à l'ellipse précédente, sera la droite V″ω passant par le milieu de l'arc φγ; et sa rencontre avec ψγ, déterminera son point de contact (π', π), lequel ramené dans le plan vertical VO, deviendra le point (μ, μ') le plus haut de la courbe en question.

375. On pourrait encore construire, d'une manière analogue, les deux points de cette courbe qui seraient placés dans le plan V'O', perpendiculaire au plan vertical; car la section produite dans l'ellipsoïde par ce plan sécant V'O', serait une ellipse dont les axes sont faciles à trouver : mais, pour ne pas rendre l'épure difficile à lire, nous laisserons au lecteur le soin de s'exercer à cette construction, qui est entièrement semblable à la précédente.

376. Nous ferons observer, en terminant, que la méthode employée ici pour un ellipsoïde, est également applicable à un hyperboloïde, ou même à un paraboloïde, avec les modifications légères qu'amènerait tout naturellement la nature des sections planes qui seraient faites dans ces surfaces.

CHAPITRE II.

Des plans tangents parallèles à une droite donnée.

FIG. 80. **377.** Soient S une surface quelconque, et VO la droite donnée (ou bien une ligne parallèle à la droite donnée, et menée par un point pris arbitrairement

(*) Voyez, dans les Traités d'analyse appliquée à la géométrie, *la méthode graphique des anciens* pour mener les tangentes aux sections coniques.

dans l'intérieur de S) : si par la ligne VO nous conduisons divers plans sécants, ils couperont la surface S suivant des courbes ABD, AB'D, AB"D,... qui pourront toujours être construites par les méthodes générales du livre IV; et en menant à ces sections des tangentes BU, B'U', B"U",.... parallèles à VO, elles formeront un cylindre qui sera *circonscrit* à S, c'est-à-dire qui *touchera cette surface tout le long de la courbe* BB'B"E. En effet, le plan tangent de S relatif au point quelconque B", renfermera évidemment l'arête B"U" du cylindre, ainsi que la tangente B"*t* à la courbe BB'B"... qui lui sert de base; donc ce plan sera aussi tangent au cylindre, et dès lors cette dernière surface aura un véritable contact avec S au point B", comme aussi tout le long de la ligne BB'B"E.

378. Cela posé, pour *mener à la surface* S *un plan tangent qui soit parallèle à une droite donnée* VO, il suffira de chercher la courbe de contact BB'C de cette surface avec un cylindre circonscrit parallèle à VO, puis de construire le plan tangent de S pour un quelconque des points de cette ligne de contact; car ce plan touchera nécessairement le cylindre circonscrit, et par suite il renfermera une de ses arêtes qui sont toutes parallèles à VO; donc lui-même sera parallèle à cette droite.

Réciproquement, tout plan parallèle à VO et qui touchera la surface S en un certain point que j'appelle *b*, contiendra nécessairement une droite menée parallèlement à VO, par ce point *b*; donc cette dernière droite sera une arête du cylindre circonscrit, et son point de contact *b* devra par conséquent se trouver sur la courbe BB'C, qui devient ainsi *le lieu exclusif de toutes les solutions* du problème proposé.

Ce problème sera donc impossible, quand le cylindre circonscrit parallèlement à la droite donnée, n'existera pas; ce qui arriverait, entre autres exemples, dans un paraboloïde, si la droite proposée était parallèle à *l'axe* de la surface; car alors les sections ABD, AB'D,... seraient des paraboles, lesquelles n'admettent pas de tangente parallèle à leur diamètre principal.

379. Il résulte de ces principes que la question générale qui nous occupe, est susceptible d'une infinité de solutions, ou bien elle n'en admet aucune. On doit seulement excepter le cas où S est une *surface développable*, parce qu'alors, d'après la remarque faite au n° **349**, le plan mobile qui engendre une telle surface et qui est en même temps son plan tangent, se trouvera complétement déterminé par la condition nouvelle d'être parallèle à une droite donnée. C'est ce que nous avons déjà reconnu pour les cylindres et pour les cônes, dans le chapitre III du livre II.

380. Le problème de mener à une surface S non développable, un plan tangent parallèle à une droite donnée, redeviendrait déterminé, si l'on ajoutait la condition que ce plan dût avoir son point de contact *sur une courbe connue;* parce qu'alors ce point serait fourni par la rencontre de cette courbe avec la ligne de contact du cylindre circonscrit.

Quant à la construction de cette dernière ligne, qui est aussi fort utile dans la *théorie des ombres*, la seule méthode générale est celle que nous avons indiquée n° **377**; mais nous donnerons bientôt des procédés plus commodes pour certains genres de surfaces qui se rencontrent fréquemment, après que nous aurons fait quelques remarques sur ces lignes de contact dans les surfaces du second degré.

381. *La courbe de contact d'un cylindre circonscrit à une surface du second degré, est toujours* PLANE, *et située dans le plan diamétral qui se trouve conjugué avec le diamètre parallèle au cylindre.*

FIG. 80. En effet, si l'on conçoit par le centre O de la surface du second degré S, une droite VO parallèle à la direction du cylindre, les diverses sections ABD, AB'D, AB''D,.... produites par des plans menés suivant VO, seront des courbes du second degré qui auront toutes un diamètre commun AOD; or, en coupant ces courbes par le plan diamétral BB'E conjugué avec AD (c'est-à-dire le plan qui diviserait en deux parties égales, chacune des cordes parallèles à AD), les intersections seront des droites OB, OB', OB'',..... qui se trouveront nécessairement *diamètres conjugués avec* OA, dans chacune des courbes correspondantes. Donc, les tangentes BU, B'U', B''U'',... que l'on mènera à ces sections par les divers points B, B', B'',.... seront parallèles à OA, et formeront ainsi un cylindre circonscrit à la surface S, dont la ligne de contact BB'B'' sera placée tout entière dans le plan diamétral BB'E conjugué avec OA (*).

Au reste, ce résultat important peut être regardé comme une conséquence du théorème démontré n° **353**, pour la ligne de contact d'un cône VMM'N circonscrit à S; car, si le sommet V s'éloigne à l'infini sur la droite OAV, il

(*) Dans le cas particulier où la surface proposée est une sphère, la courbe de contact du cylindre circonscrit devient *un grand cercle, perpendiculaire à la direction* VO des arêtes du cylindre; résultat qui se prouve directement, en faisant tourner autour de VO, un grand cercle et sa tangente parallèle à cette droite.

est facile de voir que les divers points de contact M, M', M",.... se transporteront en B, B', B",.....

382. Pour étendre le théorème précédent aux deux paraboloides qui sont dépourvus de centre, imaginez par l'axe principal OX de la surface, un plan EOF parallèle à la direction assignée pour les génératrices du cylindre, et menez dans cette direction une tangente VBU à la parabole EOF; alors, le plan diamétral qui coupera en deux parties égales toutes les cordes parallèles à VBU, passera évidemment par le point de contact B de cette tangente, et produira dans la surface, une section parabolique BB'B"C. Cela posé, toutes les droites B'U', B"U",..... menées par les divers points de cette dernière parabole, parallèlement à VBU, se trouveront nécessairement tangentes à la surface; sans quoi leurs parties intérieures, ou *cordes*, ne seraient plus coupées en leurs milieux par le plan BB'C qui est supposé diamétral et conjugué avec VBU. Par conséquent, toutes les droites BU, B'U', B"U",.... formeront bien le cylindre circonscrit que l'on demandait, et l'on voit que sa ligne de contact BB'B"C avec la surface, sera plane et toujours *parabolique*. FIG. 82.

Un raisonnement semblable, fondé sur la définition même du plan diamétral, aurait pu être employé dans le n° **381**.

PROBLÈME **1**. *Trouver la courbe de contact d'une surface de révolution, avec un cylindre circonscrit et parallèle à une droite donnée.*

383. Soient (O, I'Z') l'axe de la surface de révolution, et (E'C'E"D', CD) le méridien principal, dont la forme particulière n'aura point d'influence sur le succès de la méthode. Soit d'ailleurs (AB, A'B') la droite à laquelle doit être parallèle le cylindre circonscrit : la courbe de contact $x'm'y'$ (*) de ce cylindre avec la surface proposée, peut se construire en cherchant successivement les points qui sont situés sur chaque parallèle, ou bien ceux qui se trouvent sur chaque méridien; d'où résultent les deux procédés suivants. FIG. 86.

384. *Méthode du parallèle.* Soit (E'F', EmF) un parallèle choisi arbitrairement sur la surface de révolution S; en substituant à celle-ci le cône droit engendré par la révolution de la tangente E'Z' du méridien, il est clair que ce cône touchera la surface tout le long du parallèle E'F', et qu'ainsi tout plan

(*) Comme le problème actuel a beaucoup d'analogie avec celui du n° 386, nous emploierons ici de *petites lettres*, afin qu'on aperçoive les parties analogues, sans cependant confondre les deux courbes qui se trouveront reproduites à la fois dans l'épure 89.

tangent mené à ce cône, parallèlement à (AB, A'B'), touchera S dans le point où l'arête de contact rencontrera le parallèle E'F'; donc ce point appartiendra à la courbe demandée, dont la propriété caractéristique (n° **378**) consiste en ce que, *pour chacun de ses points, le plan tangent de la surface* S *se trouve parallèle à* (AB, A'B').

Nous sommes ainsi ramenés à conduire un plan tangent au cône Z'E'F', parallèlement à une droite donnée; mais pour ne pas être obligés de recourir au sommet Z' de ce cône, qui pourrait se trouver à une distance incommode, et afin de n'avoir à mener des tangentes que d'un même point fixe, nous modifierons le procédé général du n° **124**, de la manière suivante.

Imaginons que le cône droit Z'E'F' a été transporté parallèlement à lui-même, avec le plan tangent demandé, jusqu'à ce que son sommet soit venu se placer en un certain point O' de l'axe vertical (O, I'Z'); dans ce mouvement, on sent bien que l'arête de contact aura conservé la même projection *horizontale;* et la trace horizontale du cône ainsi transporté, s'obtiendra en tirant la droite O'e' parallèle à Z'E', et en décrivant avec un rayon $Oe = I'e'$, le cercle *epf*. Alors, pour mener à ce cône un plan tangent parallèle à (AB, A'B'), je tire dans cette direction, la droite (O'a', Oa) qui vient percer le plan horizontal au point (*a*, *a'*) duquel devraient partir les tangentes au cercle *epf*; mais comme je n'ai besoin que des points de contact, je décris sur O*a* comme diamètre, une circonférence qui par sa rencontre avec le cercle *epf*, déterminera ces points *p* et *q*; et les rayons O*p*, O*q*, seront les projections horizontales des génératrices de contact des plans tangents que l'on cherchait. Maintenant, ces génératrices vont rencontrer le parallèle (E*m*F, E'F') base du cône primitif, aux points (*m*, *m'*) et (*n*, *n'*); par conséquent ce sont là deux points de la courbe de contact de la surface de révolution avec le cylindre circonscrit.

385. Les points de cette courbe situés sur un autre parallèle, se construiront d'une manière semblable, *en transportant toujours au point* O' le sommet du cône droit circonscrit le long de ce parallèle; et par-là, *la circonférence décrite sur le diamètre* O*a*, *servira pour toutes ces opérations.*

Mais il sera fort avantageux de chercher immédiatement les points situés sur le parallèle E''F'' égal à E'F', surtout si le méridien se trouve, comme dans cet exemple, symétrique au-dessus et au-dessous du plan horizontal C'D'; car alors il n'y aura aucunes nouvelles constructions graphiques à exécuter. En effet, si l'on conçoit le cône Z''E''F'' circonscrit le long du parallèle E''F'', il est évident que ses génératrices seront respectivement parallèles à celles du cône Z'E'F'; de sorte que, quand nous le transporterons au point O', suivant la

règle précédente, il coïncidera entièrement avec le cône $O'e'f'$; et toutes les opérations ultérieures redevenant les mêmes que ci-dessus, nous en conclurons que les arêtes de contact avec les plans tangents cherchés, se trouvent encore projetées horizontalement sur les rayons Op, Oq, qui par leur rencontre avec le cercle EmF, fourniront aussi les points demandés. Toutefois, il faudra ici prolonger ces rayons au-delà de O, pour obtenir la véritable position des points m'' et n'', que l'on projettera en m'' et n'' sur le parallèle $E''F''$; et la raison de cette différence tient à ce que ce parallèle était situé sur la nappe *supérieure* du cône $Z''E''F''$, tandis que le cercle epf auquel nous menons les tangentes ap, aq, se trouve sur la nappe *inférieure* de ce cône transporté dans la position $O'e'f'$.

386. *Méthode du méridien.* Si l'on veut obtenir les points de la courbe en question, qui seraient situés sur un méridien donné $\alpha O\mathcal{E}$, on imaginera par tous les points de cette méridienne, des droites perpendiculaires à son plan, lesquelles formeront un cylindre horizontal évidemment *circonscrit* à la surface de révolution, tout le long de cette méridienne. Alors, si l'on mène à ce cylindre auxiliaire un plan tangent parallèle à (AB, A'B'), ce plan touchera la surface S dans le point où il rencontrera la méridienne $\alpha\mathcal{E}$, base du cylindre; et par conséquent ce point appartiendra à la courbe cherchée, qui est (n° **378**) *le lieu de tous les points de contact des plans tangents de S menés parallèlement à la droite* (AB, A'B'). FIG. 86.

Pour construire ce plan tangent au cylindre auxiliaire qui est horizontal, je tire (n° **117**) la droite (Oa, $O'a'$) parallèle à (AB, A'B'), et du pied (a, a') j'abaisse une perpendiculaire ap sur le plan vertical $\alpha O\mathcal{E}$; alors, en joignant le point p avec (O, O'), j'aurais la direction suivant laquelle il faudrait mener une tangente à la méridienne $\alpha\mathcal{E}$, base du cylindre proposé. Mais, pour pouvoir effectuer cette opération, je rabats sur le plan vertical cette méridienne et la droite qui réunirait les points p et (O, O') : par là, le point p se transporte en (e, e'), et la droite en question devient (Oe, $O'e'$); je mène donc parallèlement à cette dernière, une tangente $Z'E'$ au méridien principal, et le point de contact (E', E) étant ramené dans le méridien primitif $O\alpha$ par un arc de cercle, fournira le point demandé (m, m').

Comme on peut mener au méridien principal, une seconde tangente parallèle à $O'e'$, il existe un second point de contact (F'', F) qui, ramené dans le méridien $\alpha O\mathcal{E}$, fournira un nouveau point (m'', m'') appartenant aussi à la courbe cherchée.

387. Nous retrouvons ici deux points que nous avons déjà construits par l'autre méthode, attendu que le méridien $\alpha O\mathcal{E}$ a été choisi de manière à pas-

ser par ces mêmes points; et par-là nous avons voulu manifester cette circonstance remarquable, que si les deux méthodes sont fondées sur des considérations très-différentes, elles emploient du moins *les mêmes opérations graphiques* exécutées *dans un ordre précisément inverse.* Mais, outre les points situés sur un parallèle ou sur un méridien quelconque, il en est plusieurs qui s'obtiennent par des procédés directs, et nous recommandons au lecteur de commencer le tracé de l'épure par la recherche de ces points remarquables.

Fig. 86. **388**. *Points sur les contours apparents.* Pour les points de la courbe en question qui se trouveront sur l'équateur (C'D', C*l*D), les plans tangents de la surface seront verticaux; ainsi les traces horizontales de ces plans seront des droites parallèles à AB et tangentes au cercle C*l*D. Donc, en tirant le diamètre *kl* perpendiculaire à AB, les extrémités *k* et *l* que l'on projettera sur C'D' en *k'* et *l'*, fourniront les points demandés. D'ailleurs l'arc de courbe qui sera *visible sur le plan horizontal*, se terminera précisément à ces deux points, puisqu'ils appartiennent au contour apparent de la surface par rapport à ce plan de projection; et cet arc visible *lmnk* se distinguera du reste de la courbe, en examinant si un de ses points (m, m') se trouve *au-dessus* de l'équateur C'D'.

Quant aux points de la courbe qui seront placés sur le contour apparent de la surface relativement au plan vertical, c'est-à-dire sur le méridien principal, on observera que les plans tangents correspondants se trouveront perpendiculaires au plan vertical; donc leurs traces seront des droites parallèles à A'B' et tangentes à la méridienne E'C'E". Ainsi, en menant ces tangentes, et déterminant leurs points de contact x' et y', que l'on projettera sur CD en x et y, on obtiendra les points cherchés, lesquels formeront aussi les extrémités de l'arc de courbe *visible sur le plan vertical;* cet arc sera ici $x'm'y'$, parce que l'un de ses points (m, m') se trouve placé *en avant* du plan vertical CD qui contient le méridien principal.

389. *Les points limites,* c'est-à-dire ceux où *la tangente* de la courbe *sera horizontale,* se trouveront nécessairement situés dans le méridien O*a* parallèle à la droite donnée (AB, A'B'). En effet, il résulte évidemment de la construction générale qui a fourni les deux points (m, m') et (n, n') relatifs à un même parallèle, que ce plan vertical O*a* divise en deux parties égales toutes les cordes qui lui sont perpendiculaires, telles que $(mn, m'n')$; donc, lorsqu'un de ces points se trouvera dans le plan méridien O*a*, l'autre point correspondant devra s'y trouver pareillement, et la droite indéfinie qui les réunissait, sera devenue tangente à la courbe, sans avoir cessé d'être horizontale.

Maintenant, pour construire ces points placés sur le méridien O*a*, j'ob-

serve que l'arête du cylindre circonscrit qui passerait par l'un d'eux, se trouverait nécessairement tangente à la méridienne Oa, puisqu'elle serait dans son plan; par conséquent il suffira de mener des tangentes à cette méridienne, parallèlement à la droite (AB, A'B'). A cet effet, je rabats sur le plan vertical, le méridien Oa et la droite (Oa, O'a') déjà parallèle à (AB, A'B'); cette droite rabattue devient O'a'', et en tirant dans cette direction une tangente au méridien principal, le point de contact u' se projette en u: puis, lorsqu'on ramènera ce point dans le méridien primitif Oa, il prendra la position (r, r') qui est le point *le plus bas* de la courbe. Le point le plus haut (t, t') s'obtiendra d'une manière semblable, en menant au méridien principal une seconde tangente parallèle à O'a''; mais dans l'exemple actuel où le méridien est une ellipse, on sait que les deux points de contact de ces tangentes parallèles, seraient sur un même diamètre dont le milieu O' restera immobile quand on fera tourner le méridien autour de l'axe vertical; par conséquent les deux points (r, r') et (t, t') devront encore se trouver sur un diamètre de la surface, et ce dernier pourra se déduire de l'autre.

390. Cette relation, et la dépendance analogue qui existe manifestement ici entre les points (m, m') et (m'', m'''), (n, n') et (n'', n'''),..., est une suite nécessaire du théorème démontré au n° **381**, d'après lequel on a vu que, quand la surface est du second degré, la courbe de contact d'un cylindre circonscrit est tout entière dans le plan diamétral conjugué avec le diamètre (Oa, O'a'); d'où il résulte évidemment que le centre (O, O') de la surface du second degré, doit être aussi *le centre de la courbe* de contact. On peut encore observer que les deux axes de cette courbe dans l'espace, sont les diamètres (kl, $k'l'$) et (rt, $r't'$), puisque les tangentes menées aux extrémités de chacun d'eux lui sont perpendiculaires (n° **389**). Puis, comme un de ces deux axes est *horizontal*, ils continueront d'être les *diamètres principaux* de la courbe en projection horizontale; mais il n'en sera pas de même sur le plan vertical, où ils deviennent simplement *diamètres conjugués* obliques.

391. *Troisième méthode, par une enveloppée sphérique.* D'après les remarques faites au n° **365**, nous pouvons obtenir les points de la courbe précédente, qui sont situés sur un parallèle donné E'F', en substituant à la surface de révolution S, une sphère qui lui soit circonscrite le long de ce parallèle, et dont le rayon sera la normale F'ω au point F' du méridien principal. En effet, imaginons un cylindre *auxiliaire* circonscrit à cette sphère, et parallèle à (AB, A'B'); la courbe de contact sera ici un grand cercle perpendiculaire à cette droite (n° **381**, *note*), et comme dans les points où ce grand cercle ren- FIG. 86.

contrera le parallèle E'F', les plans tangents de la sphère seront communs à la surface S, il s'ensuit que ces points appartiendront à la courbe demandée, dont le caractère consiste en ce que chaque plan tangent de S se trouve parallèle à (AB, A'B'). Or, si nous faisons tourner autour de la verticale O, la sphère et le cylindre circonscrit, ainsi que la droite $(Oa, O'a')$ qui indique la direction des arêtes de ce cylindre, jusqu'à ce que cette dernière droite soit venue dans la position $O'a''$ parallèle au plan vertical, alors le grand cercle de contact sur la sphère, se trouvera projeté suivant le diamètre $\gamma\omega\delta$ perpendiculaire à $O'a''$; et dans cette situation, ce grand cercle coupera le parallèle E'F' en deux points placés aux extrémités de la corde horizontale projetée en ε'. Mais cette corde ne changera pas de distance par rapport à l'axe vertical O, quand nous ramènerons le système dans l'état primitif; par conséquent, si l'on rapporte par un arc de cercle, le point ε' en ε sur le méridien Oa, et que l'on tire la corde $m\varepsilon n$ perpendiculaire à Oa, les points m et n où cette corde rencontrera le parallèle EmF, seront les points demandés qu'il faudra ensuite projeter sur E'F', en m' et n'.

PROBLÈME 2. *Mener à une surface de révolution, un plan tangent parallèle à une droite donnée, et dont le point de contact se trouve sur un parallèle connu.*

392. Il ne sera pas nécessaire ici, comme nous l'avions indiqué généralement au n° **380**, de construire la courbe de contact de la surface de révolution avec un cylindre circonscrit, dont les arêtes seraient parallèles à la droite donnée; mais il suffira d'appliquer immédiatement au parallèle assigné par la question, la méthode du n° **384** ou celle du n° **391**, ce qui fera connaître le point de contact du plan demandé; après quoi, la construction de ce plan deviendra bien facile.

PROBLÈME 3. *Mener à une surface de révolution, un plan tangent parallèle à une droite donnée, et dont le point de contact se trouve sur un méridien connu.*

393. On résoudra encore directement ce problème, en appliquant au méridien donné par la question, la méthode exposée n° **386**; car elle fera connaître immédiatement le point de contact du plan tangent cherché, ce qui suffira pour construire ce plan.

PROBLÈME 4. *Construire la courbe de contact d'une surface* QUELCONQUE

du second degré, avec un cylindre circonscrit parallèlement à une droite donnée.

394. En disposant les données de la question comme dans l'épure 85 relative au problème du n° **369**, on substituera d'abord à l'ellipsoïde un cône circonscrit le long d'une section horizontale G′H′; puis, on mènera à ce cône T′G′H′ un plan tangent parallèle à la droite donnée, au lieu de le faire passer par le point (V, V′). On sait qu'à cet effet, il faudra tirer par le sommet une parallèle à la droite assignée par la question, puis chercher le point de rencontre de cette parallèle avec le plan A″D″ que l'on adoptera encore pour base du cône; et ce sera par ce point qu'il faudra mener des tangentes à l'ellipse ABDE. A cela près de cette modification, les opérations graphiques seront les mêmes que dans le problème déjà cité; c'est pourquoi nous laisserons au lecteur le soin d'exécuter les constructions, qui d'ailleurs seront applicables, d'une manière analogue, à toute autre surface du second degré.

CHAPITRE III.

Des plans tangents menés par une droite donnée.

395. Pour résoudre généralement ce problème par rapport à une surface quelconque S, qu'il faut supposer *non développable*, puisque autrement la question serait impossible (n° **349**), imaginons un cône circonscrit à S et dont le sommet V soit placé arbitrairement *sur la droite donnée* AB; puis déterminons, par quelqu'une des méthodes exposées précédemment, la courbe de contact XλY de ce cône avec la surface S. Cette courbe étant (n° **348**) *le lieu des points de contact de tous les plans tangents de* S *qui vont passer par le point* V, elle contiendra nécessairement le point de contact λ du plan tangent mené par AVB; et si l'on construit de même la courbe de contact X′λY′ d'un second cône circonscrit à S, et ayant aussi son sommet V′ sur AB, cette courbe devra encore passer par le point cherché λ, qui sera conséquemment fourni par l'intersection des deux lignes XλY et X′λY′. Fig. 83.

Réciproquement, tout point λ ou μ qui sera commun à ces deux courbes, satisfera aux conditions du problème; car, dès lors que le point μ se trouve sur XY, le plan tangent de S en μ, passera par le point V; puis, à cause que

ce point μ se trouve sur X'Y', ce même plan tangent passera par V'; d'où l'on doit conclure qu'il renfermera la droite donnée AB.

396. On peut aussi combiner la courbe XλY avec la ligne de contact $x\lambda y$ d'un cylindre circonscrit à S, parallèlement à la droite AB. En effet, cette dernière ligne est le lieu des points de contact de tous les plans tangents de S qui sont *parallèles à* AB (n° **378**); et comme le plan cherché satisfait à cette condition, son point de contact λ devra se trouver encore sur la courbe $x\lambda y$. Réciproquement, pour tout point commun aux courbes $x\lambda y$ et XλY, le plan tangent de S satisfera aux deux conditions suivantes : 1°. d'être parallèle à AB; 2°. de passer par le point V; donc ce plan renfermera bien la droite AVB.

397. Il résulte de là que, quand les courbes xy, XY, X'Y',.... ne se rencontreront pas, le problème de mener un plan tangent à la surface S par la droite donnée AB, deviendra impossible; et l'on sent bien *à priori* que cela doit arriver pour certaines positions de cette droite.

398. Remarques. Lorsque la surface proposée S est du second degré, on sait (n° **353**) que toutes les courbes de contact XY, X'Y', X"Y",.... des cônes circonscrits dont les sommets se trouvent sur AB, sont *planes;* par conséquent les plans de ces courbes ont alors pour intersection commune, la corde $\lambda\mu$ qui réunit les points de contact des deux plans tangents menés par AB à la surface S. Il est d'ailleurs facile de voir que cette corde est *conjuguée* avec le plan diamétral qui passerait par AB.

399. En outre, quand la droite AB se trouvera située dans un plan *principal* de la surface S, que nous appellerons *horizontal* pour simplifier le langage, les plans des courbes XY, X'Y', X"Y",.... qui sont (n° **353**) respectivement parallèles aux plans diamétraux conjugués avec les droites VO, V'O', V"O", seront tous *verticaux*, et par suite les courbes XY, X'Y',.... se projetteront suivant des droites qui passeront toutes par le point où se projettera la corde $\lambda\mu$; puis, comme d'ailleurs les cônes circonscrits à la surface S se projetteront eux-mêmes suivant des couples de tangentes à la section principale, on peut en conclure ce théorème remarquable de géométrie plane : *si l'on fait mouvoir sur une droite* AB *le sommet* V *d'un angle variable* XVY *dont les côtés demeurent tangents à une courbe du second degré, les cordes qui joindront deux à deux les points de contact de ces tangentes correspondantes, se rencontreront toutes en un point unique, lequel sera situé sur le diamètre conjugué avec la droite* AB. Cette dernière circonstance résulte de ce que la corde $\lambda\mu$ se trouvait

dans le plan $x\lambda y$, qui est lui-même (n° **381**) le plan diamétral conjugué avec AB.

400. En revenant au problème général qui fait l'objet de ce chapitre, on voit que la solution exigera ordinairement le tracé des courbes de contact de deux cônes, ou bien d'un cône et d'un cylindre, circonscrits à la surface proposée S; mais, dans plusieurs cas, cette marche pourra être simplifiée par des considérations particulières que nous allons exposer sur divers exemples.

PROBLÈME 1. *Par une droite donnée, mener un plan tangent à une sphère.*

401. Faisons passer nos deux plans de projection par le centre de la sphere donnée; alors les sections produites par ces plans, et qui formeraient les contours apparents de la surface, se trouveront rabattues suivant un cercle unique EE'F'F décrit du point O avec le rayon même de la sphère. Soit d'ailleurs (AB, A'B') la droite donnée; en imaginant un cône circonscrit à la sphère, et dont le sommet soit en un point quelconque de cette droite, il suffira évidemment de mener à ce cône un plan tangent qui passe par (AB, A'B'), pour obtenir la solution du problème proposé; car ce plan, renfermant une génératrice du cône circonscrit et une tangente à sa base, qui sont deux droites tangentes à la sphère, sera lui-même tangent à cette dernière surface. FIG. 87.

Choisissons pour sommet de ce cône circonscrit, le point (A, A') où la droite donnée vient percer le plan horizontal; alors, en menant les tangentes AE et AF au grand cercle horizontal de la sphère, cette surface sera touchée par le cône EAF suivant un petit cercle perpendiculaire à la ligne AO (n° **353**, *note*); par conséquent ce petit cercle sera *vertical* et projeté sur son diamètre EF; puis, comme le plan vertical EF va rencontrer la droite donnée au point (R, R'), c'est de ce point qu'il faut (n° **123**) mener des tangentes à la base du cône. A cet effet, je rabats le cercle vertical EF sur le plan horizontal, en le faisant tourner autour de son diamètre EF, et ce cercle devient ETF; mais par suite de ce mouvement, le point (R, R') dont la plus courte distance à la charnière EF était la verticale (R, R'G), se transportera perpendiculairement à cette charnière, à une distance RR" = R'G; donc les tangentes R"S et R"T feront connaître, en rabattement, les points de contact S et T des plans tangents demandés avec la base du cône, et aussi avec la sphère. A présent, pour ramener ces points dans leur véritable position, je relève le système autour de la charnière EF, et en abaissant sur cette ligne les perpendiculaires Sλ et

Tμ, j'obtiens les projections horizontales λ et μ des points de contact cherchés. Quant aux projections verticales, j'observe que les points S et T, quand ils seront relevés, auront pour hauteurs au-dessus du plan horizontal, les ordonnées Sλ et Tμ; donc, en prenant sur des perpendiculaires à la ligne de terre, les distances $I\lambda' = S\lambda$, $V\mu' = T\mu$, on aura enfin (λ, λ') et (μ, μ') pour les points de contact de la sphère avec les plans tangents menés par la droite (AB, A'B').

402. Une fois les points de contact trouvés, il sera bien facile d'obtenir les traces AX et XB', AY et YB', de chaque plan, puisqu'elles doivent passer par les points A et B', et se trouver respectivement perpendiculaires sur les projections des rayons menés aux points de contact. Cependant, comme cette dernière condition n'offrira pas toujours, dans la pratique, toute la précision désirable, on pourra la remplacer par une droite qui unirait le point de contact avec un point arbitraire de (AB, A'B'), ou qui serait parallèle à cette dernière ligne.

FIG. 87. **403.** *Deuxième méthode.* Outre le cône EAF déjà circonscrit à la sphère, imaginons-en un second pareillement circonscrit, et dont le sommet soit en (B, B'). Ce dernier touchera la sphère suivant un petit cercle perpendiculaire à la ligne B'O (n° 353, *note*), et par conséquent perpendiculaire au plan vertical de projection dans lequel est située cette ligne; ainsi, en menant les tangentes B'E' et B'F', ce petit cercle de contact sera projeté verticalement sur E'F' qui en sera le diamètre. Or, d'après les considérations générales exposées au n° 395, les cercles EF et E'F' doivent passer l'un et l'autre par les points de contact de la sphère avec les plans tangents menés par (AB, A'B'); donc ces deux points seront aux extrémités de la corde suivant laquelle se coupent ces deux cercles, corde qui a nécessairement pour projection horizontale la droite indéfinie EF, et pour projection verticale E'F'.

Cela posé, rabattons cette corde avec un des deux cercles qui la contiennent, par exemple, avec le cercle vertical EF qui, en tournant autour de son diamètre horizontal, est déjà venu se placer en ETF. Pendant ce mouvement, le point (K, K') où la corde en question vient percer le plan horizontal, restera immobile parce qu'il est sur la charnière EF; un second point de cette corde, par exemple, sa trace verticale (L, L') décrira un arc de cercle dont le rayon sera la verticale L'L abaissée de ce point sur la charnière; donc si, dans une direction perpendiculaire à EF, on porte la distance LL'' = LL', le point L'' sera la position que prendra (L, L') après le rabattement de la corde, et cette dernière deviendra KL''. Alors les points S et T où cette droite coupera

le petit cercle rabattu suivant ETF, seront les deux extrémités de la corde; et il n'y aura plus qu'à les ramener sur EF, par des perpendiculaires Sλ et Tμ, puis enfin à projeter les points λ et μ sur E'F', en λ' et μ'.

404. *Troisième méthode.* Après avoir déterminé seulement les droites EF et E'F', au moyen des couples de tangentes menées à la sphère par les points A et B', et avoir observé que ce sont là *les projections de la corde* qui réunit les deux points de contact des plans tangents demandés, on peut éviter de tracer une nouvelle circonférence, en cherchant la rencontre de cette corde (EF, E'F') avec *le grand cercle* qui la contient. Le plan de ce dernier aura pour trace horizontale OK, et en le rabattant autour de cette droite, ce grand cercle se confondra avec le contour de la sphère. Quant à la corde (EF, E'F') emportée par le même mouvement, elle passera toujours par le point K qui, étant sur la charnière, demeure immobile; tandis que le point (L, L') de cette corde décrira un arc de cercle dont le rayon sera la perpendiculaire abaissée de ce point sur OK. Or, si l'on tire LM à angle droit sur OK, il est facile de voir que le rayon en question aboutira en M, et se trouvera l'hypoténuse d'un triangle rectangle ayant pour côtés LM et LL'; si donc on construit ce triangle NLM, et que l'on prolonge LM d'une quantité $Ml'' = MN$, le point l'' sera la position que prendra (L, L') après le rabattement de la corde, et par conséquent cette droite deviendra Kl''. Alors les points P et Q où cette dernière ligne coupera le contour de la sphère, seront les points cherchés qu'il faudra ensuite ramener, par des perpendiculaires à la charnière OK, en λ et μ sur EF; puis enfin, on projettera ces derniers points sur E'F' en λ' et μ'. Fig. 87.

405. *Quatrième méthode.* Dans cette méthode, qui deviendrait nécessaire si les deux traces de la droite donnée étaient placées à des distances trop considérables, on regarde comme construits, les deux plans tangents menés à la sphère par la droite (AB, A'B'); puis, en les coupant par un plan conduit suivant les rayons qui aboutissent aux points de contact, il est clair qu'on aura pour sections *deux droites tangentes au grand cercle* contenu dans ce plan sécant, et que la connaissance de ces tangentes suffira pour déterminer les points de contact cherchés. Or, il est aisé de construire ces tangentes, parce que le plan sécant dont nous parlons, passant par deux rayons respectivement perpendiculaires aux plans tangents, se trouvera lui-même perpendiculaire à ces deux-ci, et par conséquent il le sera à leur intersection (AB, A'B'); ainsi ses traces seront les droites OC et OD' menées à angle droit sur AB et A'B'. D'ailleurs ce plan COD' coupera la droite (AB, A'B') en un point (R, R') que Fig. 88.

l'on sait construire (n° **30**), et d'où il faudra mener des tangentes au grand cercle (*) suivant lequel la sphère est coupée par ce même plan COD'. Pour cela, rabattons ce plan autour de sa trace horizontale OC : le grand cercle en question viendra se confondre avec le contour de la sphère; le point (R, R') décrira autour de la charnière OC, un arc dont le rayon sera la perpendiculaire (RC, R'C') abaissée sur cette droite; donc, en construisant la vraie grandeur CH de ce rayon, et la rabattant de C en R'', ce dernier point sera la position nouvelle de (R, R'), et les tangentes cherchées seront rabattues suivant R''P et R''Q.

Maintenant, voyons ce que deviennent les points de contact P et Q, lorsqu'on ramène ces tangentes dans le plan COD'. La première R''P rencontrait la charnière OC en un point V qui restera immobile; ainsi cette droite sera projetée horizontalement sur RV, et par suite sa projection verticale sera R'V'; donc, en ramenant par une perpendiculaire à OC, le point P en λ sur RV, puis en projetant λ en λ' sur R'V', on obtiendra la vraie situation du point de contact (λ, λ') du premier plan tangent à la sphère.

Quant à la tangente rabattue suivant R''Q, elle va couper ici la charnière OC à une distance trop considérable, pour qu'on puisse tirer parti de ce point immobile. Mais, pour y suppléer, j'observe que PQ représente le rabattement de la corde qui unirait les deux points de contact des plans tangents; et comme cette corde rencontre la charnière OC au point (K, K'), elle a nécessairement pour projections Kλ et K'λ'. Donc, en ramenant par une perpendiculaire à OC, le point Q en μ sur Kλ, puis projetant μ en μ' sur K'λ', on obtiendra le point de contact (μ, μ') du second plan tangent à la sphère. On pourrait d'ailleurs s'appuyer aussi sur cette considération, que la corde ($\lambda\mu$, $\lambda'\mu'$) doit évidemment se trouver perpendiculaire au plan AOB' qui passerait par le centre de la sphère et par la droite donnée (AB, A'B').

FIG. 89. PROBLÈME **2**. *Par une droite donnée, mener un plan tangent à une surface de révolution, dont le méridien quelconque est connu.*

406. Soient (O, I'Z') l'axe de révolution, (X'C'Y'D', CD) le méridien principal de la surface, et (AB, A'B') la droite par laquelle il faut conduire le plan

(*) Ce grand cercle n'est autre chose que la courbe de contact de la sphère avec un cylindre circonscrit et parallèle à la droite (AB, A'B') : de sorte que pour tous les points de cette circonférence, les plans tangents de la sphère sont parallèles à la droite donnée.

tangent demandé. Nous emploierons ici la méthode générale indiquée aux n^{os} **395**, **396**, et conséquemment nous chercherons :

1°. La courbe de contact (XKYRL, X'K'Y'R'L') de la surface proposée avec un cône circonscrit dont le sommet (V, V') est pris à volonté sur la droite (AB, A'B'); cette courbe se construira par les moyens employés pour le problème du n° **386**, et nous avons eu soin de conserver ici les mêmes lettres qui avaient servi dans l'épure 84, relative à ce problème isolé ; de sorte que les explications antérieures s'appliqueront littéralement à l'épure actuelle.

2°. La courbe de contact (*xtlyr*, *x't'l'y'r'*) de la surface proposée avec un cylindre circonscrit parallèlement à (AB, A'B'), laquelle courbe se construira aussi par les moyens employés pour résoudre le problème du n° **383**, sur l'épure 86, dont les notations ont été conservées dans l'épure actuelle.

Maintenant, examinons si ces deux courbes de contact se coupent quelque part ; et pour trouver leurs points de section, gardons-nous de combiner, sur un même plan de projection, une branche *pleine* ou visible, avec une branche *ponctuée* ou invisible ; car de telles branches n'étant pas situées sur la même nappe de la surface, ne sauraient se rencontrer. Nous voyons ici que les courbes se coupent en deux points (λ, λ') et (μ, μ'), dont les projections horizontales et verticales doivent d'ailleurs, pour chacun d'eux, être placées sur une même perpendiculaire à la ligne de terre ; alors, d'après les raisonnements développés aux n^{os} **395** et **396**, ce sont là les points de contact de la surface de révolution avec les plans tangents qui passeraient par (AB, A'B'); et une fois ces points connus, il sera bien facile de construire, par divers moyens, les traces de ces plans. Nous ferons seulement observer que les traces horizontales devront passer par le pied A de la droite, et être perpendiculaires aux projections Oλ et Oμ des normales relatives aux deux points de contact trouvés.

407. *Cas particuliers.* Si la droite donnée était verticale, il suffirait évidemment de mener par son pied deux tangentes à la projection horizontale de l'équateur.

Si cette droite était horizontale, on mènerait un plan méridien qui lui fût perpendiculaire, et du point où il la rencontrerait, on tirerait deux tangentes à la méridienne contenue dans ce plan ; opération facile à exécuter, quand on aurait rabattu ce point et la méridienne en question, sur le plan vertical, comme on l'a fait au n° **360** pour le point P'' de l'épure 84.

408. *Deuxième méthode.* Lorsque la surface de révolution sera *du second*

degré, il y aura beaucoup d'avantage à employer, comme au n° **395**, deux cônes circonscrits dont on placera les sommets aux deux points où la droite donnée rencontrera le plan de l'équateur et le plan du méridien principal; parce qu'alors, d'après le théorème démontré n° **353**, chacune des courbes de contact sera projetée suivant *une droite* sur un des deux plans de projection; et il n'y aura à construire dans toute l'épure, qu'*une seule courbe*, ainsi que nous l'expliquerons en détail dans le problème analogue et *plus général* du n° **417**.

409. *Troisième méthode.* En supposant encore que la surface de révolution soit *du second degré*, on pourra n'employer qu'un seul des deux cônes circonscrits dont nous venons de parler; car, comme la courbe de contact sera (n° **353**) tout entière dans un plan perpendiculaire au plan horizontal (ou au plan vertical), il suffira de mener à cette courbe deux tangentes par le point où son plan rencontrera la droite donnée (*). D'ailleurs on a vu (n° **374**) combien il était facile de construire ces tangentes avec leurs points de contact, sans tracer la courbe du second degré en question, mais en connaissant seulement ses deux axes; or l'un de ceux-ci s'obtiendra immédiatement, en menant par le sommet du cône circonscrit deux tangentes à l'équateur (ou au méridien principal), et le second axe s'en déduira d'une manière bien facile à imaginer (*voyez* n° **418**).

Nous engageons le lecteur à appliquer cette méthode à un ellipsoïde de révolution; mais ici, pour varier les exemples, nous allons en faire l'application à un hyperboloïde gauche de révolution, défini par sa génératrice rectiligne, et non par sa méridienne.

PROBLÈME 3. *Par une droite donnée, mener un plan tangent à un hyperboloïde gauche de révolution.*

Fig. 90. **410.** Soient (O, O'O") l'axe vertical de la surface, et (ADB, A'D'A") la droite mobile qui, en tournant autour de cet axe, engendre (n° **140**) l'hyperboloïde que nous supposons terminé aux deux sections horizontales A'B' et A"B", également éloignées du cercle de gorge. Nous n'exécuterons pas la représentation de la surface sur le plan vertical, puisque cela conduirait à tracer l'hyperbole méridienne dont nous voulons éviter l'emploi; mais sur le plan horizontal, nous regarderons la surface comme réellement projetée, et

(*) Cette marche est analogue à celle qui nous a servi pour la sphère, au n° **401**.

en conséquence nous ponctuerons les parties de lignes principales qui seront au-dessous de la nappe supérieure.

411. Maintenant, soit ($\alpha\mathcal{E}$, $\alpha'\mathcal{E}'$) la droite par laquelle il s'agit de mener un plan tangent; si du point (V, V') où elle perce le plan horizontal du cercle de gorge, on imagine un cône circonscrit dont deux des arêtes seront évidemment les tangentes VX et VY, ce cône touchera l'hyperboloïde suivant une courbe située tout entière (n° 353) dans le plan vertical XY, et qui, par conséquent, sera une hyperbole ayant pour axe réel la corde XY. Donc, en menant deux tangentes à cette courbe par le point (R, R') où son plan va couper la droite ($\alpha V\mathcal{E}$, $\alpha' V'\mathcal{E}'$), on obtiendra les points de contact des plans tangents à l'hyperboloïde.

412. Pour construire ces tangentes, il faut d'abord faire tourner autour de l'axe (O, O'O''), le plan vertical XY jusqu'à ce qu'il prenne la position xy parallèle au méridien principal, et alors le point (R, R') se transportera en (r, r'). Dans cette situation, l'hyperbole contenue dans le plan vertical yx est semblable à la méridienne principale de la surface, et a comme elle, pour projections de ses asymptotes, les droites A'D' et B'D'; de là, et au moyen de l'axe réel $x'y'$, on déduit aisément les deux foyers φ et ψ. Cela posé, pour mener des tangentes à cette hyperbole par le point r' (*), je décris un arc de cercle avec la distance $r'\varphi$ pour rayon, et un autre arc dont le centre soit en ψ et le rayon égal à $x'y'$; puis, en tirant la droite $r'l'$ par le milieu de l'arc $\varphi\gamma$, j'obtiens l'une des tangentes cherchées, et son point de contact l' sera déterminé par sa rencontre avec la droite $\psi\gamma$. De même, l'autre tangente sera la droite $r'm'$ menée par le milieu de l'arc $\varphi\delta$, et la ligne $\psi\delta$ prolongée déterminera le point de contact m' de cette seconde tangente.

A présent, il ne reste plus qu'à projeter les points l' et m' en l et m sur xy, puis à ramener ces points sur le plan vertical primitif XY, en (λ, λ') et (μ, μ'). Ce sont là les points de contact de l'hyperboïde avec les deux plans tangents menés par la droite ($\alpha\mathcal{E}$, $\alpha'\mathcal{E}'$); et leurs traces $\alpha B_2 A_2$ et $\alpha A_3 B_3$ sont faciles à construire avec ces seules données.

413. Mais comme, dans l'hyperboloïde gauche, nous savons que chaque plan tangent doit renfermer deux génératrices rectilignes de la surface, les-

(*) Voyez, dans les Traités des sections coniques, *la méthode des anciens* pour mener des tangentes à ces courbes.

quelles se coupent au point de contact, on pourra mener par les points λ et μ, quatre tangentes au cercle de gorge, savoir λA_2, λB_2, μA_2, μB_2, lesquelles fourniront par leurs rencontres avec la trace horizontale de la surface, quatre points appartenant aux traces des plans tangents. D'ailleurs les deux génératrices λA_2, et μB_2, faisant partie l'une du système (AD, A'D'), l'autre du système (BD, B'D'), iront nécessairement se couper (n° **144**) en un point qui devra évidemment se trouver sur la droite ($\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$); et ce point (ε, ε') sera précisément celui *où cette droite perce l'hyperboloïde*. Il y aurait aussi un second point de section qui serait fourni par la rencontre des génératrices λB_2 et μA_2.

414. *Observation.* Si le point (V, V') où la droite donnée ($\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$) perce le plan horizontal du cercle de gorge, se trouvait en dedans de ce cercle, on ne pourrait plus mener les tangentes VX, VY; et cela indiquerait que la courbe de contact de l'hyperboloïde avec le cône circonscrit qui a son sommet en (V, V'), change de position, et devient une hyperbole dont l'*axe réel* est vertical, et dont le plan est toujours perpendiculaire à l'horizontale VO. Dans ce cas, on mènerait du point (V, V') deux tangentes à la méridienne située dans le plan VO, et la corde comprise entre leurs points de contact serait l'axe réel cherché; ensuite, le reste des constructions s'effectuerait d'une manière analogue à ce qui a été fait dans le premier cas.

FIG. 90. **415**. *Autre solution.* Les remarques faites au n° **413**, fournissent une méthode fort simple et applicable à toutes les positions de la droite donnée. En effet, si après avoir construit par le procédé du n° **284**, les points d'intersection de la droite ($\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$) avec l'hyperboloïde, on mène par l'un d'eux (ε, ε'), des tangentes εA_2, εB_2, au cercle de gorge, ces génératrices combinées tour à tour avec ($\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$), détermineront immédiatement les deux plans tangents demandés, qui auront pour traces horizontales αA_2 et αB_2. Quant aux points de contact, ils seront fournis par les deux autres génératrices partant des points B_2 et A_2 (*).

416. Il résulte de là que, si la droite donnée ne coupait pas l'hyperboloïde quelque part, il serait impossible de mener par cette droite un plan tangent à la surface; condition qui est évidente *à priori*, puisque tout plan

(*) Une solution semblable peut être appliquée à l'hyperboloïde à une nappe et non de révolution. (Voyez n° **390**.)

tangent devant renfermer ici deux génératrices qui se coupent, il y en aura au moins une qui rencontrera la droite ($\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$) située par hypothèse dans ce plan tangent. Seulement, ce point de rencontre s'éloignera à l'infini, dans le cas tout particulier où ces deux génératrices et la droite ($\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$) se trouveront parallèles toutes trois; mais alors la position du plan tangent n'en deviendra que plus facile à assigner, puisqu'il sera évidemment (n° **280**) tangent au cône asymptote.

PROBLÈME 4. *Par une droite donnée, mener un plan tangent à une surface* QUELCONQUE *du second degré.*

417. Prenons pour exemple un ellipsoïde rapporté à deux plans de projection dont chacun soit parallèle à un plan principal de la surface; celle-ci aura pour contours apparents, les ellipses *principales* (ABDE, A'D') et (A'C'D'F', AD) qui ont chacune deux axes communs avec l'ellipsoïde. Soit d'ailleurs (RS, R'S') la droite donnée; les points de contact des plans tangents menés par cette droite, seront fournis (n° **395**) par les intersections des courbes de contact de deux cônes circonscrits à l'ellipsoïde, et ayant leurs sommets situés où l'on voudra sur la droite donnée; mais pour simplifier la construction de ces courbes, plaçons les sommets de ces cônes aux points (V,V') et (v, v'), où la droite (RS, R'S') va rencontrer les plans des deux ellipses principales qui se trouvent parallèles aux plans de projection. Fig. 91.

418. Alors, si l'on mène les tangentes V'α' et V'δ' à l'ellipse A'C'D'F', les points α' et δ' appartiennent évidemment à la projection verticale de la courbe de contact du cône circonscrit (V, V'); et cette courbe qui est plane (n° **353**), se trouvera projetée verticalement sur la droite $\alpha'\delta'$. En effet, comme le sommet (V, V') est situé dans un plan vertical VAD qui divise l'ellipsoïde en deux parties exactement symétriques, il est certain que les points de la courbe de contact doivent être, deux à deux, sur des cordes perpendiculaires à ce plan principal; donc aussi le plan de la courbe cherchée sera perpendiculaire au plan vertical VAD, et s'y projettera suivant la droite $\alpha'\delta'$ qui réunit les deux points déjà trouvés.

Par les mêmes raisons, la droite ($\alpha\delta$, $\alpha'\delta'$) est *un axe* de la courbe dans l'espace, et elle continue à jouir de cette propriété en projection horizontale, où elle fournit les deux sommets α et δ. La direction $\omega\beta$ du second axe se déduit aisément de là; mais pour déterminer sa longueur, j'observe que ces deux axes sont proportionnels à ceux de la section faite dans l'ellipsoïde, par un plan diamétral O'a' parallèle à la courbe de contact $\alpha'\delta'$. Si donc on pro-

jette a' en a, et que l'on tire $a\text{ϭ}$ parallèle à aB, on obtiendra la longueur $\omega\text{ϭ}$ du second axe cherché ; et alors il sera bien facile de tracer l'ellipse $\alpha X\text{ϭ}\delta Y$ qui, d'ailleurs, devra passer par les points X et Y que l'on déduit de la section X', et dans lesquels elle *touchera* évidemment le contour ABDE sur le plan horizontal.

419. Maintenant, le deuxième cône circonscrit dont le sommet est en (v, v'), touchera l'ellipsoïde suivant une courbe plane qui, par des raisons analogues à celles que nous avons citées plus haut, se trouvera projetée horizontalement sur la droite xy ; puis, sans chercher la projection verticale de cette courbe, qui s'obtiendrait par des procédés semblables à ceux qui nous ont servi pour le premier cône, on peut tout de suite apercevoir les points de section λ et μ des deux courbes de contact, sur le plan horizontal, et reporter ces points en λ' et μ' sur $\alpha'\delta'$. Alors nous avons pour chaque plan tangent demandé, son point de contact (λ, λ') ou (μ, μ'), et une droite (RS, R'S') par laquelle il doit passer; de sorte qu'il est bien aisé de trouver ses traces, par des constructions dont l'épure actuelle présente seulement les résultats.

Fig. 91. **420.** *Autre méthode.* On peut résoudre le problème précédent avec le seul cône circonscrit dont le sommet est en (V, V'); car tout plan tangent à ce cône, qui sera mené par la droite (RV, R'V'), satisfera évidemment à la question. On cherchera donc le point (R', R) où cette droite est coupée par le plan de la base $\alpha'\delta'$; puis, on tirera du point R deux tangentes à la courbe $\alpha Y\delta X$: et même, on doit observer qu'il est inutile de tracer l'ellipse $\alpha Y\delta X$, et qu'avec les deux demi-axes $\omega\alpha$ et $\omega\text{ϭ}$, on sait construire les points de contact μ et λ des tangentes $R\mu$ et $R\lambda$, comme nous l'avons déjà fait dans les nos 374 et 412. Ainsi, les points (λ, λ') et (μ, μ') seront ceux dans lesquels l'ellipsoïde sera touché par les plans tangents conduits suivant la droite (RV, R'V'); et par conséquent ces deux plans se trouveront déterminés par une méthode qui aura l'avantage de n'employer que *la ligne droite et le cercle.*

CHAPITRE IV.

Des plans tangents parallèles à un plan donné.

421. Soit S la surface à laquelle on propose de mener un plan tangent qui soit parallèle à un plan donné P. Imaginons que dans ce dernier, on trace deux droites arbitraires A et B, puis que l'on détermine par les procédés indiqués au chapitre II, les courbes de contact X et Y de la surface S avec deux cylindres circonscrits, parallèles l'un à A et l'autre à B. Alors on sait (n° **378**) que pour tous les points de la courbe X, les plans tangents de S se trouvent parallèles à A; que pour tous ceux de la courbe Y, les plans tangents sont parallèles à B; donc si les courbes X et Y se coupent, chaque intersection fournira un point pour lequel le plan tangent de la surface S se trouvera parallèle à la fois aux deux droites A et B, et conséquemment il sera parallèle au plan donné P.

422. Il est bon d'observer que le problème précédent revient à celui-ci : *mener à une surface* S, *une normale qui soit parallèle à une droite donnée* D. En effet, si l'on construit un plan P perpendiculaire à la droite D, il suffira de trouver un plan tangent parallèle à P, et la normale relative au point de contact de ce plan tangent, sera évidemment parallèle à la ligne D. Cette recherche est nécessaire pour obtenir *le point brillant* d'une surface, éclairée par des rayons de lumière que l'on regarde comme parallèles entre eux.

423. Lorsque la surface S sera développable, le problème deviendra impossible en général, attendu que la condition d'être parallèle à une droite donnée, suffit (n° **379**) pour déterminer complétement le plan tangent d'une pareille surface, et qu'ainsi l'on ne saurait exiger que ce plan soit parallèle à la fois à deux droites A et B, ou au plan P qui les contient.

424. Le mode de solution que nous avons indiqué au n° **421** est général, mais il entraînera souvent dans des opérations graphiques fort compliquées; c'est pourquoi il faudra chercher, dans chaque surface, à profiter des propriétés particulières qui pourront simplifier la solution, comme nous allons l'indiquer sur quelques exemples.

1°. Si la surface proposée est de révolution, auquel cas chaque plan tangent est perpendiculaire au plan méridien correspondant, on commencera par mener un plan méridien perpendiculaire au plan donné P, et qui con-

pera ce dernier suivant une droite que j'appelle δ; alors en tirant à la section méridienne ainsi obtenue, une tangente parallèle à δ, son point de contact sera évidemment celui d'un plan tangent qui se trouvera parallèle à P. Cette marche sera d'une application fort aisée pour une sphère, un ellipsoïde, un tore, etc.

3°. S'il s'agit d'un hyperboloïde de révolution à une nappe, lequel admet (nº **146**) deux systèmes de génératrices rectilignes respectivement parallèles aux arêtes du cône asymptotique, on coupera ce cône par un plan mené du sommet, parallèlement à P. Ce plan sécant fournira deux arêtes α et α' parallèles à P, et l'on en déduira aisément les quatre génératrices correspondantes de l'hyperboloïde, savoir A et B parallèles à α, puis A' et B' parallèles à α'. Alors en combinant les génératrices A et B', on obtiendra un plan évidemment parallèle à P, et qui touchera l'hyperboloïde dans le point où ces deux droites se coupent; puis, on en trouvera un second qui remplira les mêmes conditions, en combinant ensemble les génératrices A' et B qui se coupent pareillement.

La même méthode s'appliquera à un hyperboloïde à une nappe et *non de révolution*, attendu que cette surface admet aussi, comme nous le verrons au livre VII, deux systèmes de génératrices rectilignes parallèles aux arêtes d'un cône asymptotique (*voyez* nº **581**).

CHAPITRE V.

Des plans tangents à plusieurs surfaces à la fois.

425. *Trouver un plan qui touche en même temps deux surfaces données* S *et* T.

Pour résoudre ce problème d'une manière générale, et quels que soient les plans de projection adoptés, menons dans l'espace un plan arbitraire P; puis, cherchons la courbe de contact X de la surface S avec un cylindre circonscrit et perpendiculaire au plan P, question qui rentre dans celle du nº **377**, puisque les arêtes de ce cylindre devront être *parallèles à une droite connue*, savoir la perpendiculaire au plan P. Déterminons de même la courbe analogue Y pour la surface T, et construisons les projections x et y de ces deux lignes sur le plan P; alors, en menant une tangente commune aux deux courbes x et y, ce sera la trace d'un plan π perpendiculaire à P, et qui tou-

chant évidemment les deux cylindres, sera nécessairement tangent aux surfaces S et T. On obtiendra donc ainsi une solution du problème proposé; mais il y en aura une infinité d'autres π', π'',.... que l'on trouvera en répétant des constructions analogues pour divers plans P′, P″,.... choisis dans des directions différentes.

426. On peut lier entre elles toutes ces solutions, en construisant *la surface développable qui est circonscrite à la fois aux deux surfaces* S *et* T. Pour cela, imaginons que les points de contact m et n des courbes x et y avec leur tangente commune sur le plan P, ont été projetés sur les courbes X et Y en M et N; ce seront là les points dans lesquels le plan π touche les deux surfaces S et T; et si l'on construit semblablement les points de contact M′ et N′, M″ et N″,... des plans π', π'',..., la suite des droites MN, M′N′, M″N″,..... formera une surface Σ qui touchera évidemment S et T le long des courbes MM′M″..... et NN′N″.....; mais j'ajoute que cette surface Σ sera *développable*. En effet, si les points M et M′ sont pris infiniment voisins, le plan tangent π renfermera les éléments linéaires MM′ et NN′, et dès lors les deux génératrices MN et M′N′ seront bien situées dans un même plan, ce qui est le caractère distinctif des surfaces développables (n° **179**). D'ailleurs, on peut regarder les droites infiniment voisines MN, M′N′, M″N″,..... comme les intersections consécutives des plans π, π', π'',.... (n° **182**), ou bien comme l'enveloppe de l'espace parcouru par le plan π lorsqu'il roule sur les surfaces S et T, en demeurant tangent à l'une et à l'autre (n° **184**).

Cela posé, quand la surface Σ sera construite, tous les plans tangents qu'on lui mènera, toucheront pareillement S et T, et fourniront les diverses solutions du problème primitif.

427. La surface développable Σ circonscrite aux surfaces S et T, est nécessaire à considérer dans la *théorie des ombres;* et elle présente ordinairement *deux nappes* distinctes, lesquelles proviennent de ce que les courbes x et y du n° **425**, peuvent admettre une tangente commune *extérieure*, et une autre *intérieure*. Au surplus, ces généralités seront éclaircies par l'exemple fort simple des deux sphères que nous considérerons au n° **437**.

428. Lorsqu'une des deux surfaces proposées, par exemple S, est elle-même *développable*, le problème de leur mener un plan tangent commun, n'est pas en général impossible; mais il n'admet plus une infinité de solutions, comme on doit le sentir en faisant rouler un plan tangent sur la surface S jusqu'à ce qu'il rencontre T. D'ailleurs, dans l'hypothèse actuelle, la courbe x relative au plan P (n° **425**) se réduirait à une ou plusieurs lignes droites, auxquelles il

ne serait plus possible de mener une tangente commune avec la courbe y; à moins que l'une de ces droites ne se trouvât d'elle-même tangente à cette courbe y, ce qui ne pourrait arriver que pour un certain nombre des plans P, P', P'',....; de sorte que le problème deviendrait déterminé, et la surface Σ se réduirait alors à un ou à plusieurs plans. Nous en verrons un exemple dans le n° **434**.

429. Enfin, le problème n'admettrait en général aucune solution, si les surfaces données S et T étaient toutes deux développables, puisque les courbes x et y du n° **425**, devenant alors l'une et l'autre des lignes droites, sur tous les plans P, P', P'',...., il ne serait plus possible de leur mener une tangente commune.

430. Lorsque les surfaces S et T ne sont développables ni l'une ni l'autre, on peut rendre *déterminé* le problème de leur mener un plan tangent commun, en assignant un point extérieur V par lequel devra passer le plan demandé. En effet, cela reviendra à conduire par ce point V, un plan tangent à la surface développable Σ qui est circonscrite (n° **426**) aux surfaces S et T, et cette dernière question n'est susceptible que d'un nombre limité de solutions, comme nous l'avons vu n^{os} **349** et **350**. Pour les obtenir, il faudra généralement construire la section faite dans la surface Σ par un plan quelconque mené du point V; puis, tirer par ce point des tangentes à cette section; alors chacune de ces tangentes, jointe à la génératrice rectiligne qui passe par son point de contact, déterminera un plan tangent à la surface Σ, et par suite aux deux surfaces primitives S et T. On trouvera un exemple de ce genre au n° **437**.

431. *Trouver un plan qui touche en même temps trois surfaces données* S, T, U.

La marche générale pour résoudre ce problème, consiste à imaginer une surface développable Σ circonscrite à S et à T, puis une autre Σ_2, circonscrite à S et à U. Alors, en construisant (n° **426**) les courbes de contact MM'.... et $M_2M'_2$... de ces deux surfaces Σ et Σ_2 avec S, chaque point μ où se rencontreront ces courbes, sera tel que le plan tangent de S touchera évidemment les surfaces Σ et Σ_2 à la fois, et par suite ce plan touchera aussi les surfaces T et U. Ce sera donc une solution du problème; mais comme les opérations graphiques seront ordinairement fort compliquées, nous nous bornerons à en citer un exemple où les constructions deviennent très-simples (*voyez* n° **441**).

Observons que quoique nous ayons dit (n° **429**) qu'on ne pouvait pas généralement mener un plan tangent commun à deux surfaces développables, la

chose devient ici possible, parce que les deux surfaces Σ et Σ_2 offrent cela de particulier, qu'elles sont circonscrites à la même surface S.

432. Si une ou plusieurs des trois surfaces données étaient *développables*, le problème serait généralement impossible. En effet, si S est développable, les surfaces Σ et Σ_2 du numéro précédent, se réduiront à des *surfaces planes* (n° **428**) auxquelles il ne sera plus possible de mener un plan tangent commun; à moins que par des circonstances toutes particulières, deux de ces surfaces planes ne viennent à coïncider complétement.

433. On ne saurait proposer de trouver un plan qui touche à la fois quatre surfaces S, T, U, V, ou un plus grand nombre. Car, en imaginant les trois surfaces développables Σ, Σ_2, Σ_3, circonscrites aux groupes S et T, S et U, S et V, il n'arrivera pas en général, que les trois courbes suivant lesquelles la surface S sera touchée par Σ, Σ_2, Σ_3, viennent se couper toutes en un même point μ, circonstance qui serait cependant nécessaire pour que le plan tangent de S en μ, touchât en même temps Σ, Σ_2, Σ_3, et par suite les autres surfaces proposées T, U, V.

PROBLÈME **1**. *Construire un plan qui touche, à la fois, une sphère et un cône droit* (*).

434. Faisons passer les deux plans de projection, par le centre O de la sphère donnée qui a pour rayon OA, et dirigeons le plan horizontal perpendiculairement à l'axe du cône qui aura pour sommet (S, S'), et pour base le cercle du rayon SB. Le problème de mener un plan tangent commun à ces deux surfaces, sera déterminé (n° **428**), parce qu'ici l'une d'elles est développable; et pour le résoudre plus simplement que par la méthode générale, supposons que PQR' soit le plan cherché. Il touche le cône suivant une arête située dans un plan méridien SM perpendiculaire à PQ; de sorte que la distance de ce plan tangent au pied (S, I') de l'axe, est une droite égale à I'G, et située dans le plan méridien SM; mais si je transporte le plan PQR' parallèlement à lui-même, jusqu'à ce qu'il passe par le centre O de la sphère, il se sera rapproché du point (S, I') d'une quantité égale au rayon OA; et alors il deviendra tangent à un autre cône droit dont la génératrice T'F', parallèle à S'B', en sera éloignée de la distance OA. Or ce dernier cône est facile à con- Fig. 92.

(*) Ce problème est tiré de la *Géométrie descriptive* de M. Lefébure de Fourcy.

struire, ainsi que son plan tangent conduit par le point O; donc, ensuite, il suffira de mener au cône primitif un plan tangent parallele à celui-ci.

D'après ces considérations, on prendra sur la perpendiculaire I'G, un intervalle GH=OA; puis, en tirant par le point H la droite T'F' parallèle à S'B', on déterminera le cercle SF auquel on mènera, du point O, les deux tangentes ON et OL. Alors, en conduisant au cercle SB deux tangentes PQ et XY parallèles aux précédentes, on aura les traces horizontales de deux plans PQR' et XYZ', qui toucheront *extérieurement* les deux surfaces données : les traces verticales de ces plans sont bien faciles à trouver.

435. Il existe aussi des plans qui touchent ces surfaces *intérieurement*, c'est-à-dire en laissant l'une d'un côté, et l'autre du côté opposé. Pour les trouver, on verra sans peine qu'il faut augmenter la distance I'G, d'une quantité Gh = OA; puis, tirer parallèlement à S'B', la droite $t'f'$ qui déterminera le cercle Sf auquel on mènera les tangentes On et Ol. Alors, en conduisant au cercle SB deux tangentes pq et xy parallèles aux précédentes, ce seront les traces horizontales des deux plans tangents intérieurs.

436. Si l'on veut trouver pour un de ces quatre plans, par exemple PQR', son point de contact avec la sphère, on coupera cette surface par un plan OD perpendiculaire à PQ; et après avoir rabattu la section sur le grand cercle horizontal, on tirera la tangente Dθ dont le point de contact θ, ramené en μ, fournira la projection horizontale du point où la sphère est touchée par le plan PQR'. La projection verticale μ' se déduira aisément de là.

PROBLÈME **2**. *Par un point donné, mener un plan tangent à deux sphères.*

FIG. 93. **437.** Adoptons pour plan horizontal, celui qui passe par les centres O et O' des deux sphères et par le point donné A". Alors, sans recourir à un second plan de projection, nous pourrons mener aux deux grands cercles horizontaux la tangente commune MNA qui, en tournant autour de OO'A, engendrera une surface conique évidemment circonscrite aux deux sphères données. Ce cône AMP est ce que devient ici la surface développable Σ du n° **426**, car il est bien l'*enveloppe* de toutes les positions que prendrait le plan vertical MNA tangent aux deux sphères, en roulant sur ces deux surfaces à la fois. Ainsi, puisque tout plan tangent à ce cône touchera les deux sphères, et que la réciproque est pareillement vraie, le problème primitif se réduit à *mener du point donné* A" *un plan tangent au cône* AMP. Pour cela, on sait qu'il faut tirer la droite AA", et du point où elle ira percer le plan du cercle vertical

MP, base du cône, tirer à ce cercle deux tangentes; opération qui s'effectuera aisément, en rabattant le cercle MP autour de son diamètre, comme on l'a vu au n° **401**.

438. Il est plus simple de remarquer que le problème primitif se réduit à *mener par la droite* AA″, *un plan tangent à la sphère* O; car ce plan touchera évidemment le cône AMP, et par suite, la sphère O′ que ce cône circonscrit. Or, d'après ce qui a été dit au n° **403**, il suffit de tracer le nouveau cône A″M″P″ circonscrit pareillement à la sphère O, et l'intersection des deux cercles verticaux MP et M″P″, fera connaître immédiatement la projection horizontale μ du point de contact de la sphère avec le plan tangent demandé. La seconde projection de ce point, sur un plan vertical choisi à volonté, s'obtiendra aisément en rabattant le cercle MP autour de son diamètre, et par-là la position du plan tangent sera complétement déterminée; mais nous laisserons au lecteur le soin d'effectuer ces opérations très-simples, qui conduiront évidemment à deux plans tangents *extérieurs*.

439. On peut trouver deux autres plans tangents *intérieurs*, en considérant le cône *amp* décrit par la tangente *man* commune aux deux grands cercles horizontaux, mais placée entre ces circonférences. Alors, par des considérations analogues aux précédentes, on verra qu'il suffit de *mener par le point* A″, *un plan tangent au cône amp;* ou bien de *mener par la droite a*A″ *un plan tangent à la sphère* O; de sorte que le point de contact λ sera donné par l'intersection des deux cercles M″P″ et *mp*.

440. Il n'est pas besoin d'avertir que les quatre solutions précédentes se réduiront à deux, ou n'existeront pas du tout, suivant la position qu'aura le point donné A″ par rapport aux deux sphères, ou par rapport aux cônes circonscrits *extérieur* et *intérieur*. En outre, l'un de ces cônes ou tous les deux disparaîtront, si les sphères données se coupent, ou bien si l'une enveloppe l'autre.

PROBLÈME 3. *Trouver un plan qui soit tangent à trois sphères données.*

441. Adoptons encore pour le plan horizontal, celui qui passe par les centres O, O′, O″ des trois sphères données; puis, remarquons que les surfaces développables Σ et Σ_2 (n° **431**) qui doivent être circonscrites aux sphères O et O′, O et O″, deviennent ici les deux cônes AMP et A″M″P″. Alors, en traçant leurs courbes de contact avec la sphère O, lesquelles se réduisent aux deux cercles verticaux MP et M″P″, les deux points de section qui sont projetés en μ, seront ceux où les plans tangents de la sphère O toucheront à la FIG. 93.

fois le cône AMP et le cône A″M″P″; par conséquent, ces deux plans seront aussi tangents aux sphères O′ et O″, et ils les toucheront *extérieurement.*

442. Mais comme il existe deux autres cônes circonscrits *intérieurement* aux groupes des sphères O et O′, O et O″, lesquels peuvent être combinés d'une manière analogue, soit entre eux, soit avec les cônes extérieurs, il en résultera généralement *huit solutions* pour le problème proposé, savoir :

Deux plans tangents *extérieurs* fournis par les cônes AMP et A″M″P″, et dont les points de contact avec la sphère O, sont projetés en μ;

Deux plans tangents *intérieurs* fournis par les cônes AMP et $a''m''p''$; les points de contact avec la sphère O sont projetés en ν;

Deux plans tangents *intérieurs* fournis par les cônes *amp* et A″M″P″; leurs points de contact sont projetés en λ;

Enfin, deux plans tangents *intérieurs* fournis par les cônes *amp*, $a''m''p''$, et dont les points de contact sont projetés en π.

443. Il est facile d'apercevoir que ces huit plans tangents se réduiront à *quatre*, si deux des sphères se coupent; quand une d'elles rencontrera les deux autres, il y aura au plus deux plans tangents communs; et il n'en existera aucun, lorsqu'une des trois sphères sera enveloppée par une autre. Mais, outre ces cas particuliers, la question sera impossible toutes les fois que les quatre cercles de contact MP, M″P″, *mp*, $m''p''$, ne se couperont pas; et le nombre de leurs points de section, indiquera toujours le nombre de solutions qu'admettra le problème proposé.

444. Nous n'avons point parlé des cônes N′A′Q′ et $n'a'q'$ dont chacun est circonscrit aux deux sphères O′ et O″. Néanmoins, il est évident que tout plan tangent aux trois sphères, devra aussi toucher le cône A′ ou le cône a'; de sorte que le système de ces deux surfaces coniques aurait pu être combiné, soit avec le système A et a, soit avec le système A″ et a'', pour résoudre le problème proposé. En outre, puisque chaque plan tangent aux trois sphères, touchera en même temps trois des cônes circonscrits, il passera par leurs sommets, lesquels se trouveront ainsi à la fois dans un plan tangent et dans le plan des trois centres des sphères; d'où l'on conclut que les sommets des trois cônes touchés par un même plan, seront toujours *en ligne droite.* Aussi l'on voit, dans notre épure, que les sommets des six cônes circonscrits aux sphères, sont distribués trois à trois sur quatre droites AA″A′, $Aa'a''$, $A''a'a$, $A'a''a$, dont la première renferme les *trois sommets extérieurs*, et chacune des autres, *un sommet extérieur* avec *deux sommets intérieurs.*

445. De là on peut déduire un théorème remarquable de la Géométrie plane,

en se bornant à considérer seulement les génératrices des cônes et les grands cercles des sphères, qui sont situés dans le plan des trois centres O, O′, O″. En effet, comme les sommets de ces cônes sont évidemment les points de rencontre des couples de tangentes communes à deux de ces grands cercles, on en conclut que si, après avoir tracé trois cercles quelconques dans un même plan, on mène toutes les tangentes qui peuvent toucher à la fois deux de ces cercles, *les six points de rencontre* A et *a*, A′ et *a′*, A″ et *a″*, *déterminés par chaque couple de tangentes, seront placés trois à trois sur quatre droites*, dont une contiendra *les trois points extérieurs*, et chacune des autres *un point extérieur* avec *deux points intérieurs*.

Comme exemple d'un plan tangent commun à plusieurs surfaces, nous citerons encore le problème résolu au n° **68**, et où il s'agissait de trouver un plan qui fût *tangent à deux cônes* ayant même sommet.

LIVRE VI.

QUESTIONS DIVERSES.

CHAPITRE PREMIER.

De l'hélice, et de l'hélicoïde développable.

Fig. 95. **446**. L'HÉLICE est une courbe AMNCD.... tracée sur un cylindre quelconque, et telle que *les ordonnées* (dirigées suivant les génératrices) *sont proportionnelles aux abscisses curvilignes comptées sur la* BASE *à partir d'un point fixe* A; pourvu qu'on entende ici par *base* du cylindre, la *section orthogonale* faite par le point A. C'est-à-dire qu'on doit avoir les relations

$$\frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{AP}} = \frac{\mathrm{NQ}}{\mathrm{AQ}} = \frac{\mathrm{CB}}{\mathrm{AB}} = \ldots\ldots = k, \quad \text{ou généralement} \quad z = ks,$$

en désignant par s un arc quelconque de la base, et par z l'ordonnée qui abontit à son extrémité (*). Le nombre k qui exprime le rapport constant de l'ordonnée avec l'abscisse pour tous les points d'une même hélice, varie d'une hélice à une autre, car on en peut tracer une infinité sur le même cylindre; mais chacune est complétement déterminée, dès qu'on assigne le rapport k et le point A choisi pour origine des abscisses. D'ailleurs, il est évident que l'hélice coupera la base du cylindre précisément en ce point A, puisque dans l'équation $z = ks$, l'hypothèse $s = 0$ donne aussi $z = 0$.

447. Lorsque la base du cylindre est une courbe fermée APBA, l'abscisse variable $\mathrm{AP} = s$ peut devenir égale au périmètre p de cette base; et alors on obtient un point D dans lequel l'hélice vient couper une seconde fois

(*) Nous avons donné précédemment (nº 163) une autre définition de l'hélice; mais nous allons faire voir tont à l'heure qu'elle s'accorde complétement avec la définition actuelle.

l'arête AF. Or, comme cette circonstance se reproduira indéfiniment pour des abscisses égales à $2p$, $3p$, ..., il existera sur la génératrice AF une infinité de points où l'hélice viendra la rencontrer, et qui seront à des hauteurs

$$AD = h = pk, \quad h' = 2pk, \quad h'' = 3pk, \ldots ;$$

par conséquent tous ces points seront distants les uns des autres, d'une quantité h que l'on nomme *le pas* de l'hélice. Lorsque ce pas est assigné directement, et que le périmètre de la base est connu, la constante k s'en déduit immédiatement, puisque d'après la définition même de l'hélice (n° **446**), ce nombre exprime le rapport de l'ordonnée h avec l'abscisse correspondante p; ainsi, dans le cas où la base du cylindre sera un cercle du rayon R, on aura

$$k = \frac{h}{2\pi R}.$$

448. *De la tangente à l'hélice.* Comme cette courbe n'est pas donnée ici par l'intersection de deux surfaces, il faut recourir à des considérations particulières pour obtenir sa tangente en un point quelconque M. Concevons le cylindre développé sur le plan qui touche cette surface tout le long de la génératrice PML; cette ligne demeurera immobile, et la base *orthogonale* APB deviendra (n° **161**) une droite A'PB' perpendiculaire à PL, tandis que les portions des autres génératrices conserveront leurs mêmes longueurs et leur parallélisme. Par conséquent, si l'on porte sur la transformée de la base, les distances FIG. 95.

$$PA' = PA, \quad PQ' = PQ, \quad PB' = PB, \ldots,$$

et que l'on élève les perpendiculaires

$$Q'N' = QN, \quad B'C' = BC, \ldots,$$

les divers points A', M, N', C', ..., donneront la *transformée* de l'hélice sur le développement du cylindre. Or il est aisé de prévoir que cette transformée A'MN'C'.... sera *une ligne droite;* car les ordonnées et les abscisses *rectilignes* de cette nouvelle ligne, ayant la même grandeur absolue que les ordonnées et les abscisses *curvilignes* de l'hélice, elles seront, comme ces dernières, *dans un rapport constant;* ce qui est le caractère exclusif de la ligne droite.

Cela posé, je dis que la droite A′MC′ est précisément la tangente au point M de l'hélice primitive AMC. En effet, cette droite est d'abord située dans le plan tangent du cylindre, qui contient un élément superficiel LP*pl* de la surface; et comme cet élément est resté immobile pendant le développement de la surface, il en résulte que l'élément linéaire M*m* se trouve commun à la courbe AMC et à la droite A′MC′; donc ces deux lignes sont bien tangentes l'une à l'autre.

449. D'après cela, pour obtenir dorénavant la tangente à l'hélice, il suffira de construire, dans le plan tangent du cylindre, un triangle rectangle MPA′ qui ait pour hauteur l'ordonnée MP du point de contact, et pour base une droite A′P égale à l'abscisse AP rectifiée; l'hypoténuse de ce triangle sera la tangente demandée. C'est ce que l'on peut exprimer d'une manière abrégée, en disant que *la soutangente* A′P *est égale à l'abscisse curviligne* AP *du point de contact;* car cette règle fera connaître le pied A′ de la tangente; et comme le point de contact M est connu, la position de la tangente sera complétement fixée.

D'ailleurs on voit que *la tangente* A′M ainsi déterminée, *aura la même longueur que l'arc d'hélice* AM; puisque l'une est la transformée de l'autre, d'après ce que nous avons dit au numéro précédent.

450. Observons ici que l'angle MA′P de la tangente avec le plan de la base du cylindre, sera donné par la formule

$$\text{tang } A' = \frac{MP}{A'P} = \frac{MP}{AP} = k;$$

or, comme ce dernier rapport est constant pour tous les points d'une même hélice (n° **446**), on en conclut que *les diverses tangentes* à cette courbe *sont toutes également inclinées sur le plan de la base du cylindre;* et par suite *chacune de ces tangentes coupe la génératrice du cylindre sous un angle constant* A′MP; résultat qui montre que la définition donnée au n° **163**, rentre dans celle du n° **446**.

Fig. 94. **451.** Construisons maintenant les projections d'une hélice, en prenant pour base du cylindre droit sur lequel cette courbe doit être tracée, un cercle ABCD dont nous adoptons le plan, pour plan horizontal de projection. Soient d'ailleurs (A, A′) l'origine, et A′A″ *le pas* de l'hélice; en partageant cet intervalle A′A″ ou O′O″ en un certain nombre de parties égales, par exemple *seize*, et divisant la circonférence ABCD pareillement en seize parties égales

AL, LM, MN,...., il suffira d'élever par ces points de division, des ordonnées verticales P'L', Q'M', R'N',... respectivement égales à $\frac{1}{16}$, $\frac{2}{16}$, $\frac{3}{16}$,.... de l'intervalle O'O", pour obtenir divers points de la projection verticale A'L'M'N'C'A"...... de l'hélice demandée (*). Quant à la projection horizontale de cette courbe, c'est évidemment la base ABCD du cylindre droit.

452. La tangente de l'hélice en un point quelconque (M, M'), s'obtiendra en prenant sur la tangente au point M de la base, une longueur MT égale à l'arc MA rectifié (nº 449); alors le point (T, T') sera le pied de la tangente cherchée, laquelle aura pour projection MT et M'T'.

453. D'après cela, on voit que si l'on construisait ainsi diverses tangentes à l'hélice, les pieds de ces droites seraient tous situés sur une courbe ATGH..... pour laquelle on aurait MT = MA, BG = BA, EH = EA,...; par conséquent cette courbe n'est autre chose que la *développante* du cercle ABCD (nºs **199**, **201**), et c'est aussi la trace horizontale de la surface lieu des tangentes à l'hé-

---

(*) Cette projection est une *sinusoïde*; car, si on la rapporte à deux axes B'X, B'Z, dont l'origine soit au point B', et que l'on compte les abscisses curvilignes de l'hélice, sur la section circulaire faite dans le cylindre par le plan horizontal B'X, on aura pour un point quelconque (E, E'), les relations

$$B'F = \sin BE, \qquad \frac{E'F}{BE} = i;$$

ou bien, en comptant les sinus dans le cercle dont le rayon est l'unité,

$$x = R \sin \frac{s}{R}, \qquad \frac{z}{s} = \frac{h}{2\pi R};$$

et alors, par l'élimination de l'arc s, on trouve

$$x = R \sin \left(2\pi \frac{z}{h}\right)$$

pour l'équation de la projection de l'hélice sur le plan des deux axes B'X et B'Z. En y joignant l'équation du cylindre

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

qui, combinée avec la précédente, conduit à

$$y = R \cos \left(2\pi \frac{z}{h}\right),$$

on aura les trois projections de l'hélice sur des plans rectangulaires dont l'origine serait au point (O, B').

lice, surface que l'on nomme *l'héliçoïde développable*, et sur laquelle nous reviendrons tout à l'heure.

FIG. 94. **454**. *Étant donnée une hélice* (AMBCDA, A'M'C'A''C'',....), *mener à cette courbe une tangente qui soit parallèle à un plan donné* U'VS.

Rappelons-nous d'abord que toutes les tangentes à l'hélice font un angle constant avec la verticale (nº **450**), et qu'ainsi elles sont respectivement parallèles aux génératrices d'un cône de révolution, dont l'axe serait vertical, et dont le demi-angle au centre égalerait l'inclinaison commune des tangentes sur les arêtes du cylindre. Pour connaître cette inclinaison, je construis la tangente particulière au point (B, B'), parce qu'elle sera évidemment parallèle au plan vertical, et me fournira ainsi la vraie grandeur de l'angle cherché : je prends donc sur la tangente au cercle, une longueur BG égale à l'arc AB rectifié, et projetant le point G en G' sur la ligne de terre, j'obtiens la tangente (BG, B'G') relative au point (B, B'). Alors, en lui menant par le point (O, B') une parallèle (Og, B'G'), et faisant tourner cette dernière autour de la verticale O, je forme le cône droit en question, lequel a pour base le cercle du rayon Og. Maintenant, je coupe ce cône par un plan parallèle à U'VS, et mené par le sommet (O, B') : on sait comment obtenir (nº **23**) la trace horizontale $\alpha l\beta$ d'un pareil plan, qui donne pour ses intersections avec le cône, les deux génératrices $O\alpha$ et $O\beta$ *parallèles au plan* SVU'; par conséquent, les tangentes à l'hélice qui jouiront de cette dernière propriété, s'obtiendront sur le plan horizontal, en menant au cercle la tangente MT parallèle à $O\alpha$, et la tangente EH parallèle à $O\beta$. De là, on conclura leurs projections verticales, en prenant MT = MA et EH = EBA, ce qui fera connaître les pieds (T, T') et (H, H') des tangentes demandées, qui seront enfin (MT, M'T') et (EH, E'H'). Il y en aurait d'ailleurs une infinité d'autres parallèles à celles-là, et relatives aux points M'' et E'', M''' et E''',..... des diverses *spires* de l'hélice indéfinie.

Observons aussi que l'on pouvait mener, sur le plan horizontal, une seconde tangente $\mu\delta$ parallèle à $O\alpha$; mais cette droite, considérée comme la projection d'une tangente à l'hélice, aurait son point de contact en (μ, μ'); d'où l'on voit clairement que sa projection verticale ne serait plus parallèle à celle de la génératrice du cône projetée sur $O\alpha$; ainsi il faut rejeter la tangente $\mu\delta$. Une pareille ambiguïté se présenterait pour la génératrice $O\beta$; mais elle se lèvera toujours, en exigeant que la tangente et la génératrice du cône soient parallèles sur les deux plans de projection à la fois.

455. Si l'on demandait de mener à l'hélice *une tangente* qui fût *parallèle à une droite donnée*, le problème serait en général impossible, à moins que cette

droite ne fit elle-même avec la verticale, un angle égal à l'inclinaison commune de toutes les tangentes de l'hélice sur les arêtes du cylindre; mais si cette condition était remplie, alors il ne s'agirait que de mener au cercle ABCD, une tangente parallèle à la projection horizontale de la droite donnée, et l'on en déduirait, comme ci-dessus, la projection verticale de la tangente à l'hélice.

456. L'HÉLICOÏDE *développable* est la surface engendrée par une droite mobile et indéfinie, qui glisse sur une hélice, en lui demeurant constamment tangente. Nous appelons cet hélicoïde *développable*, tant pour le distinguer d'un autre hélicoïde qui est *gauche* et dont nous parlerons plus loin, que parce que la surface actuelle satisfait évidemment (n° **181**) à la condition que deux génératrices infiniment voisines se trouvent dans un même plan. Pour représenter graphiquement cette surface, on pourrait tracer d'abord l'hélice FIG. 96.

$$(A\beta\gamma\delta\varepsilon\lambda\pi A,\ A'\beta'\gamma'\delta'\varepsilon'\lambda'\pi'A''),$$

puis, construire ses tangentes aux divers points (A, A'), (β, β'), (γ, γ'),.....; mais il sera plus commode et plus exact de déterminer ces droites, en cherchant immédiatement leurs traces sur le plan horizontal de projection, et sur un autre plan horizontal $a'A''l'$ élevé, au-dessus du premier, d'une quantité $A'A''$ égale au pas de l'hélice; parce qu'alors la projection verticale de cette hélice sera formée directement par les intersections successives de ces diverses génératrices, pourvu qu'elles soient assez multipliées. Or, déjà nous savons (n° **453**) que les traces horizontales de ces droites sont situées sur la développante de cercle ABCDEF....., que l'on construit en prenant sur les tangentes à la base du cylindre, les distances

$$\beta B = \beta A,\quad \gamma C = \gamma A,\quad \delta D = \delta A,.....$$

Ensuite, pour avoir leurs traces sur le plan supérieur $a'A''$, j'observe que la droite inconnue $(Aa, A'a')$ qui sera tangente à l'hélice au point (A, A'), doit faire avec la verticale un angle déterminé (n° **450**) par la relation

$$\operatorname{tang} A''A'a' = \frac{1}{k},\qquad \text{ou bien}\qquad \frac{A''a'}{A''A'} = \frac{2\pi R}{h};$$

or, comme on a pris $A''A' = h$, il en résulte que $A''a' = 2\pi R$, c'est-à-dire

que l'intervalle inconnu $A''a'$ ou Aa doit être égal à la circonférence du rayon OA, ce qui permet de construire immédiatement la première génératrice (Aa, $A'a'$) de l'hélicoïde. D'ailleurs, dans les diverses positions que prendra cette droite mobile, la portion comprise entre les plans horizontaux L'A' et $a'A''$, conservera *une longueur invariable*, puisqu'elle aura toujours une inclinaison constante (nº **450**) sur ces plans parallèles; il en sera évidemment de même pour les projections horizontales de ces portions de génératrices, qui demeureront égales en longueur à Aa. Par conséquent, si à partir de la développante inférieure ABCDEF..... on porte sur les tangentes du cercle, les longueurs

$$Aa,\ Bb,\ Cc,\ Dd,\ Ee,\ Ff, \ldots,$$

toutes égales à la circonférence OA rectifiée; puis, si l'on projette les divers points a, b, c, d, e,..... sur le plan horizontal supérieur $a'A''$, en même temps que les extrémités inférieures A, B, C, D, E,.... sur la ligne de terre, on pourra construire immédiatement les projections verticales

$$A'a',\ B'b',\ C'c',\ D'd',\ E'e',\ F'f', \ldots$$

des génératrices de l'hélicoïde; et ces droites dessineront, par leurs intersections consécutives, l'hélice même $A'\delta'\gamma'\partial'\varepsilon'\lambda'\pi'A''$ à laquelle elles devaient être tangentes.

FIG. 96. **457.** La courbe *abcdef*..... qui est la projection horizontale de la trace de l'hélicoïde sur le plan supérieur $a'A''$, se trouve nécessairement une développante du cercle OA, symétrique de la première ABCDE..... En effet, puisque la droite $D\partial d$ par exemple, est égale à la circonférence totale, et que la partie $D\partial$ égale l'arc $A\partial$, il faut bien que le reste ∂d soit égal à l'arc $\partial\lambda\pi A$; ainsi cette spirale, située dans le plan supérieur $a'A''$, viendra se terminer au point (A, A''), si l'on se borne, comme dans notre épure, à considérer une révolution *unique* de la génératrice mobile.

458. D'après cela, on peut aisément construire *en relief* la surface que nous venons de décrire; car, en prenant deux plateaux sur lesquels on tracera les deux spirales ABCDEF...., *abcdef*....., et en les maintenant dans une situation parallèle et symétrique, au moyen de tiges verticales, il suffira de tendre des fils qui réunissent les points correspondants A et a, B et b, C et c, D et d,...; et l'ensemble de ces fils rectilignes représentera l'hélicoïde développable, dont *l'arête de rebroussement* (nº **178**) sera l'hélice figurée aussi par les intersections

consécutives de ces mêmes fils. Si, d'ailleurs, on évide sur le plateau supérieur, l'intérieur de la circonférence OA, on apercevra très-sensiblement cette hélice en forme d'arête saillante; ce qui justifiera aux yeux du spectateur, la dénomination attribuée dans toutes les surfaces développables, à la courbe formée par les intersections des génératrices, laquelle partage la surface en *deux nappes* distinctes, mais réunies par un *rebroussement* le long de cette courbe.

459. Pour manifester ici cette circonstance importante du rebroussement, construisons la section faite dans l'hélicoïde par un plan horizontal quelconque X′Y′. En projetant sur le plan inférieur, les points de rencontre de X′Y′ avec les projections verticales des génératrices, on obtiendra une spirale composée de deux branches XWλ et λZY, placées l'une sur la nappe *supérieure* formée par les portions de génératrice situées au-dessus de leurs points de contact avec l'hélice, et l'autre sur la nappe *inférieure;* et je dis que cette spirale est aussi une développante du cercle OA. En effet, si le plan X′Y′ est mené, par exemple, par le milieu λ′ de la hauteur A′A″, il coupera toutes les génératrices en deux parties égales; de sorte que son point de section avec la droite (D*d*, D′*d*′) sera tel que DW égalera la demi-circonférence A$\delta\lambda$; mais puisque déjà la partie Dδ = Aδ, il s'ensuivra que le reste δW égalera l'arc $\delta\lambda$; on trouvera de même que AX = A$\delta\lambda$, et ρZ = $\rho\lambda$,..... Donc la section XWλZY est bien une développante du cercle OA, laquelle a pour origine le point λ; et la forme de cette spirale en ce point, manifeste clairement le rebroussement que présentent les deux nappes de la surface, lorsqu'elles s'approchent de l'hélice. FIG. 96.

460. Voyons maintenant quelles seront les sections faites dans l'hélicoïde par un cylindre FWZ*p* concentrique avec celui qui contient l'hélice primitive. Pour cela, prenons d'abord les points F, α, θ,..... où le cercle FWZ*p* coupe les portions *inférieures* des génératrices sur le plan horizontal, et rapportons ces points sur les projections verticales des mêmes droites; ensuite, faisons la même opération pour les points ξ, η, W,.... où les portions *supérieures* des génératrices sont rencontrées par le cylindre proposé, et nous obtiendrons les deux courbes

$$(F\alpha\theta Z\omega,\ F'\alpha'\theta'Z'\omega') \quad \text{et} \quad (\xi\eta W\zeta p,\ \xi'\eta' W'\zeta' p'),$$

situées l'une sur la nappe inférieure de l'hélicoïde, l'autre sur la nappe supérieure, et qui seront aussi *des hélices* de même *pas* que l'hélice (A$\varepsilon\gamma\delta$, A′ε′γ′δ′). En effet, les portions de génératrices (φF, φ′F′), ($\lambda\alpha$, $\lambda'\alpha'$), ($\pi\theta$, $\pi'\theta'$),.... sont toutes de même longueur, puisqu'elles sont projetées sur des droites

évidemment égales $\varphi F = \lambda\alpha = \pi\theta$,.... et que leur inclinaison sur le plan horizontal est constante. Donc, lorsque la droite finie $(\varphi F, \varphi' F')$ parcourra l'hélice donnée, en lui demeurant tangente par son extrémité mobile (φ, φ'), l'autre extrémité (F, F') s'élèvera de quantités égales aux différences de niveau des points (φ, φ'), (λ, λ'), (π, π'),...; or ces différences sont proportionnelles aux arcs $\varphi\lambda$, $\varphi\lambda\pi$,.... qui ont évidemment entre eux le même rapport que les arcs $F\alpha$, $F\alpha\theta$,....; par conséquent ces derniers se trouveront eux-mêmes *proportionnels aux ordonnées* des points (α, α'), (θ, θ'),.... et la courbe $(F\alpha\theta, F'\alpha'\theta')$ sera bien *une hélice* dont le pas égalera celui de l'hélice $(A\text{б}\gamma, A'\text{б}'\gamma')$, puisqu'au bout d'une révolution, les deux points (F, F') et (φ, φ') auront monté de la même quantité h.

On démontrera la même proposition, d'une manière analogue, pour la section $(\xi\eta W, \xi'\eta' W')$.

Fig. 96. **461**. Il est bon d'observer ici, comme une conséquence immédiate de ce qui précède, que quand une droite mobile et indéfinie $(F\varphi f, F'\varphi' f')$ *glisse* sur une hélice $(A\text{б}\gamma\delta...., A'\text{б}'\gamma'\delta')$, en lui demeurant tangente *par un même point* qui reste invariable sur la droite mobile, tout autre point (F, F') de cette dernière ligne décrit aussi (n° **460**) *une hélice de même pas* que la première. Mais si la tangente *roulait* sur l'hélice, *sans glisser*, de telle sorte que chaque élément de la droite vînt s'appliquer successivement sur les éléments de la courbe, alors un point quelconque (F, F') de la droite mobile, resterait toujours dans un même plan horizontal, et y décrirait (n° **453**) *une développante* du cercle qui sert de base à l'hélice primitive.

462. *Le plan tangent* pour un point quelconque (θ, θ') de l'hélicoïde, est le même que dans tout autre point de la génératrice $(P\theta p, P'\theta' p')$, ainsi que nous l'avons démontré (n° **177**) pour toute surface développable : donc le plan demandé renfermera la tangente PV à la spirale ABCLP, et cette droite sera précisément la trace horizontale de ce plan tangent, lequel se trouve par là suffisamment déterminé. Observons d'ailleurs, que comme la ligne $P\pi$ tangente à la développée $A\text{б}\lambda\pi$, est toujours normale (n° **197**) à la développante ABCLP, il s'ensuit que la trace PV du plan tangent se trouvera perpendiculaire sur la génératrice $(P\pi, P'\pi')$, et qu'ainsi ce plan renfermera le rayon $(O\pi, O'\pi')$ du cylindre. D'où l'on peut conclure que le plan tangent de l'hélicoïde se trouve déterminé par la génératrice sur laquelle est le point donné, et par le rayon du cylindre qui aboutit au point de contact de cette génératrice avec l'arête de rebroussement.

463. Il résulte évidemment de là que tous les plans tangents de l'hélicoïde

font, avec le plan horizontal, *un angle constant* qui égale l'inclinaison de la tangente à l'hélice primitive. D'ailleurs, chaque plan tangent tel que πPV, contenant deux génératrices infiniment voisines qui sont des tangentes à l'hélice, n'est autre chose que le *plan osculateur* (nº **177**) de cette courbe; et par suite, l'hélicoïde est *l'enveloppe* de tous les plans osculateurs de son arête de rebroussement, comme cela arrive dans toute surface développable (nº **181**).

464. D'après cela, le contour apparent de l'hélicoïde sur le plan vertical de projection, est formé par les droites (Ll, L$'l'$), (Aa, A$'a'$), (AU, A$''$U$'$), puisque le long de ces génératrices, le plan tangent se trouve perpendiculaire au plan vertical : seulement, une partie des deux dernières génératrices est recouverte par la première, et se trouve rendue invisible par cette circonstance. Quant au contour apparent sur le plan horizontal, il est formé évidemment par l'hélice (A$\beta\gamma\delta\lambda$, A$'\beta'\gamma'\delta'\lambda'$), quoique le long de cette courbe les plans tangents de l'hélicoïde ne soient pas *verticaux*, ainsi que l'exigerait la règle générale du nº **106**; mais c'est qu'ici la surface présente, pour limite des parties visibles, la circonstance particulière d'un *rebroussement.* On doit ajouter à ce contour les spirales ABCGQRS et *abclpqr*A, qui terminent la portion de surface que nous nous sommes borné à considérer ici, avec le soin d'omettre la partie de la première qui est recouverte par la seconde; et d'après ces remarques, il sera aisé au lecteur de se rendre compte des parties *pleines* et *ponctuées* que présente notre épure.

465. *Développement de l'hélicoïde.* On pourrait l'effectuer ici, comme dans toute surface développable, en partageant une courbe plane ABCDGL située sur la surface, en petits arcs sensiblement confondus avec leurs cordes; alors les secteurs élémentaires projetés sur D$\delta\gamma$C, E$\varepsilon\delta$D, F$\varphi\varepsilon$E,..... pourront être regardés comme des triangles dont les côtés, connus par leurs projections, seront faciles à évaluer; de sorte que, si l'on construit ces triangles sur un même plan et à la suite les uns des autres, leur ensemble représentera le développement de la surface en question. Toutefois, il faut avouer que ce mode d'opérations donnerait lieu à des chances d'erreurs accumulées, qui disparaîtraient si l'on connaissait d'avance la forme que doit prendre, sur le développement, une certaine courbe donnée sur la surface primitive; et c'est ainsi que nous en avons usé pour les cylindres et les cônes, dans les nºˢ **243** et **251**. Fig. 96.

466. Or, dans l'hélicoïde développable, il arrive que *toutes les hélices ont pour transformées*, sur le développement, *des cercles concentriques.* En effet, si nous concevons l'hélice arête de rebroussement (A$\beta\gamma\delta$..., A$'\beta'\gamma'\delta'$...), comme

partagée en éléments égaux projetés sur $A\mathcal{E}$, $\mathcal{E}\gamma$, $\gamma\delta$,..., il est facile d'apercevoir que *tous les angles de contingence sont égaux entre eux* dans cette ligne à double courbure; car celui qui est projeté sur $D\delta C$, étant combiné avec la verticale δ, formera un angle trièdre dans lequel deux faces et l'angle dièdre compris resteront les mêmes pour tous les points de l'hélice. Mais ces angles de contingence, qui changent ordinairement de grandeur pour une courbe quelconque tracée sur une surface que l'on développe, demeurent *invariables* quand il s'agit de l'arête de rebroussement (n° **179**, *note*); donc l'hélice ($A\mathcal{E}\gamma\delta$...., $A'\mathcal{E}'\gamma'\delta'$...) se transformera dans une courbe plane, dont les angles de contingence seront égaux entre eux, pour des arcs de même longueur; par conséquent cette transformée aura une courbure uniforme (n° **198**), et dès lors elle sera un cercle.

Maintenant, pour une autre hélice ($F\alpha\theta Z\omega$, $F'\alpha'\theta'Z'\omega'$) située sur le même hélicoïde, on obtiendra sa transformée en traçant, sur le développement, des tangentes au cercle dans lequel se sera changée l'hélice ($A\mathcal{E}\gamma$..., $A'\mathcal{E}'\gamma'$...), et en prenant ces tangentes égales aux portions de génératrices (φF, $\varphi' F'$), ($\lambda\alpha$, $\lambda'\alpha'$), ($\pi\theta$, $\pi'\theta'$),.... Or, comme ces dernières droites ont toutes la même longueur (n° **460**), il arrivera évidemment que leurs extrémités aboutiront sur une circonférence concentrique avec la précédente : donc, etc.

Fig. 96. **467**. Pour faire servir cette propriété des hélices au développement de l'hélicoïde sur un de ses plans tangents, nous choisirons le plan $LL'\lambda'$ qui est perpendiculaire au plan vertical, et qui renferme les deux droites ($L\lambda$, $L'\lambda'$), ($\psi\alpha$, $L'\alpha'$) tangentes aux deux hélices projetées sur $A\mathcal{E}\lambda$ et $F\alpha\theta$. Or, comme ces droites devront se retrouver tangentes aux deux cercles dans lesquels ces hélices se transformeront, il n'y aura qu'à rabattre ce plan autour de LL', avec les deux tangentes en question qui deviendront évidemment $L\lambda''$ et $\psi\alpha''$; puis, élever sur ces dernières lignes les perpendiculaires $\lambda''O''$ et $\alpha''O''$, qui détermineront le centre O'' et les rayons de ces deux transformées circulaires

Fig. 96 et 97. Cela posé, sur la *fig.* 97 et avec un rayon $O_2\lambda_2$ égal à la droite $O''\lambda''$ de la *fig.* 96, je décris une circonférence sur laquelle il faudra marquer des arcs qui aient la même longueur que les arcs d'hélice projetés sur $A\mathcal{E}$, $\mathcal{E}\gamma$, $\gamma\delta$,..... Or, puisque la demi-spire ($A\mathcal{E}\gamma\lambda$, $A'\mathcal{E}'\gamma'\lambda'$) est égale en longueur (n° **449**) à sa tangente ($L\lambda$, $L'\lambda'$), nous tracerons la tangente $\lambda_2 L_2$ égale à $\lambda' L'$; et après avoir divisé cette droite $\lambda_2 L_2$ en huit parties égales, nous les reporterons sur la circonférence depuis λ_2 jusqu'en A_2 et A_3; alors l'arc de cercle $A_2\lambda_2 A_3$ sera *la transformée* de la spire entière ($A\mathcal{E}\gamma\lambda A$, $A'\mathcal{E}'\gamma'\lambda' A''$). Ensuite, nous

mènerons les tangentes $\mathcal{B}_2B_2$, γ_2C_2, δ_2D_2,.... que nous ferons égales à 1, 2, 3,... des divisions de λ_2L_2, et ce seront les vraies longueurs des génératrices de l'hélicoïde, comprises depuis l'arête de rebroussement jusqu'au plan horizontal; de sorte que la *nappe inférieure* de cette surface se trouvera développée suivant la forme

$$A_2\mathcal{B}_2\gamma_2\lambda_2A_2U_2T_2L_2C_2B_2A_2,$$

dont le contour extérieur est évidemment la développante du cercle $A_2\lambda_2A_2$, tandis que la circonférence $F_2\alpha_2\vartheta_2\omega_2$ sera *la transformée* de l'autre hélice ($F\alpha\vartheta\omega$, $F'\alpha'\vartheta'\omega'$). Quant au développement de la *nappe supérieure* de l'hélicoïde, on l'obtiendrait en prolongeant chaque génératrice $F_2\varphi_2$, de manière que sa longueur totale F_2f_2 égalât le double de $L_2\lambda_2$.

468. Nous aurions pu éviter de recourir à la seconde hélice ($F\alpha\vartheta$, $F'\alpha'\vartheta'$), pour trouver le rayon $O_2\lambda_2 = O''\lambda''$ du cercle suivant lequel se transforme l'hélice primitive ($A\mathcal{B}\gamma\lambda$, $A'\mathcal{B}'\gamma'\lambda'$), attendu que ce rayon doit être précisément le *rayon de courbure* (n° **198**) de cette dernière hélice; car, dans le développement d'une surface développable, on sait (*note* du n° **179**) que l'arête de rebroussement conserve les mêmes angles de contingence qu'auparavant, ainsi que des arcs de même longueur; de sorte qu'elle garde la même courbure, mais seulement elle perd sa *torsion*, comme nous l'expliquerons plus en détail au n° **654**. D'ailleurs, nous verrons au n° **676** que le rayon de courbure d'une hélice est donné par la formule

$$\rho = R\,(1 + \tang^2 \omega),$$

où ω désigne l'angle de la tangente à l'hélice avec le plan de la base orthogonale du cylindre, et R le rayon de cette surface (*). Or cette expression est susceptible d'une construction fort simple; car, si par le point E' de la

(*) Si l'on veut trouver directement cette formule, on pourra employer le moyen suivant qui m'a été communiqué par M. *Catalan*, répétiteur à l'École Polytechnique. Soient MP et PQ (*fig.* 98) les projections de deux éléments égaux de l'hélice, correspondants au point (P, P') pour lequel le plan osculateur contient (n° 463) le rayon du cylindre (PO, P'), et projette ces deux éléments sur la droite M'P'Q' qui fait l'angle ω avec la base du cylindre. Si l'on fait tourner ce plan osculateur autour de la droite (PO, P'), jusqu'à ce qu'il devienne horizontal, les deux éléments seront rabattus suivant Pm et Pq; puis, en élevant des perpendiculaires

fig. 96, et parallèlement à la tangente L'λ', on tire la droite E'I' sur laquelle on élèvera la perpendiculaire I'K', la comparaison des triangles rectangles conduira aisément à la relation

$$A'K' = A'E'.\tang^2\omega = R\tang^2\omega;$$

d'où il suit que le rayon de courbure de l'hélice est $\rho = E'K'$. C'est donc avec cette longueur, qui doit se trouver égale à O''λ'', qu'il faudra décrire le cercle de la *fig.* 97; et ensuite, les autres opérations graphiques s'effectueront comme précédemment.

CHAPITRE II.

Des épicycloïdes.

PL. 45, FIG. 1. **469.** Une courbe mobile *xay* est dite *rouler* sur une courbe fixe XAY, lorsque des éléments égaux $ab = AB$, $bc = BC$, $cd = CD$,..... viennent s'appli-

---

sur leurs milieux, le rayon de courbure de l'hélice sera représenté par $P\omega$ ou $\frac{1}{2}$ PF. Or on a évidemment

$$2\rho = PF = \frac{(Pm)^2}{PH}, \qquad 2R = PG = \frac{(PM)^2}{PH},$$

d'où l'on déduit, en observant que PM est la projection de la droite $P'M' = Pm$,

$$\frac{\rho}{R} = \left(\frac{Pm}{PM}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2\omega} = 1 + \tang^2\omega.$$

On pourrait aussi rattacher cette méthode à la formule générale $\rho = \frac{ds}{\varepsilon}$ trouvée au n° **198**, en observant qu'ici l'angle de contingence ε a pour vraie grandeur le supplément de mPq; or on a évidemment

$$\frac{PH}{Pm} = \cos\left(\frac{180° - \varepsilon}{2}\right) = \sin\tfrac{1}{2}\varepsilon = \tfrac{1}{2}\varepsilon, \quad \text{et} \quad PH = \frac{(PM)^2}{2R} = \frac{ds^2\cos^2\omega}{2R};$$

d'où l'on conclut

$$\varepsilon = \frac{ds\cos^2\omega}{R}, \quad \text{et} \quad \rho = \frac{R}{\cos^2\omega} = R(1 + \tang^2\omega),$$

ce qui justifie la construction employée dans le texte.

quer respectivement les uns sur les autres, de telle sorte que le point b arrive à coïncider avec B, ensuite c avec C, d avec D, et ainsi des autres. Cela équivaut à dire que le lieu du contact qui est actuellement en A et a, doit parcourir, dans le même temps, des espaces égaux sur les deux courbes à la fois; tandis que, si ces espaces étaient inégaux, et que le point b vînt à coïncider avec C, il y aurait à la fois *roulement* et *glissement* d'une courbe sur l'autre; et enfin, il n'y aurait qu'un simple glissement, sans aucune rotation, si c'était le même point a de la courbe mobile qui vînt coïncider successivement avec B, C, D,... D'ailleurs, ces distinctions s'appliquent pareillement à des courbes gauches comme à celles qui seraient situées dans le même plan ou dans des plans différents, pourvu que la courbe mobile ait toujours *une tangente commune* avec la courbe fixe.

470. Pendant la rotation de la courbe xy, un point quelconque m, fixe sur cette ligne mobile et entraîné avec elle, décrira dans l'espace une autre courbe mz que nous allons apprendre à construire par divers exemples; mais, dans tous les cas, la tangente mt relative à une position quelconque, sera toujours *perpendiculaire à la droite* Am qui réunit le point générateur avec le point de contact correspondant. En effet, lorsque les deux courbes xy et XY se touchent en A, elles ont en cet endroit un élément commun AA'; or, pendant que les deux éléments ainsi confondus se détachent, et jusqu'à ce que les éléments voisins ab et AB soient parvenus à coïncider, le sommet A reste *immobile*, et le point générateur m décrit un arc mm' infiniment petit et situé évidemment sur la sphère du rayon Am. Donc, la tangente mt qui doit être le prolongement de cet élément mm', sera bien perpendiculaire à la droite Am, laquelle se trouve ainsi *normale* à la courbe $mm'z$. D'ailleurs, on voit bien que ce raisonnement s'appliquerait de même à tout point n qui, sans être situé sur le périmètre de la courbe roulante xy, se trouverait lié fixement avec elle, et décrirait une autre courbe nu dont la normale serait encore An : donc, dans tous les cas, *la droite qui joint le point de contact de la courbe roulante avec le point générateur, est une* NORMALE *à la courbe que décrit ce dernier point.*

Si l'on voulait conserver à la démonstration précédente toute la rigueur de forme dont elle est susceptible, il faudrait d'abord substituer aux deux courbes xy et XY deux polygones (*fig.* 2) à côtés respectivement égaux; puis, en les faisant rouler l'un sur l'autre, de manière que leurs plans fissent entre eux un angle constant ou variable, le point m décrirait une ligne discontinue $mm'm''$.... composée d'arcs *sphériques* qui auraient leurs centres successifs en A, B, C,...., et telle que la tangente mt au point m serait perpendiculaire sur Am. Or il est FIG. 2.

évident que cette dernière propriété subsistera toujours, quelle que soit la grandeur des côtés et des angles des deux polygones : seulement, à mesure que les angles augmentent et que les côtés décroissent, les arcs mm', $m'm''$,.... diminuent de longueur et deux rayons consécutifs sont plus près d'être égaux, ce qui rapproche de plus en plus la ligne $mm'm''$.... d'une courbe continue. Donc, puisque dans toutes ces variations l'angle Amt reste constamment droit, il en sera encore de même quand les deux polygones seront devenus deux courbes quelconques, par exemple deux cercles; ainsi, dans ce dernier état, la courbe continue décrite alors par le point m, aura pour tangente en m une droite perpendiculaire sur Am.

Épicycloïdes planes.

Pl. 45, Fig. 3. **471.** Premier cas. Considérons un cercle mobile O' qui roule extérieurement sur un cercle fixe O, en demeurant toujours dans le même plan que ce dernier, et adoptons pour point générateur le point de contact actuel D de ces deux circonférences. Lorsque le cercle O' aura roulé jusqu'à toucher l'autre en un point quelconque A_4, on retrouvera la position correspondante M du point générateur D, en décrivant du point O'_4 comme centre et avec le rayon O'D, une circonférence sur laquelle on prendra un arc A_4M de même longueur absolue que l'arc A_4D, ce qui s'effectuera en mesurant ce dernier au moyen d'une très-petite ouverture de compas. Mais ces opérations s'exécuteront avec plus de rapidité, si l'on a eu soin d'abord de diviser la circonférence mobile en parties égales, et de les reporter sur le cercle fixe suivant DA_1, A_1A_2, A_2A_3,...; car alors il suffira de décrire deux arcs de cercle, l'un du centre O'_4 avec un rayon $O'_4M = O'D$, l'autre du centre A_4 avec un rayon A_4M égal à la corde D4 du cercle primitif O'. Des constructions semblables effectuées pour d'autres points de contact A_5, A_6,.... permettront de tracer aisément la courbe DMGF nommée épicycloïde *extérieure*, laquelle comprend une infinité de branches identiques à celle que nous venons de citer, et qui se rattachent les unes aux autres par des points de rebroussement tels que D et F.

472. La tangente au point M de cette courbe, sera précisément la droite MT corde supplémentaire de MA_4, puisque nous savons (n° **470**) que cette dernière est *normale* à l'épicycloïde. Cette propriété fournit même un tracé beaucoup plus simple et bien suffisant pour les engrenages; car, si l'on décrit divers arcs de cercle ayant pour centres les points A_1, A_2, A_3,.... et pour rayons les cordes D1, D2, D3,.... du cercle primitif O'; puis, si l'on trace une courbe

enveloppe de tous ces arcs, cette enveloppe sera précisément l'épicycloïde DMGF, attendu que ces cordes indiquent évidemment (n° **470**) les longueurs des *normales* telles que MA_4, qui aboutiraient aux points de contact successifs A_1, A_2, A_3,.... du cercle mobile. C'est la méthode proposée par M. *Poncelet*.

473. On pourrait adopter un point générateur D' situé hors du cercle mobile, mais lié avec celui-ci d'une manière invariable. Alors ce point D' décrirait une courbe à nœud D'M'G'.... que l'on nomme *épicycloïde rallongée*, et qui se construirait en prenant, sur chaque rayon O'_4M déterminé comme au n° **471**, une distance $MM' = DD'$. La droite A_4M' serait encore (n° **470**) normale à cette courbe; ainsi la tangente M'T' devra être menée perpendiculairement à A_4M'.

Si le point générateur D'' était en dedans du cercle mobile, la courbe décrite alors serait une *épicycloïde raccourcie* D''M''G'', laquelle offrirait des points d'inflexion au lieu d'un nœud. Un point quelconque M'' de cette courbe s'obtiendra aussi en prenant, sur le rayon O'_4M construit comme au n° **471**, une distance $MM'' = DD''$; et puisque la droite A_4M'' sera encore (n° **470**) normale à cette épicycloïde, la tangente M''T'' s'en déduira immédiatement.

474. Deuxième cas. Lorsque le cercle mobile O' roule dans la concavité du cercle fixe O, et que le premier a un rayon $R' < \frac{1}{2}R$, le point générateur D décrit une épicycloïde *intérieure* qui présente la forme DGF, et qui se construit du reste comme précédemment. Si l'on choisissait le rayon $R' = \frac{1}{4}R$, comme dans la *fig.* 5, la courbe DMFD'F' aurait une forme et une équation toutes semblables à celles de la développée de l'ellipse (*fig.* 76), avec la seule différence que les quatre points de rebroussement seraient ici placés à égale distance du centre (Voyez la note du n° **492**). Pl. 45, Fig. 4.

475. *Épicycloïde rectiligne.* Ce cas très-particulier et fort utile pour les engrenages, se présente quand on choisit le rayon du cercle mobile $R'' = \frac{1}{2}R$; car alors l'épicycloïde décrite par un point du cercle O'' se trouve *confondue avec le diamètre* D''OD qui passe par la position initiale D'' du point générateur. En effet, si nous considérons le cercle mobile à une époque quelconque de sa rotation, où il touche le cercle O en A et où il coupe le diamètre D''O en M, il suffira de prouver que les arcs AM et AD'' sont égaux en grandeur absolue, puisque alors il sera certain que le point générateur placé d'abord en D'', sera venu en M sur le diamètre D''O. Or l'angle AO''M est évidemment double de AOD''; donc les arcs AM et AD'' sont aussi doubles l'un de l'autre, quant au nombre de degrés qu'ils contiennent : mais le premier de ces arcs appartient Fig. 4.

à une circonférence qui n'est que la moitié de l'autre; donc la longueur absolue de AM égale celle de AD″.

Pl. 45, Fig. 6. **476.** Troisième cas. Supposons maintenant que le cercle mobile O′ qui roule dans la concavité du cercle O, ait son rayon $R' > \frac{1}{2}R$; je dis que l'épicycloïde DGF décrite alors par le point générateur D, coïncidera avec celle que décrirait un troisième cercle O″ qui aurait un rayon $R'' = R - R'$, et qui roulerait *en sens contraire* de O′. Pour le prouver, je considère le cercle mobile O′ parvenu dans la situation quelconque O'_2, où le point générateur occupera une position M telle que l'arc AM = AD : je tire la droite MO'_2, et sa parallèle OB; puis, j'achève le parallélogramme OO'_2MO'' qui me donne $O''B = O''M = R - R'$, et je trace enfin le cercle O″. Cela fait, il n'y a plus qu'à démontrer que les arcs BM et BD ont la même longueur absolue; or les trois arcs BA, AM, MB, qui mesurent des angles évidemment égaux, doivent être proportionnels à leurs rayons, ce qui donne

$$\frac{BA}{R} = \frac{AM}{R'} = \frac{BM}{R''};$$

et puisque l'on a pris $R'' + R' = R$, il en résulte que BM + MA = BA : mais déjà l'on sait que l'arc AM = AD; donc il reste BM = BD.

Fig. 7. **477.** Quatrième cas. Enfin, supposons que le cercle mobile O′ ait un rayon $R' > R$, auquel cas il enveloppera le cercle fixe. Alors l'épicycloïde décrite par le point générateur D, se retrouvera *extérieure*, et chaque branche DGF occupera sur le cercle fixe, un arc DEF égal à l'excès de la circonférence O′ sur la circonférence O. D'ailleurs on démontrera aisément, comme au n° **476**, que cette épicycloïde DGF coïncide avec celle que décrirait un cercle O″ tangent extérieurement au cercle O, et dont le rayon serait $R'' = R' - R$.

Fig. 8. **478.** Lorsqu'on suppose *infini* le rayon R du cercle fixe, ce cercle devient une droite DAF sur laquelle roule le cercle O′; et un point quelconque M de la circonférence de ce dernier, décrit alors la *cycloïde* DMGF dont la normale est encore MA et la tangente MT. La construction de cette courbe s'effectuera aisément par les moyens indiqués au n° **471**; d'ailleurs la cycloïde serait *rallongée* ou *raccourcie*, comme au n° **473**, si le point générateur était placé au dehors ou au dedans du cercle mobile.

Fig. 9. **479.** Au contraire, si c'est le cercle mobile qui acquiert un rayon infini, ce

cercle deviendra une droite indéfinie DX qui, en roulant sur la circonférence O, décrira par chacun de ses points D, une spirale DM′M″M‴.... laquelle n'est autre chose que la *développante* du cercle O (n° **197**). D'ailleurs, comme les normales M′A′, M″A″,.... sont précisément les rayons de courbure (n° **198**) de cette spirale, si des points A′, A″, A‴,.... l'on décrit avec des rayons égaux à D*a*′, D*a*″, D*a*‴,.... des arcs de cercle, ces arcs se confondront dans une étendue assez considérable avec la spirale même, et ils fourniront un moyen très-exact et très-commode pour tracer cette courbe.

Épicycloïdes sphériques.

480. Considérons maintenant deux cercles OA et CA dont le second roule sur le premier, en lui demeurant toujours tangent, mais de manière que leurs plans fassent entre eux un angle constant $CAX = \omega$: pendant cette rotation, un point quelconque M, fixe sur la circonférence mobile et entraîné avec elle, décrira dans l'espace une courbe DM.... qui se nomme une ÉPICYCLOÏDE *sphérique*, parce qu'elle est située tout entière sur la surface d'une sphère constante. En effet, si par les centres des deux cercles, on élève sur leurs plans les perpendiculaires OS et CS, ces deux *axes* iront se rencontrer nécessairement dans chacune des positions du cercle mobile; car, pour chaque point de contact tel que A, les plans AOS et ACS se trouveront évidemment perpendiculaires à la tangente commune AV, et dès lors ils coïncideront. D'ailleurs, comme l'angle OAC est le supplément de $CAX = \omega$ qui demeure constant pendant la rotation, il s'ensuit que le quadrilatère OACS aura deux côtés et trois angles dont la grandeur restera invariable, et conséquemment il en sera de même pour les côtés OS et CS dont le point de rencontre S demeurera *immobile;* d'où il résulte que la distance de ce point S au point mobile M, sera constamment égale à SA, et qu'ainsi l'épicycloïde tout entière se trouvera située sur la sphère qui aurait SA pour rayon. Fig. 99.

481. En outre, si l'on imagine deux cônes de révolution, ayant pour sommet commun le point S et pour bases les cercles OA et CA, il est évident que ces cônes auront un plan tangent commun SAV; et par conséquent la génération de l'épicycloïde peut s'énoncer de la manière suivante : *si deux cônes de révolution qui ont toujours même sommet et des génératrices de même longueur, roulent l'un sur l'autre*, sans glisser, et en demeurant tangents le long d'une génératrice variable, *un point quelconque, fixe sur la base du cône mobile, décrira la courbe nommée épicycloïde sphérique.* En effet, on doit voir que par là les circonfé-

rences des deux bases seront toujours *tangentes*, et que leurs plans conserveront *une inclinaison constante;* et même c'est là le moyen le plus commode pour réaliser mécaniquement ces deux conditions, pendant le roulement du cercle mobile sur le cercle fixe.

FIG. 100. **482.** Construisons la projection de l'épicycloïde sur le plan de la base du cône fixe, en regardant ce dernier comme horizontal, et adoptons pour plan vertical celui qui passe par l'axe S'O de ce cône et par le point de contact A des deux bases, dans la position actuelle qui se rapporte à une époque quelconque du mouvement. D'après cela, les deux cônes seront projetés verticalement sur les triangles isocèles S'AE, S'AB', et la droite AB' représentera la projection verticale du cercle mobile qui, rabattu autour de la tangente commune AV, deviendra le cercle *Amb*. Cela posé, soit D l'origine de l'épicycloïde, c'est-à-dire la position qu'occupait le point générateur, quand il se trouvait en contact avec le cercle fixe : maintenant que le cercle mobile a parcouru, en roulant sur l'autre, l'arc DA, le point générateur se trouvera placé sur le rabattement, à une distance curviligne A*m* égale en longueur absolue à l'arc AD (*). Donc, en relevant le cercle *Amb* autour de AV, et observant que le point (m, m') va décrire alors un arc m'M' qui, étant perpendiculaire à la charnière AV, se trouvera projeté sur la droite *m*M parallèle à la ligne de terre, on obtiendra un point (M, M') de l'épicycloïde demandée.

483. Pour en obtenir un second, il faudra imaginer que le cercle mobile a roulé jusqu'à venir toucher le cercle fixe en A_6, par exemple; alors, on pourrait recommencer sur le plan vertical OA_6 rabattu, des opérations semblables à celles que nous avons exécutées sur le plan vertical OA; mais il sera bien plus simple de ramener toutes les constructions à s'effectuer sur ce dernier. Pour cela, imaginons que les deux cônes, parvenus à se toucher le long de l'arête qui aboutit en A_6, tournent simultanément et *sans changer leurs positions rela-*

(*) Pour tracer l'épure, il est bon de commencer par diviser le cercle mobile en parties égales, de mesurer une de ces parties au moyen de petites cordes; puis, de transporter celles-ci sur le cercle fixe, ce qui donnera un arc égal à l'une des divisions du cercle mobile. Ensuite, on répétera cet arc du grand cercle, autant de fois qu'il y avait de divisions dans le cercle mobile, et l'on obtiendra l'étendue DAF occupée par une branche de l'épicycloïde, sur le cercle fixe. Cependant, si le rapport des deux rayons OA et C'A était exprimé par un nombre assez simple, il serait plus exact de prendre d'abord sur le cercle fixe, un arc DAF égal à une fraction de cette circonférence, exprimée par ce rapport; puis, on diviserait l'arc DAF en autant de parties égales qu'on en aurait marqué dans le cercle mobile.

tives, autour de la verticale OS′, jusqu'à ce que le rayon OA_6 vienne coïncider avec l'ancienne ligne de terre OAX. Alors, le point générateur sera situé sur le cercle mobile rabattu, non plus en *m*, mais à une distance A*n* égale à l'intervalle DA_6 compris entre l'origine D et le point de contact dans sa vraie position qui est A_6. De sorte que si l'on construit, comme ci-dessus, les projections N et N′ du point rabattu *n*, il n'y aura plus qu'à ramener OA en OA_6, puis à trouver un point N″ placé relativement à cette dernière droite, dans une situation toute semblable à celle de N par rapport à OA; ce qui s'exécutera au moyen du cercle décrit avec la distance ON, sur lequel on prendra l'arc I″N″ égal à IN.

484. On agira de même pour toute autre position du point de contact des deux cercles; et quand ce contact aura lieu au milieu K de l'arc DKF égal à la circonférence du cercle mobile, on voit bien que le point générateur se trouvera rabattu en *b* qui se projette en B′ et B; si donc on ramène ce dernier point sur OK, au moyen d'un arc de cercle BG, on obtiendra le *sommet* G où la projection horizontale de l'épicycloïde s'écarte le plus du cercle fixe.

Observons enfin que les points D, M, N″, transportés symétriquement au delà de OG, au moyen d'arcs de cercle, fourniront des points F, M‴, N‴, qui appartiendront encore à l'épicycloïde, laquelle aura pour *axe* la droite OG, et admettra une infinité de branches identiques avec DGF.

485. Les constructions précédentes donnent aussi le moyen de tracer la projection verticale de l'épicycloïde, puisque M′ appartient à cette projection; et quant au point (N, N′) qui a été transporté en N″, sans changer de hauteur, on retrouverait bien aisément sa projection verticale dans cette dernière situation. Mais nous n'avons pas voulu effectuer ce tracé, dans la crainte de rendre l'épure un peu confuse, et surtout parce que nous regardons ici le plan vertical de projection, seulement comme un moyen d'exécuter nos opérations graphiques, et non comme existant réellement; attendu que sa présence aurait rendu invisibles une grande partie des lignes de l'épure. D'ailleurs, l'épicycloïde est suffisamment déterminée par l'intersection du cylindre vertical DMGF, avec la sphère du rayon S′A qu'il est facile de représenter sur le plan horizontal.

486. *De la tangente à l'épicycloïde.* Puisque cette courbe est tout entière (n° **480**) sur la sphère fixe qui a pour centre le sommet S′ et pour rayon l'apothème S′A, le plan tangent de cette sphère en (M, M′) renfermera déjà la tangente demandée. Ensuite, comme nous avons démontré au n° **470** que la droite (AM, AM′) qui joint le point générateur avec le point de contact correspondant A, est une *normale* à l'épicycloïde, nous en pouvons conclure que la FIG. 100.

tangente cherchée se trouve aussi dans un plan perpendiculaire à cette droite, lequel peut être regardé comme le plan tangent d'une sphère qui aurait son centre en A, et pour rayon la droite (AM, AM'); mais cette seconde sphère est variable de position et de grandeur, en passant d'un point à un autre de l'épicycloïde, et elle ne fait que *toucher* cette courbe avec laquelle elle n'a de commun qu'un élément linéaire. D'après cela, le problème se réduit à chercher l'intersection du plan tangent à *la sphère fixe* avec le plan tangent à *la sphère variable*.

487. Pour y parvenir, coupons ces deux sphères par le plan B'AV qui contient la base du cône mobile. La section faite ainsi dans la sphère S'A, sera évidemment le cercle AB' lui-même : rabattons-le suivant *Amb*, et menons-lui la tangente *m*P qui, étant relevée, rencontrera le plan horizontal en P sur la charnière AV; alors ce point P appartiendra à la trace horizontale du plan tangent de la sphère S'A, et cette trace sera la droite PT menée perpendiculairement sur la projection OM du rayon qui aboutit au point proposé (M, M'). Quant à la sphère variable dont le rayon est (AM, AM'), elle est coupée par le plan B'AV suivant un grand cercle qui, rabattu sur le plan horizontal autour de AV, deviendra le cercle décrit avec A*m* pour rayon. Menons-lui la tangente *m*Q (laquelle doit aboutir au point *b*), et relevons cette droite avec son cercle, pour trouver sa trace horizontale Q sur la charnière AV; dès-lors ce point Q appartiendra à la trace du plan tangent de la sphère variable, et cette trace s'obtiendra en menant QX perpendiculaire sur la projection AM du rayon correspondant. Cela posé, les traces QX et PT des deux plans tangents allant se couper au point T, la droite TM sera la projection horizontale de la tangente à l'épicycloïde; et la projection verticale T'M' s'en déduira, en projetant le point T sur la ligne de terre.

FIG. 100. **488.** *Autre méthode.* On peut obtenir cette tangente d'une manière beaucoup plus simple, par le procédé du *plan normal* (n° **214**), car ici nous connaissons immédiatement deux normales à l'épicycloïde : l'une est le rayon de la sphère constante, mené du sommet S' au point (M, M'); l'autre est la droite (MA, M'A), d'après ce que nous avons prouvé au n° **470**. Par conséquent, si nous faisons passer un plan par ces deux normales, la tangente cherchée devra lui être perpendiculaire, et ses projections seront ainsi déterminées. Or, la première de ces normales va évidemment percer le plan vertical en S', et la seconde en A; donc S'A est la trace verticale du plan normal. Quant à l'autre trace, imaginons dans le plan normal, une droite auxiliaire parallèle à S'A; ses projections M'R', MR, donneront le point R où elle perce le plan horizontal, et par suite, AR sera la trace horizontale du plan normal. Dès lors, la tangente

à l'épicycloïde s'obtiendra en menant MT perpendiculaire sur AR, et M'T' perpendiculaire sur AS.

489. Il importe d'observer qu'aux points de *rebroussement* D et F, la projection horizontale de l'épicycloïde a pour tangentes les rayons OD et OF. En effet, la droite variable (AM, AM') à laquelle la tangente dans l'espace est toujours perpendiculaire, étant prolongée indéfiniment, est une sécante par rapport au cercle mobile, comme on le voit par son rabattement A*m*. Or, ses deux points de section A et *m* se trouvant réunis quand le point de contact A est arrivé en D, la droite indéfinie rabattue suivant A*m* devient alors *tangente* au cercle mobile dans le point *m*, et par suite au cercle fixe qui, à cette époque du mouvement, touche l'autre en D; donc la tangente au point D du cercle fixe DA, se trouvera être précisément la trace horizontale du plan normal, et conséquemment la tangente de l'épicycloïde sera projetée horizontalement sur le rayon ODX'.

Quant à la projection verticale de cette même tangente, il suffira de projeter son pied D en D' sur la ligne de terre, et d'abaisser de ce dernier point une perpendiculaire sur la trace verticale du plan normal relatif au point D. Or cette trace s'obtiendra fort aisément, puisqu'elle passera évidemment par le point S', et par le point où la ligne de terre rencontrera la seconde normale qui est, comme nous venons de le prouver, confondue avec la tangente de l'arc DA.

On agira d'une manière toute semblable, pour trouver les projections de la tangente à l'autre extrémité F de l'épicycloïde; et l'on doit apercevoir que chacune de ces tangentes en D ou en F, coïncide précisément avec la tangente du grand cercle vertical de la sphère constante dont le rayon est S'A.

490. Pour *le sommet* de l'épicycloïde, qui est projeté en G, la tangente sera horizontale et perpendiculaire au plan vertical OKG; car ce plan contiendra évidemment les deux normales du n° **488**, quand le point générateur sera parvenu à l'extrémité supérieure B' du diamètre mené par le point de contact du cercle mobile.

491. Lorsque nous avons cherché (n° **487**) la trace QX du plan tangent à la *sphère variable* dont le rayon est (AM, AM'), nous nous sommes appuyés sur ce que ce plan devait contenir la tangente rabattue suivant Q*mb*. Or, quand elle sera relevée dans le plan B'AV du cercle mobile, elle ira percer le plan vertical en B'; donc B'X est la trace verticale du plan tangent à la sphère variable : en outre, cette trace doit se trouver perpendiculaire à B'A, car c'est sur cette dernière droite que se projette le rayon (AM, AM') mené au point de contact de ce plan tangent. Fig. 100.

492. Observons d'ailleurs que, dans les diverses positions $A, A_6, \ldots$ que prend le point de contact du cercle mobile, la projection AB' de ce cercle, sur les plans verticaux correspondants OA, $OA_6, \ldots$ aura toujours la même grandeur et la même inclinaison; de sorte que pour tous ces plans, le triangle rectangle $AB'X$ restera invariable de grandeur, et par suite, les traces XB' des divers plans tangents aux sphères variables, iront toutes rencontrer la verticale OS' au même point Z'. De là il résulte que si l'on avait à considérer un cône dont le sommet fût en Z', et qui eût pour base l'épicycloïde sphérique, tous les plans tels que $Z'XQ$ lui seraient tangents, puisque chacun d'eux renfermerait le sommet et une tangente de la base. En outre, tous ces plans tangents viendraient passer successivement par la droite fixe $Z'X$, lorsque le cône *épicycloïdal*, en tournant autour de OZ', amènerait en M les divers points N'', G, N''',.... Cette propriété est employée dans les engrenages coniques, qui servent à faire mouvoir les *roues d'angle* : Voyez le n° **883** (*).

(*) Cherchons les équations qui déterminent l'épicycloïde sphérique (*fig.* 100), en rapportant cette courbe aux trois axes rectangulaires OX', OY', OZ', dont le premier passe par le point de rebroussement D. Si l'on pose

$$OS' = h, \quad OA = R, \quad C'A = R', \quad \textit{angle}\ B'Ab = \omega,$$

on aura évidemment

$$(1) \qquad x'^2 + y'^2 + z^2 - 2zh = R^2$$

pour l'équation de la sphère constante, sur laquelle est située l'épicycloïde tout entière; de sorte que cette courbe se trouvera complétement définie, en joignant à l'équation précédente celle de sa projection horizontale $DMGF$. Or, si nous appelons α l'angle DOA, nous en conclurons que

$$R.\alpha = AD = Am; \quad \text{d'où} \quad \textit{angle}\ Acm = \frac{R\alpha}{R'};$$

et alors nous aurons pour les coordonnées du point M rapporté d'abord aux axes OX et OY,

$$x = OA + AH = R + \left(R' - R'\cos\frac{R\alpha}{R'}\right)\cos\omega,$$
$$y = -MH = -R'\sin\frac{R\alpha}{R'}.$$

Mais pour revenir de ces axes, qui seraient mobiles avec le point de contact A, aux axes fixes OX' et OY', il faut employer les formules connues

$$x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha, \quad y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha;$$

493. DÉVELOPPANTE SPHÉRIQUE. Lorsque le cône mobile acquiert une ouverture telle que l'angle au centre ASB (*fig.* 99) devient égal à 180°, ce cône se réduit à un cercle dont le rayon égale l'apothème SA du cône fixe et FIG. 101.

---

donc, en substituant ici les valeurs précédentes de x et y, il viendra

$$(2) \qquad x' = (R + R'\cos\omega)\cos\alpha - R'\cos\frac{R\alpha}{R'}\cos\omega\cos\alpha + R'\sin\frac{R\alpha}{R'}\sin\alpha,$$

$$(3) \qquad y' = (R + R'\cos\omega)\sin\alpha - R'\cos\frac{R\alpha}{R'}\cos\omega\sin\alpha - R'\sin\frac{R\alpha}{R'}\cos\alpha.$$

Il resterait maintenant à éliminer l'arc α entre ces deux équations, pour obtenir celle de la courbe DMGF sur le plan horizontal; mais cette élimination ne pouvant s'effectuer que quand on aura fixé numériquement le rapport des raynns R, R', et que ce rapport sera un nombre commensurable, nnus garderons les deux équations (2) et (3) qui suffiront pour calculer les coordonnées x' et y' des divers points, en attribuant à α différentes valeurs successives.

Pour passer de là à l'épicycloïde plane, il suffira de poser $\cos\omega = \pm 1$, selon que le cercle mobile roulera au dehors ou au dedans du cercle fixe; et si, en nous arrêtant à ce dernier cas, nnus supposons d'ailleurs que R' est le quart de R, comme dans la *fig.* 5 de la planche 45, les équations (2) et (3) deviendront

$$(4) \qquad x' = \tfrac{3}{4}R\cos\alpha + \tfrac{1}{4}R\cos\alpha\cos 4\alpha + \tfrac{1}{4}R\sin\alpha\sin 4\alpha,$$

$$(5) \qquad y' = \tfrac{3}{4}R\sin\alpha + \tfrac{1}{4}R\sin\alpha\cos 4\alpha - \tfrac{1}{4}R\cos\alpha\sin 4\alpha;$$

puis, si l'on substitue dans ces dernières, les valeurs connues

$$\cos 4\alpha = 1 - 8\sin^2\alpha\cos^2\alpha, \quad \sin 4\alpha = 4\sin\alpha\cos\alpha(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha),$$

on trouvera, en supprimant les accents qui deviennent inutiles à présent,

$$x = R\cos^3\alpha, \quad y = R\sin^3\alpha.$$

Maintenant l'élimination de α est facile; car, en ajoutant ces équations après les avoir élevées à la puissance $\frac{2}{3}$, il restera pour l'épicyclmde représentée dans la *fig.* 5 de la planche 45,

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = R^{\frac{2}{3}}.$$

C'est donc un cas particulier de la développée de l'ellipse qui a pour éqnatinn

$$\left(\frac{x}{A}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{B}\right)^{\frac{2}{3}} = 1;$$

et ces deux courbes appartiennent à la famille des *storoïdes* qui sont représentées généralement par

$$\left(\frac{x}{A}\right)^{n} + \left(\frac{y}{B}\right)^{n} = 1.$$

dont le plan est tangent à ce dernier cône; dans ce cas particulier, l'épicycloïde décrite alors par un point M du cercle mobile, reçoit le nom de *développante sphérique*, attendu que la question revient à dire simplement que l'on fait rouler sur un cône fixe S'AO un de ses plans tangents S'AV, comme dans la *fig.* 9 de la planche 45, nous avions obtenu la spirale *développante du cercle* en faisant rouler sur cette circonférence une de ses tangentes.

FIG. 101. **494.** Comme la courbe en question est tout entière sur la sphère du rayon S'A, il suffira de construire sa projection horizontale. A cet effet, rabattons le cercle mobile dont le centre est au sommet (S', O), autour de la tangente AV qui lui est commune avec le cercle fixe; et sur ce rabattement S'' prenons un arc A*m* égal à l'arc AD, si l'on adopte D pour l'origine de la développante, c'est-à-dire pour la position qu'occupait le point générateur lorsqu'il se trouvait en contact avec le cône fixe. Alors *m* sera le rabattement de ce point générateur quand le contact est arrivé en A, et sa position véritable (M, M') se déduira aisément de là, en relevant le cercle S'' dans le plan tangent S'AV, autour de la charnière AV.

Lorsque le cercle mobile aura roulé jusqu'à toucher le cercle fixe en A_1, on imaginera que tout le système tourne simultanément, sans rouler, autour de la verticale S'O, pour amener le rayon OA_1 sur la ligne de terre OA; alors, en prenant l'arc $An = DA_1$, le point générateur se trouvera rabattu en *n*, et projeté en N et N' : mais ensuite, pour reporter le cercle mobile dans sa vraie position, on décrira avec le rayon ON une circonférence sur laquelle on prendra l'arc $NN_1 = II_1$. On trouvera ainsi la courbe DMN_1.... pour la projection horizontale de la développante sphérique.

495. *La tangente* au point quelconque (M, M') devra être menée perpendiculaire sur le plan des deux normales dont nous avons parlé au n° **488**, lesquelles sont les droites qui réunissent le point générateur (M, M') avec le centre (O, S') et avec le point de contact actuel A. Or ce *plan normal* coïncide évidemment avec le plan S'AV où est situé le cercle mobile et qui est tangent au cône fixe; donc il suffira de tirer MT perpendiculaire sur AV, et M'T' perpendiculaire sur S'A.

496. On doit apercevoir que la branche DMPGQF qui sera décrite au bout d'une révolution entière du cercle mobile, occupera sur la base du cône, un arc DAGF égal à l'excès de la circonférence S'' sur la circonférence O : mais en outre, il faut bien remarquer que cette branche se composera de deux parties réunies par un rebroussement au point G milieu de DGF, lequel est la projection de la position la plus élevée du point générateur. Pour se rendre compte

de cette circonstance, il suffit d'imaginer la nappe supérieure du cône S'AE prolongée jusqu'à ce qu'elle soit terminée par un cercle égal à celui du rayon OA, et observer que le cercle mobile S" se trouve dans un plan variable qui touche à la fois les deux nappes du cône, suivant une génératrice égale au diamètre de ce cercle S"; d'où il résulte que pendant qu'un certain arc A*m* de la circonférence mobile roule sur la base inférieure du cône, l'arc diamétralement opposé roule en même temps sur la base supérieure; et conséquemment, lorsque le point générateur *m* est arrivé au milieu de sa course, il se trouve en contact avec cette base supérieure, et il y produit un rebroussement tout à fait identique avec celui qui avait eu lieu au point de départ D sur la base inférieure du cône. Quant aux autres lignes que renferme cette épure, nous en parlerons au n° **669**.

CHAPITRE III.

Sur les sphères et les pyramides.

497. *Trouver l'intersection de trois sphères données.* Adoptons pour plan horizontal celui qui contient les centres A, B, C, des sphères proposées, et décrivons les grands cercles qui sont les traces horizontales de ces surfaces. Alors le cercle vertical projeté sur DE, sera évidemment l'intersection des deux sphères A et B, tandis que les sphères A et C se couperont suivant un autre cercle vertical FG; par conséquent ces deux circonférences auront pour intersections, les deux points projetés horizontalement en M, et ce seront aussi là les seuls points communs aux trois sphères en question. Pour achever de fixer la position de ces points dans l'espace, projetons-les sur un plan vertical quelconque XY; en rabattant le cercle DE autour de son diamètre horizontal, et tirant l'ordonnée M*m*, cette droite mesurera évidemment la hauteur de l'un des points cherchés au-dessus du plan horizontal; donc, en prenant au-dessus et au-dessous de XY, les distances IM' et IM" égales à M*m*, on obtiendra les projections (M, M') et (M, M") des deux points demandés. FIG. 102.

498. Si l'on avait cherché l'intersection des deux sphères B et C, on aurait obtenu un cercle vertical dont la projection HK aurait dû nécessairement passer aussi par le point M; d'où l'on peut conclure ce théorème de géométrie plane : *quand trois circonférences tracées dans un même plan, se coupent deux à*

deux, les points de section correspondants se trouvent situés sur des cordes qui passent toutes trois par un même point du plan.

FIG. 102 **499**. *Construire une pyramide triangulaire dont les six arêtes sont connues de grandeur.* On tracera d'abord, sur le plan horizontal, une des faces ABC de la pyramide, au moyen des trois arêtes données qui se rapportent à cette face; ensuite, on déterminera le quatrième sommet (M, M′) en cherchant, comme dans le problème précédent, l'intersection de trois sphères qui auraient pour centres les points A, B, C, et pour rayons les longueurs des trois autres arêtes assignées par la question. Il y aura évidemment deux pyramides symétriques l'une de l'autre, puisque le dernier sommet peut être placé en (M, M′) ou en (M, M″); et d'ailleurs on trouvera, par les méthodes du livre Ier, tout ce qui peut intéresser sur les angles plans, les angles dièdres, etc., de chacune de ces pyramides.

FIG. 103. **500**. *Circonscrire une sphère à une pyramide triangulaire donnée.* Soient (A, A′), (B, B′), (C, C′), (S, S′) les projections des quatre sommets, sur deux plans rectangulaires dont un renferme la face ABC; si ces projections n'étaient pas données immédiatement, elles se détermineraient comme au problème précédent. Le centre de la sphère cherchée, devant être à égale distance de ces quatre sommets, se trouvera à la fois dans les deux plans verticaux FO et GO, élevés perpendiculairement sur les milieux des arêtes AB et AC; donc ce centre sera quelque part sur la verticale (O, I′O′) intersection de ces plans. De même, il doit être contenu dans le plan élevé perpendiculairement sur le milieu d'une troisième arête appartenant à une autre face, telle que (SA, S′A′); donc si l'on prend la peine de construire les traces de ce plan, ainsi que le point où il ira couper la verticale (O, I′O′), on obtiendra le centre demandé: mais comme ces dernières opérations seraient un peu longues, à moins qu'on n'ait eu le soin de choisir le plan vertical parallèle à l'arête (SA, S′A′), on pourra les remplacer par la construction suivante.

En traçant avec le rayon OB, le cercle circonscrit au triangle ABC, cette circonférence qui appartiendra à la sphère demandée, sera coupée par le plan vertical SD parallèle à la ligne de terre, en un point (D, D′); donc la droite (SD, S′D′) sera *une corde* de la sphère, *parallèle au plan vertical*, et dès lors le centre de cette surface devra être situé dans le plan KL′ élevé perpendiculairement sur le milieu de cette corde. Or ce plan va couper la verticale (O, I′O′) point (O, O′); donc c'est là le centre de la sphère en question.

Quant au rayon de cette sphère, qui est évidemment (OB, O′B′), on ob-

tiendra sa véritable longueur en le rabattant parallèlement au plan vertical suivant $(Ob, O'b')$; donc si des points O et O', avec un rayon égal à $O'b'$, on décrit deux cercles, ce seront les contours apparents de la sphère demandée, qui est ainsi complétement déterminée de grandeur et de position.

501. *Inscrire une sphère dans une pyramide triangulaire donnée.* Prenons encore le plan d'une des faces ABC pour le plan horizontal, et soit (S, S') le sommet situé hors de ce plan. Si par l'arête AB nous menions un plan qui divisât en deux parties égales, l'angle dièdre formé par les faces SAB et CAB, ce plan *bissecteur* renfermerait évidemment tous les points de l'espace qui sont à égale distance de ces deux faces; donc la sphère demandée qui doit toucher chacune de celles-ci, aurait son centre situé nécessairement dans ce plan bissecteur. De même, deux autres plans bissecteurs menés suivant les arêtes AC et BC, de manière à diviser en deux parties égales les angles dièdres qui ont ces droites pour arêtes, contiendraient aussi le centre cherché; par conséquent ce centre est à l'intersection de ces trois plans bissecteurs, c'est-à-dire au sommet de la *pyramide intérieure* qu'ils forment avec la base primitive ABC : ainsi la question est ramenée à trouver le sommet de cette nouvelle pyramide, ou bien les trois arêtes qui y aboutissent. Fig. 104.

Pour cela, mesurons d'abord l'angle dièdre SABC, en le coupant par un plan vertical SD perpendiculaire à AB, et rabattons sur le plan vertical la section ainsi faite, laquelle deviendra évidemment l'angle $S'D''H$; construisons de même les angles $S'E''H$ et $S'F''H$ qui mesurent les angles dièdres AC et BC; puis, divisons ces trois angles plans chacun par moitiés, au moyen des droites $D''I$, $E''L$, $F''K$; alors ces trois droites ramenées dans les plans verticaux SD, SE, SF, appartiendraient aux faces de la pyramide intérieure qui a aussi pour base le triangle ABC. Par conséquent, si l'on coupe ces droites par un plan horizontal quelconque $X'Y'$, on obtiendra trois points δ'', ε'', φ'', qui ramenés en δ, ε, φ, appartiendront à la section triangulaire *abc* faite par le plan $X'Y'$ dans la pyramide intérieure; donc ce triangle *abc* est maintenant facile à tracer, puisque ses trois côtés doivent être évidemment parallèles à ceux de ABC. Alors si l'on tire les droites Aa, Bb, Cc, ce seront les arêtes latérales de la pyramide intérieure, et elles devront aller se couper en un point unique O, qui sera la projection horizontale du centre de la sphère demandée.

Quant à la projection verticale O' de ce même centre, elle s'obtiendra en projetant le point O sur l'arête $C'c'$ de la pyramide intérieure; et le rayon de

la sphère sera la perpendiculaire O′B′ abaissée du centre sur la face inférieure. Donc, en traçant avec cette droite O′B′ deux cercles dont les centres soient en O et O′, on aura les projections de la sphère cherchée.

502. Si l'on désire connaître les points de contact de cette sphère avec les faces latérales, on pourra facilement construire les traces du plan indéfini qui contient la face SAC par exemple; puis, on abaissera du point (O, O′) une perpendiculaire sur ce plan, par la méthode générale du n° 35. Mais il sera bien plus court d'observer qu'un plan perpendiculaire à AC, et mené par le point O, couperait la sphère et la face SAC, suivant un grand cercle et une droite qui lui serait tangente; d'ailleurs, cette droite rabattue sur le plan vertical, autour de (O, O′B′), deviendrait évidemment parallèle à S′E″. Si donc, sans tracer cette parallèle on abaisse du point O′ un rayon perpendiculaire sur S′E″, ce rayon ira couper le contour vertical de la sphère, en un point qui sera le rabattement du point de contact cherché; et il sera facile ensuite de ramener ce point dans sa véritable position.

Fig. 104. **503.** Les considérations employées au n° **501**, peuvent servir à résoudre ce problème général : *trouver une sphère qui soit tangente à quatre plans donnés.* En effet, les quatre faces de la pyramide SABC, étant prolongées indéfiniment, formeront autour des arêtes AB, AC, BC, trois angles dièdres *extérieurs* et supplémentaires de ceux que nous avons employés ci-dessus, et ces nouveaux angles auront pour mesures S′D″B′, S′E″C′, S′F″C′. Donc, si l'on divise ces derniers en deux parties égales, par des droites qui couperont le plan X′Y′ en des points analogues à δ'', ε'', φ'', on pourra combiner trois à trois ces divers points, pour former plusieurs triangles tels que *abc*; et ceux-ci conduiront à divers centres, tels que (O, O′). Par exemple, adoptons la droite D″*d*″ qui divise par moitiés l'angle *extérieur* S′D″B′, et qui rencontre le plan X′Y′ au point *d*″ que l'on ramènera en *d* sur le plan horizontal; puis, conservons les deux anciens points ε et φ; alors nous obtiendrons le triangle *ca″b″* dont les sommets, étant joints avec A, B, C, fourniront le point (O″, O‴) pour le centre d'une sphère qui touchera la face SAB *en dehors* de la pyramide primitive, tandis qu'elle sera tangente aux trois autres faces prolongées à droite de SAB. De cette manière, on trouvera généralement *huit* sphères tangentes aux quatre plans indéfinis qui contiennent les faces de la pyramide SABC; car, en désignant par α, α', α'', les trois angles dièdres *intérieurs*, et par ω, ω', ω'', les trois angles dièdres *extérieurs*, qui ont pour arêtes les côtés AB, AC, BC, on pourra évidemment adopter pour centre de la sphère demandée, le point d'intersection des trois *plans bissecteurs* qui diviseront les angles dièdres compris dans chacune des combinaisons sui-

vantes :

$\alpha, \alpha', \alpha''$	$\alpha, \alpha', \omega''$	$\alpha, \omega', \omega''$	$\omega, \omega', \omega''$.
	$\alpha, \alpha'', \omega'$	$\alpha', \omega, \omega''$	
	$\alpha', \alpha'', \omega$	$\alpha'', \omega, \omega'$	

On sentira aisément pourquoi il faut exclure toute combinaison où entreraient deux angles adjacents à la même arête, comme α et ω; et d'ailleurs le nombre des solutions pourra devenir moindre, suivant les inclinaisons des quatre plans donnés. Cette question est analogue au problème de la géométrie plane, dans lequel on propose de trouver un cercle qui soit tangent à trois droites connues.

504. *Construire un point dont on connaît les distances à trois points donnés*, ou bien *à trois plans connus*, ou enfin *à trois droites données*.

1°. Désignons les points donnés par A, B, C, et leurs distances respectives au point inconnu x, par $\alpha, 6, \gamma$. Alors, en imaginant une sphère qui ait son centre en A et pour rayon la distance α, le point x devra évidemment se trouver quelque part sur la surface de cette sphère ; il sera pareillement sur deux autres sphères qui auraient leurs centres en B, C, et pour rayons les longueurs 6, γ; par conséquent la question revient à trouver *l'intersection de trois sphères données*, problème que nous avons résolu au n° **497**.

2°. Si l'on désigne à présent par P, P′, P″ les plans donnés, et par $\delta, \delta', \delta''$, leurs distances au point inconnu x, ce dernier devra être à la fois dans trois plans p, p', p'', respectivement parallèles à P, P′, P″, et éloignés de ceux-ci de quantités égales à $\delta, \delta', \delta''$. Donc, en construisant les plans p, p', p'', d'après les méthodes du livre Ier, la question se réduira à trouver l'intersection de trois plans connus, problème que le lecteur saura aisément résoudre. Observons seulement que, comme le plan p, par exemple, pourra être mené à la distance δ, soit au-dessus, soit au-dessous de P, il y aura ainsi *huit solutions* pour la position du point demandé x.

3°. Soient enfin A, B, C, trois droites données, dont le point inconnu x est éloigné des quantités $\alpha, 6, \gamma$. Si l'on imagine un cylindre de révolution qui ait pour axe la ligne A, et pour *section droite* un cercle du rayon α, cette surface cylindrique contiendra nécessairement le point x. De même, ce point se trouvera aussi sur deux autres cylindres de révolution, qui auront pour axes et pour rayons B et 6, C et γ; par conséquent la question est réduite à trouver tous les points communs à ces trois cylindres. Or, en supposant que les traces horizontales de ces trois surfaces ont été construites comme nous allons l'ex-

pliquer plus bas, il n'y aura plus qu'à chercher, par la méthode du n° **288**, la courbe d'intersection du cylindre A avec le cylindre B, puis celle des cylindres A et C; et ces deux courbes, qui pourront se couper au plus dans *huit* points, attendu que les trois surfaces sont évidemment du second degré, feront connaître par leurs rencontres les diverses positions que peut avoir le point demandé x. Toutefois, observons que pour obtenir les points vraiment communs aux deux courbes dans l'espace, il ne faudra prendre, parmi les sections des deux projections horizontales, que les points qui correspondront exactement à des sections sur le plan vertical; c'est-à-dire que ces points devront être deux à deux sur des perpendiculaires à la ligne de terre. D'ailleurs on pourra, comme vérification, construire aussi la courbe d'intersection des cylindres B et C, laquelle devra encore passer par les points communs aux deux premières courbes.

FIG. 105. **505.** Quant à la manière de trouver la trace horizontale de chaque cylindre, représentons sur deux plans de projection, l'axe de l'un d'entre eux par (AF, A'F'). En faisant tourner cette droite autour de la verticale A, pour la rabattre parallèlement au plan vertical, elle deviendra (Af, Af'); et alors la section circulaire du cylindre se projettera suivant une droite G'H' égale à 2α et perpendiculaire sur $A'f'$. Donc le contour apparent du cylindre sera fourni par les droites G'K', H'L', parallèles à $A'f'$, et la trace horizontale de cette surface dans la position actuelle, sera une ellipse ayant évidemment pour grand axe, la distance L'K'. Par conséquent, si l'on ramène les points K' et L' en a et d, la droite ad et sa perpendiculaire $bAe = 2\alpha$, seront les axes de l'ellipse suivant laquelle le cylindre primitif coupait le plan horizontal; de sorte que cette courbe sera maintenant facile à construire.

506. « *Un ingénieur* (*) *parcourant un pays de montagnes, est muni d'une carte topographique sur laquelle sont marquées exactement les projections des différents points du terrain, ainsi que les cotes qui indiquent les hauteurs de ces points au-dessus d'une même surface de niveau. Il rencontre un point remarquable qui n'est pas marqué sur la carte, et il ne porte avec lui d'autre instrument propre à mesurer les angles, qu'un graphomètre garni d'un fil-à-plomb. On demande que sans quitter la station, l'ingénieur construise sur la carte le point où il est, et qu'il trouve la cote qui convient à ce point, c'est-à-dire sa hauteur au-dessus de la surface de niveau.*

» Parmi les points du terrain marqués d'une manière précise sur la carte, et

(*) Cet article et le suivant sont extraits de la Géométrie descriptive de *Monge*.

qui seront les plus voisins, l'ingénieur en distinguera trois, dont deux au moins ne soient pas à la même hauteur que lui; puis, il observera les angles formés par la verticale et les rayons visuels dirigés à ces trois points, et d'après cette seule observation, il pourra résoudre la question.

» En effet, nommons A, B, C, les trois points observés dont il a les projections horizontales sur la carte, et dont il pourra construire les projections verticales au moyen de leurs cotes. Puisqu'il connaît l'angle formé par la verticale et par le rayon visuel dirigé au point A, il connaît aussi l'angle formé par le même rayon avec la verticale élevée aû point A; car en négligeant la courbure de la terre, ce qui est convenable ici, ces deux angles sont alternes-internes, et par conséquent égaux. Si donc il conçoit une surface conique à base circulaire, dont le sommet soit au point A, dont l'axe soit vertical, et dont l'angle formé par l'axe et par la droite génératrice soit égal à l'angle observé, ce qui détermine complétement cette surface, elle passera par le rayon visuel dirigé au point A, et conséquemment par le point de la station : ainsi, il aura une première surface courbe déterminée, sur laquelle se trouvera le point demandé. En raisonnant pour les deux autres points B, C, comme pour le premier, le point demandé se trouvera encore sur deux autres surfaces coniques à bases circulaires, dont les axes seront verticaux, dont les sommets seront aux points B, C, et pour chacune desquelles l'angle formé par l'axe avec la génératrice, sera égal à l'angle formé par la verticale avec le rayon visuel correspondant. Le point demandé sera donc en même temps sur trois surfaces coniques, déterminées de forme et de position, et par conséquent dans leur intersection commune. Il ne s'agit donc plus que de construire, d'après les données de la question, les projections horizontales et verticales des intersections de ces trois surfaces, considérées deux à deux (*); les intersections de ces projections donneront les projections horizontale et verticale du point demandé, et par conséquent la position de ce point sur la carte, et sa hauteur au-dessus ou au-dessous des points observés, ce qui déterminera sa cote.

» Cette solution doit en général produire huit points qui satisfont à la question; mais il sera facile à l'observateur de distinguer parmi ces huit

(*) L'intersection de deux de ces cônes se construira par la méthode du n° 297; ou mieux encore, en les coupant par divers plans horizontaux; car les sections seront des cercles, dont les centres se projetteront au même point que le sommet, et dont les rayons se trouveront marqués sur le plan vertical.

points, celui qui coïncide avec le point de la station. D'abord, il pourra toujours s'assurer si le point de la station est au-dessus ou au-dessous du plan qui passe par les trois points observés : supposons que ce point soit au-dessus du plan des sommets des cônes, il sera autorisé à négliger les branches des intersections des surfaces coniques qui existent au-dessous de ce plan, et par-là le nombre des points possibles sera réduit à quatre : ce serait la même chose si le point de la station était au contraire placé au-dessous du plan. Ensuite, parmi ces quatre points, s'ils existent tous, il reconnaîtra facilement celui dont la position par rapport aux trois sommets, est la même que celle du point de la station, par rapport aux points observés. »

507. « *Les circonstances étant les mêmes que dans la question précédente, avec cette seule différence que l'instrument n'est pas garni de fil-à-plomb, de manière que les angles avec la verticale ne puissent pas être mesurés, on demande encore que l'ingénieur, sans quitter la station, détermine sur la carte la position du point où il est et qu'il trouve la cote de ce point, c'est-à-dire son élévation au-dessus de la surface de niveau à laquelle tous les points de la carte sont rapportés.*

» Après avoir choisi trois points du terrain qui soient marqués d'une manière précise sur la carte, et tels que le point de station ne soit pas avec eux dans le même plan, l'ingénieur mesurera les trois angles que forment entre eux les rayons visuels dirigés à ces trois points ; et au moyen de cette seule observation, il sera en état de résoudre la question.

» En effet, si nous nommons A, B, C, les trois points observés, et si on les suppose joints par les trois droites AB, BC, CA, l'ingénieur aura les projections horizontales de ces droites tracées sur la carte ; de plus, au moyen des cotes des trois points, il aura les différences de hauteur des extrémités de ces droites ; il pourra donc avoir la grandeur de chacune d'elles.

FIG. 106. » Cela posé, si dans un plan quelconque mené par AB, on conçoit un triangle rectangle BAD construit sur AB comme base, et dont l'angle en B soit le complément de l'angle sous lequel le côté AB a été observé, l'angle en D sera égal à l'angle observé, et la circonférence de cercle décrite par les trois points A, B, D, jouira de la propriété, que si d'un point quelconque de l'arc ADB on mène deux droites aux points A et B, l'angle qu'elles comprendront entre elles sera égal à l'angle observé. Si donc on conçoit que le plan du cercle tourne autour de AB comme charnière, l'arc ADB engendrera une surface de révolution dont tous les points jouiront de la même propriété ; c'est-à-dire que si d'un point quelconque de cette surface, on mène deux droites aux points A et B, ces droites formeront entre elles un angle égal à

l'angle observé. Or il est évident que les points de cette surface de révolution sont les seuls qui jouissent de cette propriété; donc la surface passera par le point de la station. Si l'on raisonne de la même manière pour les deux autres droites BC, CA, on aura deux autres surfaces de révolution, sur chacune desquelles se trouvera le point de la station; ce point sera donc en même temps sur trois surfaces de révolution différentes, déterminées de forme et de position; il sera donc un point de leur intersection commune. Ainsi, en construisant les projections horizontales et verticales des intersections de ces trois surfaces considérées deux à deux, les points où les projections se couperont elles-mêmes toutes trois, seront les projections du point qui satisfait à la question. »

508. A la vérité, si pour effectuer ces constructions par la méthode du n° **333**, on adopte le plan du triangle ABC pour le plan horizontal de l'épure, et que l'on dirige le plan vertical perpendiculairement à un des côtés, AB par exemple, on n'obtiendra ainsi que la projection du point demandé sur le plan ABC et sa hauteur au-dessus ou au-dessous de ce plan; mais comme ce dernier a lui-même une position connue par rapport à la surface de niveau à laquelle tous les points de la carte sont rapportés, il sera bien facile de retrouver ensuite la projection de la station sur le plan même de la carte, et sa hauteur au-dessus de ce plan.

509. Observons aussi que si l'on voulait résoudre ce problème analytiquement, en combinant les équations des trois surfaces de révolution décrites par les arcs ADB, BEC, CFA, on obtiendrait beaucoup de solutions qui seraient étrangères à la question; car l'analyse ne séparerait pas la nappe décrite par l'arc ADB, de celle que décrirait l'arc A*d*B; mais une seule équation embrasserait ces deux nappes à la fois. Cependant, puisqu'ici les angles compris entre les rayons visuels sont donnés par l'observation, on sent bien qu'il n'est pas permis d'adopter indifféremment l'angle ADB, ou son supplément A*d*B. Par conséquent on devra, dans les opérations graphiques, négliger entièrement les branches de courbes et les points qui seraient fournis par les nappes *supplémentaires*, engendrées par la révolution des trois arcs A*d*B, B*e*C et A*f*C.

LIVRE VII.

DES SURFACES GAUCHES.

CHAPITRE PREMIER.

Notions générales sur les surfaces gauches.

510. Toutes les surfaces qui peuvent être engendrées par le mouvement d'une ligne droite, sont désignées généralement sous le nom de SURFACES RÉGLÉES, parce qu'on peut évidemment les exécuter sur un corps solide, au moyen d'une *règle*, avantage qui en rend l'usage très-fréquent dans les arts; mais on doit les partager en deux classes bien distinctes, selon que la loi qui dirige le mouvement de la génératrice rectiligne, satisfait ou non, à la condition que deux positions consécutives de la droite mobile soient situées dans un même plan. Lorsque cette condition est remplie, la surface réglée est DÉVELOPPABLE, et un même plan la touche tout le long de la génératrice, comme nous l'avons prouvé aux n^{os} **175** et **177**. Or, tout ce qui regarde la détermination du plan tangent, la construction des génératrices et le développement d'une telle surface, ayant été suffisamment expliqué dans les livres précédents, et notamment par l'exemple général du n° **465**, nous ne reviendrons plus sur ces questions; et ici nous nous occuperons seulement des SURFACES GAUCHES, c'est-à-dire des surfaces *engendrées par une droite qui se meut de telle sorte que deux positions consécutives*, quelque rapprochées qu'on les suppose, *ne sont pas dans un même plan.*

Fig. 107. **511.** Avant d'indiquer diverses manières de réaliser la condition précédente, nous ferons observer qu'il en résultera toujours que *l'élément superficiel* indéfini en longueur, et compris entre les deux génératrices infiniment voisines G et G′, sera lui-même *gauche;* car, pour toutes les courbes A, B, C,.... que l'on tracera sur la surface, les éléments linéaires LL′, MM′, NN′,....., qui sont des droites ayant chacune deux points communs avec G et G′, ne pourront être situés dans un même plan, dès que ces deux géné-

ratrices n'y sont pas. En outre, comme les tangentes LL'T, MM'U, NN'V,...., qui sont les prolongements de ces éléments linéaires, se trouveront ainsi dans des plans différents, il arrivera nécessairement que *les plans tangents* GLT, GMU, GNV,....., *relatifs aux divers points* L, M, N,..... *d'une même génératrice, seront distincts les uns des autres,* quoiqu'ils renferment tous la génératrice GLMN.

512. De là il résulte encore que, dans une surface gauche, chaque plan tel que GLT, quoique véritablement *tangent* en L, c'est-à-dire renfermant les tangentes à toutes les courbes tracées sur la surface par ce point, devient *sécant* dans tous les autres points qui lui sont communs avec elle; et son intersection se composera d'abord de la génératrice GLM elle-même, puis d'une seconde branche passant par le point L, et qui peut être *rectiligne* ou *curviligne*, suivant la forme de la surface gauche en question.

513. Voyons, maintenant, de quelle manière nous pourrons réaliser la condition (n° **510**) qui caractérise les surfaces gauches. Si nous assujettissons la droite mobile à glisser seulement sur *une*, ou même sur *deux courbes directrices* A et B, invariables de forme et de position, le mouvement de cette droite ne sera pas complétement déterminé; puisque pour chaque point L choisi à volonté sur A, la génératrice rectiligne pourra prendre une infinité de positions, situées toutes sur le cône qui aurait pour base B et pour sommet le point L. Deux courbes ne suffisent donc pas pour diriger le mouvement d'une droite; à moins qu'on n'impose, en outre, la condition que la surface engendrée soit *développable*, comme on l'a vu n° **180**; mais cette condition est précisément celle que nous voulons écarter ici.

Assujettissons donc la droite mobile à glisser constamment sur trois courbes directrices A, B, C, et nous allons voir que ces conditions suffisent pour régler complétement le mouvement de cette génératrice. En effet, si l'on imagine deux cônes qui auraient pour sommet commun le point L pris à volonté sur A, et pour bases l'un la directrice B, l'autre la directrice C, on pourra aisément construire les traces de ces surfaces coniques sur un des plans de projection; et en joignant les points de section de ces deux traces avec le sommet commun L, on obtiendra une ou plusieurs droites, mais *en nombre fini*, qui comme GLMN, s'appuieront évidemment sur les trois courbes A, B, C, puisqu'elles seront les intersections des deux cônes passant par B et par C. Ces droites seront donc les positions déterminées que doit prendre la génératrice mobile, lorsqu'en glissant sur A, elle arrive au point L; et pour d'au- FIG. 107.

tres points L', L'',.... on construira semblablement les positions de cette génératrice.

Au lieu d'employer deux surfaces coniques dont il faut chercher les traces, il sera souvent plus commode de construire l'intersection du premier cône LBM, avec le cylindre vertical qui projettera la directrice C sur le plan horizontal. Par-là, on obtiendra une courbe auxiliaire dont la rencontre avec la projection verticale de C, fera connaître le point qu'il faut joindre avec L, pour avoir une position de la génératrice.

514. D'ailleurs, la surface ainsi engendrée *sera gauche*, en général; car, lorsque la droite mobile passera d'une position GLMN à une autre G'L'M'N' infiniment voisine, elle pourra être censée glisser sur les trois tangentes LT, MU, NV, qui ont avec les directrices les éléments communs LL', MM', NN'; donc, si ces tangentes ne sont pas situées toutes trois dans un seul et même plan, les deux génératrices G et G' n'y seront pas non plus. Or, pour que ces tangentes se trouvassent dans un même plan, et surtout pour que la même circonstance se reproduisît à chaque système de points (L, M, N), (L', M', N'), (L'', M'', N''),.... situés trois à trois en ligne droite, il est clair qu'il faudrait faire un choix tout particulier dans la forme et la position des directrices A, B, C; par conséquent, en général, *la surface décrite par une droite mobile qui s'appuie constamment sur trois courbes fixes, est gauche.*

Mais une telle surface peut offrir *une ligne singulière*, le long de laquelle il existera un élément *plan*, indéfini en longueur; c'est ce qui arriverait dans le cas où, pour un certain point L, les deux cônes dont nous avons parlé au numéro précédent, auraient leurs traces tangentes l'une à l'autre. Alors, la génératrice menée de L à ce point de contact pourrait, sans quitter le point L, glisser sur la tangente commune aux deux traces, et elle décrirait ainsi un élément particulier qui serait plan. Cela revient à supposer que les deux tangentes MU et NV sont dans un même plan; et à plus forte raison en serait-il de même, si les trois tangentes en L, M, N se trouvaient dans un plan unique.

FIG. 108. **515.** On peut encore *assujettir la droite mobile* G *à glisser constamment sur deux courbes fixes* A *et* B, *en demeurant toujours parallèle à un plan donné* P que l'on nomme *le plan directeur*. Pour construire ici les positions de la génératrice, il suffira de couper les courbes A et B (n° **233**) par divers plans parallèles à P; et en joignant par une droite les deux points de section de chaque plan, on aura des lignes GLM, G'L'M',..... qui satisferont évidemment aux conditions imposées à la génératrice. La surface lieu de toutes ces droites,

sera encore gauche en général, parce que les tangentes LL'T, MM'U, sur lesquelles s'appuie la droite G lorsqu'elle passe à la position infiniment voisine G', ne se trouveront pas ordinairement dans un même plan.

Au reste, ce genre de surfaces gauches rentre dans le précédent, lorsqu'on imagine que la troisième directrice C est située à l'infini, dans le plan P.

516. Dans toutes les surfaces réglées, on peut remplacer les courbes directrices par des *surfaces directrices* auxquelles la droite mobile devra être tangente. Par exemple, si l'on assigne une courbe A et une surface S pour diriger la génératrice, avec un plan P auquel cette droite mobile devra rester parallèle, on mènera par chaque point L pris sur A, un plan parallèle à P, lequel coupera la surface S suivant une courbe à laquelle on conduira des tangentes partant de L; ce seront bien là des positions de la génératrice demandée, et la surface réglée ainsi produite, sera en général gauche. D'ailleurs, elle *touchera* S tout le long de la courbe formée par les points de contact α, β, γ,.... des tangentes dont nous venons de parler; car, pour la surface gauche comme pour la surface S, le plan tangent renfermera la génératrice rectiligne et la tangente de la courbe $\alpha\beta\gamma$ qui est commune aux deux surfaces.

Si l'on donnait deux surfaces S et S' avec un plan directeur P, on couperait ces surfaces par divers plans parallèles à P, et l'on mènerait une tangente commune aux deux sections produites par chacun de ces plans sécants.

517. Lorsque la surface réglée n'admet point de *plan directeur*, on peut encore remplacer une ou plusieurs des trois courbes directrices A, B, C, par des surfaces auxquelles la génératrice devra être tangente. Supposons, en effet, que l'on assigne pour diriger le mouvement de cette droite, les courbes A et B avec une surface S; pour chaque point L pris sur A, il faudra construire deux cônes ayant leurs sommets communs en L, et dont l'un aurait pour base la courbe B, tandis que l'autre serait circonscrit à la surface S (n° 347); les intersections de ces deux cônes, qui seront nécessairement des droites, fourniront les positions de la génératrice lorsqu'elle passe par le point L. Quand la surface S se trouvera développable, il sera plus court de lui mener un plan tangent qui coupe les deux courbes A et B en des points que l'on réunira par une droite; ce sera bien là une position de la génératrice.

Si l'on donne une seule courbe A avec deux surfaces directrices S et S', il faudra combiner ensemble deux cônes circonscrits l'un à S, l'autre à S', et dont le sommet commun serait en un point L de la ligne A.

518. Lorsqu'on assignera seulement trois surfaces S, S', S'', auxquelles la droite mobile devra rester constamment tangente, la construction des diverses

positions de cette génératrice sera beaucoup plus laborieuse; mais on y parviendra en ramenant la question à l'un des cas précédents. En effet, si nous connaissions une droite G qui touchât la surface S en un certain point α, S′ en α', et S″ en α''; puis, que nous fissions glisser cette ligne $G\alpha\alpha'\alpha''$ sur les deux surfaces S et S′, en l'assujettissant d'ailleurs à demeurer parallèle à un plan directeur P, nous obtiendrions par la méthode du n° **516**, une surface auxiliaire Σ qui couperait S″ suivant une certaine courbe $\alpha''\beta''\gamma''$ passant par le point α'', et à laquelle la droite G serait nécessairement tangente en ce point; car G se trouve évidemment dans le plan tangent de S″, et dans celui qui touche la surface gauche Σ au point α''. Par conséquent, si l'on commence par construire la surface auxiliaire Σ qui a pour directrices S, S′, et le plan P; puis, si l'on détermine son intersection $\alpha''\beta''\gamma''$ avec la surface S″, il n'y aura plus qu'à mener à la courbe $\alpha''\beta''\gamma''$, une tangente qui soit parallèle au plan P, et cette tangente sera la position d'une génératrice G de la surface demandée qui a pour directrice S, S′, S″. Pour obtenir d'autres positions de cette génératrice, on fera varier la direction du plan P.

519. On peut encore diriger le mouvement de la droite qui engendre une surface réglée, en assignant deux courbes directrices A et B, avec la condition que *la génératrice coupe l'une d'elles sous un angle constant* et donné; ou bien, que *la portion de cette génératrice comprise entre* A *et* B, *conserve une longueur fixe*. On peut aussi faire glisser la droite mobile *le long d'une seule courbe* A *tracée sur une surface fixe* S, *à laquelle la génératrice devrait rester normale*, etc., etc. Mais toutes ces variétés de surfaces réglées, pour lesquelles il sera facile d'imaginer un mode de construction approprié aux conditions que chaque problème imposera, n'offrent pas assez d'intérêt pour que nous les discutions en détail; et d'ailleurs elles ne forment pas, au fond, des genres vraiment distincts, puisqu'on peut toujours les concevoir ramenées à celles du n° **513**, en adoptant pour directrices de la droite mobile, trois sections faites à volonté dans la surface.

520. Pour compléter ces notions générales, nous ajouterons que l'on donne le nom particulier de CONOÏDES, aux surfaces gauches qui admettent un plan directeur P avec deux directrices dont *une est rectiligne* : l'autre directrice peut être une courbe ou une surface. Le conoïde serait dit *droit*, si la directrice rectiligne était perpendiculaire au plan P (*voyez* n° **596**).

Lorsque les deux directrices sont l'une et l'autre des droites, le conoïde prend le nom de *paraboloïde hyperbolique*, ou de *conoïde du second degré*, parce que c'est le seul dont l'équation ne s'élève pas au-dessus de cet ordre.

Enfin, lorsqu'une surface réglée qui n'admet pas de plan directeur, a pour directrices *trois droites* quelconques, elle reçoit le nom d'*hyperboloïde à une nappe :* cet hyperboloïde et le paraboloïde dont nous venons de parler, se désignent encore simultanément sous le nom de *surfaces gauches du second degré*, parce que l'analyse montre que ce sont les seules surfaces de cette nature, dont l'équation ne s'élève pas au-delà du second ordre. Nous allons commencer par considérer ces deux genres particuliers, qui offrent des propriétés fort remarquables, et nécessaires à connaître pour étudier les autres surfaces gauches.

CHAPITRE II.

De l'hyperboloïde à une nappe.

521. Nous appellerons ainsi, la surface particulière engendrée par *une droite mobile* A *qui s'appuie constamment sur trois droites fixes* B, B', B", *non parallèles à un plan unique*, et dont *deux quelconques ne se trouvent pas dans un même plan;* parce qu'il sera démontré plus loin (n° **535**) que cette surface est identique avec celle que nous avons déjà désignée sous ce nom au n° **83**. La construction des génératrices s'effectuera par le procédé général du n° **513**, qui deviendra ici très-simple, puisque les surfaces coniques auxiliaires se réduiront à des plans : ainsi, après avoir pris un point arbitraire L sur la directrice B, on conduira par ce point deux plans dont l'un passe par B', et l'autre par B"; puis, en cherchant l'intersection de ces deux plans, on obtiendra une droite ALMN qui s'appuiera évidemment sur les trois directrices assignées. On arriverait au même résultat, en construisant l'intersection de la directrice B" avec le seul plan mené par L et la droite B', et en joignant ce point de section au point L. Ce procédé, appliqué successivement à d'autres points L' L",.... de la droite B, fournira les diverses génératrices A, A', A", A",.... de l'hyperboloïde en question; et comme chacune ne peut évidemment occuper qu'une position unique, lorsqu'elle passe par un point donné L ou L', il s'ensuit que le mouvement de la droite mobile est *complétement déterminé* par la condition de s'appuyer sur les trois directrices assignées. Fig. 109.

522. Cette surface est nécessairement *gauche;* car deux génératrices quelconques A et A' ne pourraient se trouver dans un même plan, qu'autant que

les droites B, B′, B″, dont chacune a deux points communs avec A et A′, seraient elles-mêmes situées dans ce plan unique; ce qui est contraire aux conditions formellement imposées dans la définition du n° **521**. D'ailleurs, ce raisonnement n'exigeant pas que les deux droites A et A′ soient ici infiniment voisines, comme on le suppose pour une surface gauche générale (n° **510**), il en résulte que dans l'hyperboloïde, *deux génératrices quelconques ne sont jamais dans un même plan.*

Fig. 110. **523.** Si, parmi les trois directrices B, B′, B″, que l'on suppose n'être point parallèles à un plan unique, il y en avait *deux* qui fussent *dans un même plan* B′CB″, la droite mobile A ne pourrait satisfaire aux conditions imposées, que des deux manières suivantes : 1° en passant constamment par le point de section C et en glissant sur B, ce qui lui ferait décrire le plan CDB; 2° en tournant dans le plan B′CB″, autour du point D où il est rencontré par la droite B. Donc, alors, la surface décrite serait le système de *deux plans* qui se couperaient. Mais cette variété de l'hyperboloïde, qui est analogue au cas d'une hyperbole réduite à ses asymptotes, ne présentant aucune recherche nouvelle, nous continuerons à exclure dorénavant l'hypothèse toute particulière que deux des directrices soient dans un même plan.

Fig. 109. **524.** L'hyperboloïde à une nappe jouit d'une propriété bien remarquable, et fort importante pour la détermination des plans tangents aux surfaces gauches générales : c'est qu'il admet un second mode de génération par la ligne droite, dans lequel les premières génératrices deviennent directrices, et réciproquement. C'est-à-dire que *si l'on fait glisser une droite mobile sur trois quelconques des droites* A, A′, A″, A‴,.... que nous venons de construire, *cette nouvelle génératrice* qui coïncidera évidemment dans trois de ses positions, avec B, B′ et B″, *décrira une surface* IDENTIQUE *avec le premier hyperboloïde,* tant pour la forme que pour la position. Mais avant de démontrer cette belle propriété, nous rappellerons deux théorèmes connus de la *théorie des transversales.*

Fig. 111. **525.** Lemme Ier. Lorsque dans un triangle ABC, on mène une transversale quelconque PQR qui, en coupant les trois côtés ou leurs prolongements, forme six segments, *le produit de trois segments non contigus est égal au produit des trois autres segments*; c'est-à-dire que l'on a

$$AP.CR.BQ = AQ.BR.CP. \qquad (1)$$

En effet, menons la droite BH parallèle à PQR, et nous aurons évidemment

les proportions

$$AQ : QB :: AP : PH = \frac{AP.QB}{AQ},$$
$$CR : BR :: CP : PH = \frac{CP.BR}{CR};$$

puis, en égalant les deux valeurs de PH, on obtiendra la formule (x).

526. Lemme II. Si dans un quadrilatère *gauche* ABCD, on trace deux droites MN et PQ qui, en s'appuyant chacune sur deux côtés opposés, ou sur leurs prolongements, se coupent elles-mêmes en un certain point O, *le produit de quatre segments non contigus sera toujours égal au produit des quatre autres segments;* c'est-à-dire que l'on aura Fig. 112 et 113.

$$AP . BN . CQ . DM = AM . DQ . CN . BP. \qquad (y)$$

D'abord, observons que si les deux transversales MN et PQ se coupent effectivement, elles doivent être dans un même plan, lequel contiendra les droites PN et MQ qui, par conséquent, iront se couper en un certain point R; mais comme ces droites PN et MQ se trouvent, l'une dans le plan du triangle ABC, l'autre dans le plan du triangle ADC, et que ces plans se coupent suivant la diagonale AC, il faudra que le point de rencontre R des lignes PN et MQ, soit placé précisément sur cette diagonale. D'où il suit que pour obtenir, dans un quadrilatère gauche, deux transversales opposées qui se coupent réellement, on peut prendre à volonté l'une d'entre elles MN, et choisir arbitrairement le point P de la seconde; mais ensuite, on devra tracer la droite PNR qui ira couper la diagonale AC en un point R, puis tirer RM qui déterminera la position du point Q qu'il faudra joindre avec P.

Cela posé, les triangles ABC et ADC, coupés par les transversales PNR et MQR, donnent, d'après le lemme précédent,

$$AP . BN . CR = AR . CN . BP,$$
$$CQ . DM . AR = CR . DQ . AM;$$

d'où, en multipliant ces égalités membre à membre, et supprimant les facteurs communs, on déduit la relation annoncée,

$$AP . BN . CQ . DM = AM . DQ . CN . BP; \qquad (y)$$

laquelle peut s'écrire ainsi :

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{CQ}{QD} = \frac{AM}{MD} \cdot \frac{CN}{NB}. \qquad (z)$$

527. Réciproquement, si deux droites PQ et MN coupent les côtés opposés d'un quadrilatère gauche ABCD, de telle sorte que la formule (y) soit vérifiée, ces deux transversales sont dans un même plan. En effet, si cela n'était pas, on pourrait mener par le point P une droite PQ′ qui couperait MN; et alors on aurait

$$AP.BN.CQ'.DM = AM.DQ'.CN.BP,$$

équation incompatible avec (y) que l'on suppose vérifiée, puisque si CQ′ est plus grand que CQ, nécessairement DQ′ sera moindre que DQ.

Fig. 109. **528.** Maintenant, revenons au double mode de génération que nous avons annoncé au n° **524** pour l'hyperboloïde à une nappe; et prouvons que *toute droite* B″DD′D″ *qui s'appuiera sur trois génératrices quelconques* A, A′, A″ *du premier mode, coupera nécessairement toutes les droites de ce système*; par exemple, qu'elle rencontrera la génératrice A″ en un certain point D″. Il s'ensuivra évidemment que tous les points de cette ligne B″ se trouveront sur le premier hyperboloïde déjà construit avec les trois directrices fixes B, B′, B″, et qu'ainsi une de ces dernières peut décrire encore cette même surface, en glissant sur trois droites du système A.

Or, puisque d'après le premier mode de génération, les trois droites A, A′, A″ coupent B, B′, B″, le quadrilatère LNN″L″ donnera, en vertu de la formule (z),

$$\frac{LL'}{L'L''} \cdot \frac{N''N'}{N'N} = \frac{LM}{MN} \cdot \frac{N''M''}{M''L''}; \qquad (1)$$

mais, puisque la droite A″ rencontre les trois droites B, B′, B″, et que B″ coupe aussi les droites A, A′, A″, le même quadrilatère fournira encore, d'après la formule (z), les deux relations suivantes,

$$\frac{LL''}{L''L''} \cdot \frac{N''N''}{N''N} = \frac{LM}{MN} \cdot \frac{N''M''}{M''L''}; \qquad (2)$$

$$\frac{LD}{DN} \cdot \frac{N''D''}{D''L''} = \frac{LL'}{L'L''} \cdot \frac{N''N'}{N'N}; \qquad (3)$$

alors, les seconds membres des équations (2) et (3) étant égaux en vertu de

(1), nous en conclurons cette nouvelle égalité,

$$\frac{LD}{DN}\cdot\frac{N''D''}{D''L''}=\frac{LL''}{L''L'''}\cdot\frac{N'''N''}{N''N},\qquad (4)$$

laquelle prouve (n° 527) que les deux droites A″ et B‴ se coupent effectivement en un point D″.

529. Remarquons ici que le second membre commun des équations (1) et (2), est une quantité constante k qui demeure invariable, dès que la position des cinq droites B, B′, B″, A, A‴ est fixée; d'où il suit que, pour une nouvelle droite quelconque A′ qui s'appuiera sur les trois premières, on aura toujours

$$\frac{LL'}{L'L'''}=k\,\frac{NN'}{N'N'''}.\qquad (5)$$

Or, si les trois droites B, B′, B″, se trouvaient *parallèles à un même plan*, on sait qu'elles diviseraient A et A‴ en parties proportionnelles, de sorte qu'on aurait $k=1$; par conséquent, l'équation (5) qui devient alors

$$\frac{LL'}{L'L'''}=\frac{NN'}{N'N'''},$$

prouve que, dans ce cas, les trois droites A, A′, A″, seraient nécessairement aussi *parallèles à un plan unique*, mais différent du premier. Nous retrouverons plus loin cette conséquence, dans le paraboloïde hyperbolique (n° 553).

530. *Du plan tangent.* Puisque par chaque point de l'hyperboloïde, il passe deux droites (n° 528) l'une du système A, l'autre du système B, et que ces lignes sont elles-mêmes leurs propres tangentes, elles devront se trouver toutes deux dans le plan tangent relatif au point où elles se coupent, et par conséquent elles suffiront pour déterminer ce plan et pour trouver ses traces. Ainsi, lorsqu'on définira un hyperboloïde par les trois directrices B, B′, B″, et qu'on assignera le point de contact D sur une génératrice donnée A, il faudra construire (n° 521) au moins deux autres positions A′, A″ de cette génératrice; puis, en adoptant ces lignes A, A′, A″ pour directrices, on construira une droite DD′D″ qui s'appuie sur ces dernières, et qui parte du point D. Alors cette droite DD′D″ sera située sur l'hyperboloïde, et en conduisant un plan par les deux lignes AD et DD′D″, ce sera le plan tangent relatif au point D. Cette solution est trop simple, pour que nous croyions nécessaire de la construire dans une épure spéciale. Fig. 109.

531. Lorsque les données d'un hyperboloïde seront assignées sur deux plans de projection, et qu'on citera seulement *la projection horizontale* D, par exemple, d'un point de cette surface pour lequel on demandera le plan tangent, il ne sera plus possible de mener immédiatement la génératrice AD, avant d'avoir trouvé la projection verticale du point D. Pour cela il faudra en général, conduire par ce point un plan vertical quelconque : chercher la section qu'il produira dans la surface, en construisant les points de rencontre de ce plan sécant avec diverses génératrices qui s'appuieraient sur les droites données B, B', B''; et enfin projeter, sur cette section, le point D assigné sur le plan horizontal. Alors, connaissant les deux projections du point de contact, on pourra aussi construire les projections de la génératrice A qui passe par ce point, et l'on rentrera dans le cas du numéro précédent.

Fig. 114. **532.** Du centre *de l'hyperboloïde.* Cette surface est douée d'un centre, c'est-à-dire qu'il existe *un point tel que toutes les cordes* de la surface *qui passent par ce point, s'y trouvent divisées chacune en deux parties égales.* Pour démontrer cette proposition, représentons par B, B', B'', trois directrices primitives qui satisfassent aux conditions énoncées dans la définition du n° **521** : nous pourrons alors, par les droites B' et B'', conduire deux plans distincts B'DC et B''CD, parallèles l'un et l'autre à la directrice B, et ces deux plans se couperont suivant une droite ACD évidemment parallèle à B; de sorte que cette ligne ACD sera une génératrice de l'hyperboloïde proposé, puisqu'elle s'appuiera sur B' et sur B'', et qu'elle ira rencontrer B à une distance infinie. De même, en conduisant par B'' et par B, deux plans B''GH et BHG parallèles à B', ils se couperont suivant une droite A'GH qui sera encore une génératrice de l'hyperboloïde; et l'on en trouvera une troisième A''KE au moyen de deux plans BHF et B'DI parallèles à B'', et menés par B et B'. De là nous conclurons d'abord que *chaque génératrice d'un système a sa parallèle dans le système opposé;* car ce que nous avons dit ici de B, s'appliquera également à toute autre génératrice B''', B'''',.... laquelle peut être prise pour directrice au lieu de B (n° **528**). Ensuite, les six plans que nous avons construits ci-dessus, forment évidemment un parallélipipède qui a pour *arêtes opposées* les six droites B, B', B'', et A, A', A''; et je dis que le centre O de ce parallélipipède, est aussi le centre de l'hyperboloïde.

Pour le démontrer, je mène par un point M pris arbitrairement sur la directrice B, une droite M'MM'' qui coupe les deux autres directrices en M' et M'', et qui sera ainsi une génératrice du système A; puis, je la compare avec une

génératrice du système B, qui, s'appuyant sur A, A', A'', serait parallèle à MM'M''. Pour obtenir cette nouvelle génératrice, je prends les distances

$$DN = HM, \quad GN' = EM', \quad EN'' = GM'',$$

et les trois points N, N', N'', ainsi déterminés, se trouveront en ligne droite. En effet, en tirant les lignes OM et ON, les triangles OMH et OND qui sont visiblement égaux, prouveront que les côtés OM et ON sont égaux et en ligne droite; la même conséquence aura lieu pour les lignes OM' et ON', OM'' et ON'', en vertu des triangles égaux que l'on aperçoit aisément. Ensuite, les triangles MOM' et NON' égaux par ce qui précède, entraîneront le parallélisme des côtés MM' et NN'; et enfin, MM'' sera parallèle à NN'' en vertu des triangles égaux MOM'' et NON''. Par conséquent les deux portions N'N et NN'' ne formeront qu'une seule ligne droite, qui sera une génératrice du système B, parallèle à la génératrice M'MM'' choisie à volonté dans le système A; d'ailleurs, on voit par là que *deux génératrices parallèles se trouvent toujours dans un plan passant par le point* O, et sont *également éloignées de ce point.*

Cela posé, si par un point arbitraire P de la droite M'MM'', on tire une *corde* POQ qui passe par le point O, elle ira nécessairement percer l'hyperboloïde en un point Q situé sur N'NN'', et d'après les relations ci-dessus établies, on aura évidemment OP = OQ; donc, puisque cette conséquence est vraie pour tout point P pris sur l'hyperboloïde, il demeure prouvé que le point O est bien *le centre* de cette surface (*).

(*) C'est M. *J. Binet* qui a fait connaître (*Journal de l'École polytechnique*, 16e cahier), parmi d'autres parallélipipèdes concentriques avec l'hyperboloïde, ceux qui sont ainsi formés par trois génératrices quelconques d'un système, jointes à leurs parallèles dans le système opposé. Ce savant géomètre en a déduit beaucoup de conséquences intéressantes; mais ici nous ferons seulement observer, 1°. que chacun de ces parallélipipèdes est *circonscrit* à l'hyperboloïde, puisque chaque face renferme deux génératrices, et devient tangente dans le point où se coupent ces droites; 2°. qu'ils offrent une construction graphique fort élégante, pour trouver le centre de la surface gauche définie par trois directrices rectilignes; 3°. qu'ils ne sont pas moins utiles sous le rapport analytique, puisqu'en adoptant ce centre pour origine des axes coordonnés, choisis parallèles aux trois directrices assignées, l'équation de la surface se présentera sous la forme très-simple

$$\frac{xy}{\alpha\mathcal{C}} + \frac{yz}{\mathcal{C}\gamma} + \frac{xz}{\alpha\gamma} + 1 = 0;$$

en effet, les axes actuels étant évidemment trois arêtes du cône asymptotique, il doit arriver que chaque plan coordonné coupe la surface suivant une hyperbole qui ait pour asymptotes les deux axes contenus dans ce plan.



533. Observons que, quand il s'agira seulement de *construire ce centre*, on l'obtiendra sans tracer le parallélipipède dont nous venons de parler, en cherchant l'intersection des trois plans menés par la droite donnée B et sa parallèle A, par B′ et sa parallele A′, par B″ et sa parallèle A″; car chacun de ces plans diagonaux passe évidemment par le centre du parallélipipède, qui est celui de l'hyperboloïde. D'ailleurs, on peut dire que ce sont là *trois plans asymptotiques* de la surface, comme nous l'expliquerons au n° **546**.

534. En résumant les propositions précédentes, on voit que dans l'hyperboloïde à une nappe, 1°. il existe deux systèmes de génératrices rectilignes

$$A, A', A'' A''', \ldots\ldots \quad \text{et} \quad B, B', B'', B''', \ldots\ldots,$$

dont chacune coupe toutes les droites du système opposé (n° **528**); cependant, chaque génératrice A′ a sa parallèle dans le système B (n° **532**), et réciproquement; de sorte que pour ces droites comparées deux à deux, la rencontre n'a plus lieu qu'à une distance infinie.

2°. Deux génératrices du système A ne se trouvent jamais dans un plan unique (n° **522**); il en est de même des génératrices du système B, puisque ces dernières s'appuient aussi (n° **528**) sur trois droites du système A, lesquelles sont dans des plans différents.

3°. Trois droites quelconques du système A ne sont jamais *parallèles à un même plan;* car si cela avait lieu, il s'ensuivrait par le n° **529** que les directrices B, B′, B″ sur lesquelles s'appuient toutes les génératrices du premier mode, seraient aussi parallèles toutes trois à un même plan, ce qui est contraire à la définition du n° **521**. Réciproquement trois quelconques des génératrices du système B ne se trouvent jamais parallèles à un même plan, car cela entraînerait aussi (n° **529**) une restriction semblable pour les droites du système A, sur lesquelles s'appuient ces génératrices du second mode.

4°. Le centre de l'hyperboloïde est placé au centre du parallélipipède construit avec trois droites quelconques du système A, jointes aux trois génératrices du systeme B qui se trouvent respectivement parallèles aux trois premières (n° **532**); ou plus simplement, il est donné par l'intersection de trois plans asymptotiques (n° **533**).

5°. Une droite quelconque D ne saurait percer l'hyperboloïde en plus de deux points; car si elle avait trois points communs avec cette surface, la droite D s'appuierait sur trois génératrices de l'un ou de l'autre système, de sorte qu'elle coïnciderait tout entière avec la surface. D'ailleurs, pour obtenir ces points

d'intersection, il faudra construire, comme au n° **531**, la section faite dans l'hyperboloïde par un plan vertical ou horizontal, conduit suivant la droite D.

535. *La surface gauche engendrée par une droite qui glisse sur trois autres droites fixes non parallèles à un même plan, est* IDENTIQUE *avec l'hyperboloïde à une nappe* que nous avons décrit au n° **83**. En effet, cette surface gauche est d'abord du second degré, puisque sans effectuer les calculs, il est aisé de voir que les conditions par lesquelles on exprimerait que la droite mobile a un point de commun avec chaque directrice, ne pourraient conduire qu'à une équation du second degré. Ensuite, cette surface gauche est douée d'un centre (n° **532**); donc, comme elle ne saurait être évidemment ni un cône, ni un cylindre, qui sont développables, il faut qu'elle soit un ellipsoïde ou l'un des deux hyperboloïdes. Or, l'ellipsoïde est une surface limitée en tous sens (n° **81**) qui ne saurait admettre pour génératrice une droite indéfinie; d'un autre côté, l'hyperboloïde du n° **85** présente deux nappes séparées par un intervalle imaginaire, de sorte qu'une droite indéfinie et continue ne saurait évidemment s'appliquer tout entière sur cette surface; par conséquent on est ramené à la proposition énoncée au commencement de cet article.

536. Pour manifester plus clairement l'identité dont il s'agit, et qui peut paraître assez étrange au premier coup d'œil, nous allons démontrer synthétiquement que l'hyperboloïde décrit au n° **83** admet en effet *deux systèmes de génératrices rectilignes.* D'après la définition de cette surface, toutes les sections perpendiculaires à son axe imaginaire, sont des ellipses *semblables :* si donc nous la coupons par trois plans horizontaux $e'a'$, $V'X'$, $V''X''$, dont le premier passe par le centre et dont les deux autres soient à égales distances, au-dessous et au-dessus de ce point, nous obtiendrons *l'ellipse de gorge* ($abef$, $a'e'$) et deux autres ellipses égales, projetées horizontalement sur VUXY qui a ses axes parallèles et proportionnels à ceux de $abef$. Cela posé, en menant à cette dernière une tangente quelconque ADB, on sait que les parties AD et DB seront égales (*); si donc nous joignons le point (D, D') avec (A, A') et (B, 𝔅'), nous obtiendrons deux droites (AD, A'D') et (DB, D'𝔅') qui seront nécessairement le prolongement l'une de l'autre, puisque ce sont les hypoténuses de deux triangles rectangles évidemment égaux, projetés sur D'I'A' et D'I''𝔅'. D'où il résulte que la droite totale (ADB, A'D'𝔅') a trois points de communs avec l'hyperboloïde, FIG. 119.

(*) Cette proposition se démontre aisément, par la définition purement géométrique des diamètres conjugués et des courbes semblables.

et conséquemment *elle est tout entière sur cette surface*, attendu que celle-ci est du second degré.

Maintenant, projetons le point A sur l'ellipse supérieure en α', et le point B sur l'ellipse inférieure en B', puis joignons ces deux points dans l'espace avec (D, D'); nous obtiendrons encore deux droites (BD, B'D'), (DA, D'α'), dont on prouvera de même la coïncidence; de sorte que la droite totale (BDA, B'D'α') aura trois points de communs avec l'hyperboloïde, et par suite, elle sera située tout entière sur cette surface du second degré.

FIG. 119. **537**. De là nous pouvons conclure que tout plan vertical ADB tangent à l'ellipse de gorge, coupe l'hyperboloïde suivant deux droites distinctes, qui se croisent en (D, D') sur cette gorge, et sont inclinées symétriquement de part et d'autre de la verticale D. Par conséquent cette surface peut être regardée comme produite par *le mouvement de la génératrice* (AD, A'D'), ou *de la génératrice* (BD, B'D'), *assujettie à glisser constamment sur les trois ellipses semblables*

$$(XYVU, X'V'), \quad (abef, d'e'), \quad (XYVU, X''V'');$$

car on sait (n° 515) que ces conditions règlent complétement le mouvement d'une ligne droite. Les diverses positions de ces deux génératrices présenteront donc *deux systèmes* de droites indéfinies, situées toutes sur l'hyperboloïde, savoir :

[A] (AD, A'D'), (A_2E, A'_2E'), (A_3F, A'_3F'),.........,

[B] (BD, B'D'), (B_2E, B'_2E'), (B_3F, B'_3F'),.........,

et les unes comme les autres se projetteront verticalement sur des tangentes à l'hyperbole X''d'X', V''e'V', contenue dans le plan vertical VX. En effet, au point (N, N') où l'une de ces génératrices vient percer ce plan VX, le plan tangent de la surface est perpendiculaire au plan vertical, attendu qu'il contient la tangente à l'ellipse horizontale qui aurait son sommet en (N, N'); donc la génératrice (BND, B'N'D') se confond, *en projection verticale*, avec la tangente de l'hyperbole (X''d'X', aX) qui est aussi dans ce plan tangent. La même circonstance arrive pour la droite (ADN, A'D'N'') dont la projection verticale touche cette hyperbole au point (N, N''); et les asymptotes seront fournies par les génératrices (bK, O'K'), (fB_2, O'B'_2), lesquelles étant parallèles au plan vertical VX, ne toucheront plus l'hyperbole qu'à l'infini.

538. *Deux génératrices quelconques du système* A *ne sont jamais dans un même*

plan, et la surface est GAUCHE. Considérons, en effet, les droites (AD, A'D') et (A_4G, A'_4G'); si elles se coupaient, leur point de section serait projeté horizontalement en M : mais, pour la première de ces droites, le point M étant au delà de D qui appartient à l'ellipse de gorge, devra se trouver sur la nappe supérieure en M''; tandis que pour la droite (A_4G, A'_4G'), le point M étant en deçà de G, appartiendra nécessairement à la nappe inférieure, et sera projeté en M'. Donc les droites proposées ne se coupent pas, et d'ailleurs il est bien évident qu'elles ne sauraient être parallèles.

On prouvera de même que deux génératrices du système B ne sont jamais dans un plan unique.

539. Au contraire, *chaque génératrice* (A_4G, A'_4G') *du premier système, coupe toutes les droites du second*, par exemple (BD, B'D'). Car le point M où se rencontrent les projections horizontales de ces deux droites, est placé, sur l'une et sur l'autre, en deçà des points G et D qui appartiennent à l'ellipse de gorge; donc les deux points projetés en M sont sur la nappe inférieure de l'hyperboloïde; et par conséquent ils se projettent à la fois en M', puisque cette nappe ne peut évidemment être coupée par la verticale M qu'en un seul point. Observons, cependant, que quand on choisira une génératrice du système A et une du système B qui passeront par les extrémités d'un même diamètre de l'ellipse de gorge, ces deux droites se trouveront *parallèles;* mais du moins elles seront encore dans un plan unique.

On démontrera de même que chaque génératrice du système B coupe toutes celles du système A, excepté une seule qui lui est parallèle.

540. Or, le mouvement d'une droite étant complétement déterminé (n° **521**) par la condition que cette ligne mobile s'appuie constamment sur trois droites fixes, il en résulte que si l'on fait glisser la génératrice (AD, A'D'), sur trois droites quelconques du système B, elle ne pourra prendre que les positions A_2, A_3, A_4,..... qui toutes rencontrent ces trois directrices (n° **539**); de même, la génératrice (BD, B'D') en glissant sur trois droites du système A, viendra coïncider nécessairement avec B_2, B_3, B_4,...... Par conséquent, l'hyperboloïde actuel nous offre bien toutes les propriétés que nous avons déjà reconnues dans la surface gauche du n° **521** ; et si les trois ellipses directrices étaient des cercles, on retomberait sur *l'hyperboloïde de révolution* dont nous avons parlé dans les nos **140**, **141**,....

541. *Du plan tangent.* Lorsque l'hyperboloïde à une nappe est défini par les trois ellipses semblables citées n° **537** (courbes que l'on peut aisément construire, dès que les trois axes $Oa = O'a'$, Ob, $O'c'$, de la surface sont assignés), FIG. 119.

il est bien facile de trouver le plan tangent relatif à un point donné par sa projection horizontale M. En effet, si nous tirons par le point M une tangente AMB à l'ellipse de gorge, ce sera la projection de deux génératrices, représentées sur le plan vertical par A'D' et B'D', et sur lesquelles il faudra projeter le point donné en M" ou en M'; de sorte qu'il y aura deux positions pour le point proposé. Considérons d'abord le point (M, M") situé sur la droite (ADM, A'D'M"): il y passe une seconde génératrice appartenant au système B, savoir (B_4GM, B'_4G'M"), laquelle s'obtient en tirant par le point M, la nouvelle tangente MGB_4 à l'ellipse de gorge. Alors, l'ensemble de ces deux génératrices déterminera complétement (n° 530) le plan qui touchera l'hyperboloïde au point (M, M"), et les pieds de ces droites fourniront immédiatement la trace horizontale AB_4P de ce plan tangent. Quant à sa trace verticale PQ", on l'obtiendra par le secours de l'horizontale (MQ, M"Q") menée parallèlement à AB_4.

Pour l'autre point (M, M'), on combinera ensemble les deux génératrices (BMD, B'M'D') et (A_4MG, A'_4M'G') qui s'y coupent; et la trace horizontale du plan tangent relatif à ce nouveau point, sera la droite A_4B qui se trouvera évidemment parallèle à AB_4. La trace verticale s'obtiendrait par le même moyen que précédemment.

542. Pour obtenir une symétrie convenable, dans la représentation de l'hyperboloïde au moyen de ses génératrices rectilignes, il est essentiel de choisir les cordes AB, A_2B_2, A_3B_3,.... sur le plan horizontal, de manière qu'elles reviennent tôt ou tard, aboutir deux à deux aux mêmes points de l'ellipse XYVU. Or, si cette courbe était un cercle, on sait (n° **150**) que l'on remplirait cette condition en partageant la circonférence en un certain nombre de parties égales, et en tirant des cordes qui sontendissent *un nombre constant* de ces arcs partiels; d'ailleurs, ces cordes se trouveraient bien tangentes au cercle de gorge, qu'elles traceraient par leurs seules intersections successives. Si donc, en supposant cette construction effectuée pour le cercle décrit sur VX comme diamètre, on imagine qu'il tourne autour de VX, d'une certaine quantité angulaire propre à lui donner pour projection l'ellipse XYVU, il arrivera bien que les cordes primitives se projetteront sur d'autres cordes, qui viendront nécessairement aboutir, deux à deux, aux mêmes points de cette ellipse; et en outre, ces nouvelles cordes seront évidemment tangentes à l'ellipse intérieure suivant laquelle se projettera le cercle de gorge primitif. D'où je conclus qu'il faut choisir les points A, A_2, A_3,..... de telle sorte qu'ils répondent aux ordonnées qui diviseront le cercle VX en arcs égaux; et tracer ensuite

dans l'ellipse XYVU, des cordes AB, A_2B_2,.... qui soutendent *un nombre constant* de ces arcs d'ellipse, quoique ceux-ci ne soient plus de même longueur. Une fois que les génératrices seront ainsi déterminées sur le plan horizontal, on en conclura aisément les projections verticales, en projetant les extrémités A et B en A′ et 𝔅′, et aussi en α′ et B′, sur les deux parallèles V′X′ et V″X″. D'ailleurs, les intersections consécutives de toutes ces génératrices, si elles sont assez multipliées, suffiront pour dessiner par elles-mêmes le contour de l'ellipse de gorge sur le plan horizontal, et les deux branches de l'hyperbole parallèle au plan vertical.

543. Du cône asymptote *de l'hyperboloïde*. Si par le centre (O, O′) de cette dernière surface, on menait des droites respectivement parallèles aux diverses génératrices du système A, elles le seraient en même temps aux génératrices du système B, puisque chaque droite d'un système a sa parallèle dans l'autre (n° 532); et l'on formerait ainsi une surface conique qui serait *asymptote* de l'hyperboloïde proposé. Pour le prouver, cherchons d'abord quelle sera la trace horizontale de ce cône; en considérant l'arête quelconque O*m* et les deux génératrices DA et HR qui lui sont parallèles, ces trois droites seront dans un même plan passant par le diamètre horizontal (DOH, D′O′); donc la trace de ce plan sera une corde RA parallèle à DOH, et le milieu *m* de cette corde sera évidemment le pied de l'arête O*m*. En raisonnant de même pour une autre arête et pour les deux génératrices de l'hyperboloïde qui lui sont parallèles, on verra que la trace horizontale *vmyx* du cône en question, sera fournie par les milieux de toutes les cordes qui soutendront, comme RA, *un nombre constant* de divisions dans l'ellipse VYX; or, d'après ce que nous avons dit au numéro précédent, on sait que toutes ces cordes ont pour enveloppe, une ellipse qu'elles touchent en leurs milieux, et qui est semblable à VYX; donc la trace *vmyx* est effectivement une ellipse qui jouit de cette propriété, et dont le demi-grand axe O*v* est égal à *b*K. Fig. 119.

Maintenant, le cône que nous venons de construire est *asymptote* de l'hyperboloïde; car, en coupant ces deux surfaces par des plans horizontaux, les sections seraient des ellipses respectivement semblables à VYX et *vyx*, et qui, comme ces dernières, auraient pour différence de leurs demi-axes, une quantité variable V*v* égale à l'intervalle V′K′ qui sépare l'hyperbole V′*e*′V″ de son asymptote O′K′. Or, cet intervalle approche indéfiniment de zéro, à mesure que l'on s'abaisse davantage au-dessous du centre O′; donc aussi, les deux sections faites dans l'hyperboloïde et dans le cône par un même

plan horizontal qui s'éloigne de plus en plus du centre, seront des ellipses semblables qui approcheront *indéfiniment* de se confondre, quoique la première enveloppe toujours la seconde; donc ces deux surfaces sont bien asymptotes l'une de l'autre.

FIG. 109. **544.** DES SECTIONS PLANES *de l'hyperboloïde*. Pour obtenir l'intersection de cette surface par un plan donné π, il suffit de chercher les points dans lesquels ce plan va couper les diverses génératrices A, A', A'',..... que l'on sait construire (n° **521**) d'après la connaissance des trois directrices B, B', B''; puis, de réunir tous ces points par un trait continu. La tangente à cette courbe sera donnée par l'intersection du plan π avec le plan tangent de l'hyperboloïde pour le point en question, plan que nous avons enseigné à construire (n° **530**).

545. Dans le cas particulier où le plan donné π passerait par une génératrice A du premier système, la seconde branche d'intersection serait nécessairement *rectiligne*, puisque la surface est du second degré; et cette droite qui appartiendrait au système B, s'obtiendrait en cherchant seulement les deux points où le plan π coupe deux génératrices A' et A'' du premier système. D'ailleurs, ce plan π serait *tangent* à la surface dans le point de rencontre des deux génératrices qu'il renfermerait.

546. Lorsque ces deux génératrices se trouveront parallèles entre elles, le plan π devra être considéré comme *asymptote* de l'hyperboloïde, ou tangent dans le point infiniment éloigné où concourraient ces deux droites; alors le plan π passerait nécessairement par le centre (n° **533**) de la surface, et serait tangent au cône asymptote, comme on l'a vu (n° **543**) pour les génératrices DA et HR de la *fig.* 119. Ainsi, *tout plan tangent au cône asymptote coupe l'hyperboloïde suivant deux droites parallèles à l'arête de contact* de ce plan avec le cône.

547. *Pour reconnaître d'avance la nature de la section* produite par un plan donné π, il faudra examiner s'il existe quelque génératrice *parallèle au plan sécant;* parce qu'alors la section admettrait une ou deux branches infinies. A cet effet, on construira la trace du cône asymptote sur le plan horizontal, en menant par le centre O de l'hyperboloïde, déterminé comme au n° **533** (ou même, par un point quelconque de l'espace), des parallèles à un nombre suffisant de génératrices A, A', A'',.....; puis, on conduira par le sommet de ce cône un plan π' parallèle à π, et alors il pourra se présenter trois cas distincts.

1°. Si la trace horizontale du plan π' ne rencontre pas la base du cône asymptote, il n'existera sur ce cône aucune arête parallèle à π; et il en sera de même des génératrices de l'hyperboloïde, qui sont (n° 543) respectivement parallèles à ces arêtes. Donc, dans ce cas, la courbe de section n'aura aucun point situé à l'infini, et elle sera *une ellipse*.

2°. Si la trace horizontale du plan π' coupe en deux points la base du cône asymptote, il y aura sur ce cône deux arêtes α et α' *parallèles au plan* π, et aussi dans l'hyperboloïde, deux génératrices de chaque mode (a et b, a' et b') qui rempliront cette condition; par conséquent la section faite par le plan π, admettra deux branches infinies, et sera *une hyperbole*. Pour en trouver les asymptotes, on mènera le plan P qui touche le cône asymptote (*) le long de l'arête α; et comme ce plan renfermerait (n° 546) les deux génératrices a et b qui, sur l'hyperboloïde, seraient parallèles à α, il est tangent à cette surface pour le point infiniment éloigné où a et b iraient rencontrer le plan sécant π : donc l'intersection des plans P et π donnera l'asymptote de cette branche. L'autre asymptote sera fournie par l'intersection du plan π avec le plan P' qui touchera le cône asymptote suivant l'arête α'; car c'est dans ce plan P' que seraient contenues les deux génératrices a' et b' qui sont parallèles à α'.

3°. Si le plan π' mené par le sommet du cône asymptote, *touche* ce cône suivant une arête unique α, il n'y aura sur l'hyperboloïde qu'une seule génératrice (a et b) de chaque système, qui soit parallèle à α : donc alors la section faite par le plan π n'aura qu'une branche infinie, et sera *une parabole*. D'ailleurs, elle n'admettra pas d'asymptote; car c'est le plan π' lui-même qui, touchant le cône asymptote, renfermerait (n° 546) les deux génératrices a et b parallèles à α : donc ce plan est tangent à l'hyperboloïde pour le point infiniment éloigné de la courbe; mais comme il se trouve ici parallèle au plan sécant π, leur intersection qui serait l'asymptote, se transporte tout entière à l'infini et n'existe plus.

548. Par les constructions précédentes, on saura résoudre le problème suivant, quand il sera possible : *trouver sur un hyperboloïde donné, une génératrice qui soit parallèle à un plan connu* π. Car, en menant par le sommet du cône asymptote, le plan π' parallèle à π, si le plan π' coupe ce cône suivant

---

(*) Il faut, ici, que ce cône ait été construit de manière que son sommet soit précisément au centre O de l'hyperboloïde, que l'on sait trouver par le n° 535.

une ou deux arêtes α et α', les plans tangents au même cône le long de ces arêtes, donneront par leurs intersections avec l'hyperboloïde, les génératrices a et b parallèles à α, et les génératrices a' et b' parallèles à α', lesquelles satisferont toutes quatre à la question proposée.

CHAPITRE III.

Du paraboloïde hyperbolique.

FIG. 115. **549.** Nous appellerons ainsi la surface engendrée par *une droite mobile* A, *qui glisse sur deux droites fixes* B *et* B' *non situées dans un même plan, et qui demeure en outre constamment parallèle à un plan donné* P, que l'on nomme le *plan directeur;* car il sera démontré plus loin (n° **558**), que cette surface est identique avec celle que nous avons déjà désignée sous ce nom au n° **89**. Pour construire les diverses positions de la génératrice, il suffira de mener par chaque point M pris à volonté sur la directrice B, un plan parallèle à P; puis, de chercher le point N où ce plan ira couper l'autre directrice B', et de joindre ces deux points par une droite AMN. On voit ainsi que les conditions précédentes *règlent complétement* le mouvement de la droite mobile, puisque pour chaque point M, elle ne peut prendre qu'une position unique.

550. Le paraboloïde hyperbolique est une *surface gauche;* car deux génératrices quelconques A et A', même quand elles ne sont pas infiniment voisines, ne pourraient se trouver contenues dans un plan unique, qu'autant que les directrices B et B', qui ont chacune deux points communs avec les premières, seraient elles-mêmes situées dans ce plan : or, cela est contraire à la définition donnée au numéro précédent; donc la surface est gauche.

551. La surface qui nous occupe admet, comme l'hyperboloïde gauche, un second mode de génération inverse du premier, et dans lequel deux des génératrices A, A', A",..... deviendront les directrices. Pour le prouver, démontrons que *tout plan* DUV *parallèle aux deux directrices* B et B', *coupe le paraboloïde suivant une droite;* ce qui se réduit à faire voir que les trois points D, D', D", où ce plan rencontre trois génératrices quelconques A, A', A", se trouvent en ligne droite. FIG. 115.

Projetons la figure entière sur un plan QOX parallèle aussi aux deux directrices B et B', et employons pour lignes projetantes des droites obliques (*), mais parallèles toutes à une ligne PO menée arbitrairement dans le plan directeur POX. Alors, B et B' deviendront deux lignes quelconques b et b'; mais les droites MDN, M'D'N', M"D"N", ayant leurs plans projetants parallèles à P, se projetteront suivant des droites mdn, $m'd'n'$, $m''d''n''$, nécessairement *parallèles* à l'intersection OX des deux plans P et Q. Cela posé, on aura évidemment

$$\frac{\text{MD}}{\text{DN}} = \frac{md}{dn}, \quad \frac{\text{M'D'}}{\text{D'N'}} = \frac{m'd'}{d'n'}, \quad \frac{\text{M''D''}}{\text{D''N''}} = \frac{m''d''}{d''n''};$$

mais, d'un autre côté, le plan DUV étant parallèle aux deux lignes B et B', on peut regarder les droites A, A', A", comme coupées par trois plans parallèles; et d'après un théorème connu de la géométrie ordinaire, on aura les rapports égaux

$$\frac{\text{MD}}{\text{DN}} = \frac{\text{M'D'}}{\text{D'N'}} = \frac{\text{M''D''}}{\text{D''N''}},$$

qui, en vertu des égalités précédentes, donneront encore

$$\frac{md}{dn} = \frac{m'd'}{d'n'} = \frac{m''d''}{d''n''}.$$

Or, puisque ces rapports égaux subsistent entre des droites mn, $m'n'$, $m''n''$, qui sont *parallèles entre elles*, il en résulte nécessairement que les trois points d, d', d'', sont sur une même droite qui convergerait avec b et b' vers un point unique; d'où il suit que les points de l'espace D, D', D", se trouvent *dans le plan projetant* passant par la droite $dd'd''$; et comme ils sont d'ailleurs dans le plan DUV qui est distinct de ce plan projetant, il en résulte que ces trois points D, D', D", sont effectivement en ligne droite.

552. D'après cela, *si l'on fait glisser sur deux génératrices* A *et* A' *du premier mode, une droite mobile* B" *assujettie en outre à demeurer parallèle au plan* Q, *elle* Fig. 115.

(*) Nous avions, jusqu'à présent, démontré cette proposition en conservant les projections orthogonales, et employant un plan QOX *perpendiculaire* au plan directeur P; ce qui laisse subsister tous les raisonnements et les calculs du texte. Mais la marche actuelle offre l'avantage de mettre sous les yeux du lecteur, le second plan directeur Q qu'admet le paraboloïde hyperbolique

engendrera le même paraboloïde que ci-dessus; car, lorsque B″ passera par le point D par exemple, elle ne pourra manquer de coïncider avec la droite DD′D″ qui est située (n° 551) sur ce paraboloïde, et qui remplit déjà les conditions imposées à B″. Ainsi, voilà un second mode de génération où le nouveau *plan directeur* Q est parallèle aux deux directrices B et B′ de l'ancien mode, et où les directrices nouvelles sont deux génératrices quelconques du premier système A.

553. Maintenant, essayons de faire mouvoir une droite B″ de manière qu'elle s'appuie constamment sur trois droites quelconques A, A′, A″, du premier système, sans lui imposer la restriction d'être parallèle à un plan directeur. Ces conditions suffiront pour régler complétement (n° 521) le mouvement de cette génératrice; et quand elle passera par le point D, par exemple, elle devra encore coïncider avec DD′D″ qui remplit déjà les conditions énoncées; donc B″ va ainsi décrire le même paraboloïde que précédemment. Par conséquent, voilà un troisième mode de génération, dans lequel cette surface est produite par *le mouvement d'une droite* B″ *qui glisse constamment sur trois droites fixes* A, A′, A″, lesquelles sont *parallèles à un même plan;* car ici ces trois directrices, au lieu d'être tout à fait quelconques, se trouvent par la définition du n° 549, parallèles toutes au plan P; de sorte que, sous ce point de vue, le paraboloïde hyperbolique est un cas particulier de l'hyperboloïde à une nappe (n° 521). D'ailleurs, quoique on n'ait pas imposé à la droite mobile B″ la restriction de demeurer parallèle à un plan fixe, elle ne laissera pas de remplir cette condition, puisque les positions qu'elle prendra, comme DD′D″, sont déjà toutes parallèles au plan Q; ce qui s'accorde avec la remarque du n° 529.

Il est aussi évident que ce mode de génération admet, pour réciproque, un quatrième mode dans lequel on ferait mouvoir la droite A sur trois quelconques des génératrices du système B; car cette droite A ne pourrait prendre (n° 521) que les positions A′, A″,.... qui remplissent déjà cette condition, et elle demeurerait ainsi parallèle au plan P, quoique on ne lui eût pas imposé cette restriction.

Fig. 115. **554.** Il résulte évidemment de là : 1° que par chaque point D pris à volonté sur le paraboloïde, il passe deux droites situées tout entières sur la surface, et appartenant l'une au système A, l'autre au système B; 2° que deux génératrices appartenant au même mode, ne sont jamais dans un plan unique, puisque ce qui a été prouvé n° 550 pour les droites A, A′, A″,... s'applique évidemment aussi aux droites B, B′, B″,....; 3° que chaque génératrice d'un système coupe toutes les droites de l'autre mode, *sans qu'il y en ait deux de parallèles;*

car, si cette circonstance avait lieu pour A″ et B″, par exemple, il s'ensuivrait que ces droites seraient aussi parallèles à l'intersection OX des deux plans directeurs, ce qui est impossible, à moins qu'on ne les regarde comme placées à une distance infinie; 4° une droite quelconque ne peut traverser le paraboloïde qu'en deux points; car, si elle avait trois points communs avec cette surface, elle s'appuierait sur trois génératrices, et par conséquent (n° 553) elle coïnciderait tout entière avec le paraboloïde. D'ailleurs, pour obtenir les points d'intersection, il faudra construire la section faite dans la surface par un plan vertical ou horizontal, conduit suivant la droite donnée.

555. Enfin, puisque dans le premier mode de génération, les diverses positions A, A′, A″,.... de la génératrice sont fournies par des plans parallèles à P, qui coupent les directrices B et B′ aux points M et N, M′ et N′,..., on sait par la géométrie ordinaire, que ces plans diviseront les droites B et B′ en parties proportionnelles, c'est-à-dire que l'on aura

$$\frac{MM'}{NN'} = \frac{M'M''}{N'N''} = \frac{M''M'''}{N''N'''} = \ldots\ldots;$$

d'où il résulte qu'au lieu d'un plan directeur, on pourrait assigner deux positions primitives A et A′ de la droite mobile : puis, exiger que celle-ci glissât sur B et B′ *de manière à intercepter toujours des parties proportionnelles avec* MM′ *et* NN′. Cette marche sera d'un usage fort commode pour l'exécution en relief du paraboloïde hyperbolique; car, après avoir construit un quadrilatère *gauche*, tel que MNN″M″, dont les côtés et les angles soient invariables, il suffira de diviser les côtés opposés MM″ et NN″ en un même nombre de parties égales; puis, en joignant les divisions correspondantes par *des fils tendus en ligne droite*, on obtiendra une représentation fidèle de cette surface. Pour y introduire en même temps les génératrices du système B, il n'y aura qu'à diviser aussi les deux autres côtés MN et M″N″ en un même nombre de parties égales, et joindre les points de division correspondants, par d'autres fils qui devront alors s'appuyer d'eux-mêmes sur les premiers, et ne former qu'une seule et même surface, où les deux modes de génération se trouveront exprimés d'une manière bien sensible (*voyez* n° 566, et la *fig.* 120).

556. *Du plan tangent.* Lorsque le point de contact G sera donné sur une génératrice connue AMGN, il suffira de construire seulement une seconde génératrice A′ du même mode, en employant le procédé du n° 549 si le paraboloïde est défini par un plan directeur P, et s'il l'était par trois directrices B, B′, B″, FIG. 115.

parallèles à un même plan, ou emploierait la marche du n° **521**. Quand une fois on connaîtra les deux génératrices A et A′, on les coupera par un plan mené du point G parallèlement aux directrices B et B′, et la droite GH qui réunira les points de section, sera située (n° **551**) sur le paraboloïde; donc le système des deux droites AG et GH, qui sont elles-mêmes leurs propres tangentes, déterminera le plan tangent de la surface pour le point donné G.

557. Si l'on assignait seulement la projection horizontale g du point de contact, sans donner la génératrice qui le contient, il faudrait chercher d'abord la seconde projection de ce point. Pour cela, on ferait passer par g un plan vertical quelconque dont on déterminerait les intersections avec diverses génératrices, et la suite de ces points fournirait la projection verticale de la section faite dans la surface; alors, on projetterait le point g sur cette courbe, et ayant ainsi les deux projections g et g' du point de contact, il serait bien facile de mener la génératrice qui, passant par ce point, s'appuierait sur B et B′; de sorte que l'on serait ramené au cas précédent.

558. La surface gauche qui nous occupe, *est identique avec le paraboloïde hyperbolique* que nous avons décrit au n° **89**. En effet, cette surface gauche est *du second degré;* car, sans effectuer les calculs, il est facile de voir que les conditions par lesquelles on exprimerait que la droite mobile A a toujours un point de commun avec B et avec B′, et demeure parallèle au plan P choisi, si l'on veut, pour un des plans coordonnés, conduiraient à une équation qui ne dépasserait pas le second degré, et cette conséquence s'accorde avec la dernière remarque du n° **554**. Ensuite, cette surface gauche n'admet *aucune section plane qui soit une courbe* FERMÉE, comme nous allons le démontrer (n° **564**); d'ailleurs, elle ne peut être un cylindre à base hyperbolique ou parabolique, attendu qu'elle est gauche; il faut donc qu'elle coïncide avec le paraboloïde hyperbolique (n° **89**), puisque toutes les autres surfaces du second degré admettent, par leur génération même, des sections elliptiques. (*Voyez* livre II, chapit. Ier.)

FIG. 115. **559**. SECTIONS PLANES *du paraboloïde hyperbolique.* On obtiendra la courbe d'intersection de cette surface avec un plan donné π, en construisant les points où ce plan coupe les diverses génératrices A, A′, A″,....; et la tangente à cette courbe en un point donné, résultera de l'intersection du plan π avec le plan tangent au paraboloïde, pour le point en question, plan qui se construira comme au n° **556**. Quant à la nature de la section, on peut la prévoir d'avance par les règles suivantes.

560. D'abord, si le plan sécant π passe déjà par une droite A du paraboloïde,

l'autre branche d'intersection sera encore rectiligne, puisque cette surface est du second degré; on l'obtiendra en cherchant seulement les points D' et D", où π va rencontrer deux autres génératrices A' et A", du même mode que A; et la section totale se composera des deux droites A et DD'D", de sorte que le plan π se trouvera tangent en D, et sécant partout ailleurs.

561. Dans le cas plus particulier encore, où le plan π qui passe par A, se trouverait parallèle au plan directeur P qui correspond à cette génératrice, il ne couperait plus les autres génératrices du même mode, de sorte que la seconde branche d'intersection qui était tout à l'heure DD'D", s'éloignerait tout entière à l'infini. Donc alors la section se réduirait à la droite unique A; mais le plan π devrait toujours être considéré comme tangent au paraboloïde dans le point infiniment éloigné situé sur A, ou bien comme un plan *asymptote* de la surface.

562. Généralement, soit π un plan quelconque qui n'est pas parallèle à l'intersection OX des deux plans directeurs; il coupera ceux-ci suivant des droites δ et δ' non parallèles à OX, et alors il existera dans chaque système une génératrice parallèle à π. En effet, conduisons par la directrice B un plan BCE parallèle à la trace δ; ce plan coupera nécessairement la directrice B' en un certain point N", et en menant par ce point la droite N"M"A" parallèle à δ, elle ira rencontrer la directrice B, et sera évidemment une génératrice parallèle au plan π. Si l'on opère d'une manière semblable pour la trace δ', en menant par la génératrice A un plan parallèle à δ', il coupera une autre droite A' du même système en un point D', par lequel on pourra conduire une autre génératrice B" qui sera parallèle à δ' et au plan π. De là on doit conclure que la section faite par ce plan π, présentera deux branches ouvertes, qui convergeront vers les points infiniment éloignés où π irait rencontrer les deux génératrices A" et B"; ainsi cette section sera *une hyperbole* dont nous allons construire les asymptotes.

Menons par la génératrice A", un plan π' parallèle à P : ce plan π' sera tangent (n° 561) au paraboloïde dans le point situé à l'infini sur A"; donc l'intersection de ce plan tangent avec le plan π de la courbe, fournira l'asymptote de la branche qui converge vers A", et cette asymptote sera évidemment parallèle à cette génératrice. L'autre asymptote sera donnée semblablement, par l'intersection du plan π avec un plan π'' mené suivant B" parallèlement au second plan directeur Q, et elle sera parallèle à B".

563. Enfin, supposons que le plan sécant π soit parallèle à l'intersection OX des deux plans directeurs, auquel cas ses deux traces δ et δ' sur ces derniers,

se trouveront elles-mêmes parallèles à OX. Alors, si l'on veut essayer d'obtenir une génératrice parallèle à π, il faudra encore mener par B un plan BCE parallèle à δ; mais ici ce plan ne coupera plus aucune des génératrices B', B",.... puisqu'il deviendra évidemment parallele à Q; donc la génératrice parallèle à π, dans le système A, est transportée tont entière à une distance infinie. Il en sera de même de la génératrice qui, dans le système B, serait parallèle à π; de sorte que la section faite par le plan π sera encore ouverte, poisqu'il y aura des génératrices de plus en plus éloignées qui approcheront indéfiniment d'être parallèles à π; mais cette courbe *n'aura plus d'asymptote.* En effet, cette dernière ligne serait donnée, comme on l'a vu au numéro précédent, par l'intersection du plan π avec un plan π' ou π'' parallèle à P ou Q, et mené suivant la génératrice parallèle à π : or cette génératrice est ici transportée tout entière à l'infini; donc aussi le plan π' s'éloigne indéfiniment, et ne fournit plus d'asymptote. Par conséquent la section relative au cas actuel est *une parabole.*

564. En résumant cette discussion, on voit : 1° que *tout plan π parallèle à l'intersection* OX *des deux plans directeurs* (*), *donne une* SECTION PARABOLIQUE; *et si, en outre, π est parallèle à l'un de ces plans directeurs, cette parabole se réduit à une droite unique* (n° **561**).

2°. *Si le plan sécant π n'est point parallèle à l'intersection* OX *des deux plans directeurs, la section est* UNE HYPERBOLE; *mais elle dégénère* EN DEUX DROITES QUI SE COUPENT, *si le plan sécant contient déjà une génératrice de la surface* (n° **560**).

3°. *Dans aucun cas, la section faite par un plan quelconque π dans le paraboloïde, ne peut être* UNE COURBE FERMÉE.

565. Observons aussi que les constructions indiquées au n° **562**, serviront à résoudre ce problème : *trouver sur un paraboloïde donné, une génératrice qui soit parallèle à un plan connu π.* Il y aura deux solutions quand ce plan π ne sera point parallèle à l'intersection des deux plans directeurs; et le problème sera impossible, lorsque π se trouvera parallèle à cette intersection, à moins qu'il ne le soit en même temps à l'un des plans directeurs, auquel cas il existera une infinité de solutions, fournies par toutes les génératrices parallèles à ce plan directeur.

PROBLÈME. *Représenter un paraboloïde engendré par une droite mobile* A *qui*

(*) On verra au n° 572 que cette droite OX est l'*axe principal* du paraboloïde, ou du moins, lui est parallèle; car les deux plans directeurs ne sont pas determinés quant à leur position absolue, mais seulement quant à leur direction.

glisse sur deux droites fixes B *et* B_2, *en demeurant parallèle à un plan directeur donné* P; *et construire le plan tangent de cette surface, pour un point connu.*

566. Afin de donner à notre épure toute la symétrie qu'on devrait chercher à obtenir dans la construction d'un modèle en relief, nous ferons observer qu'un plan Q parallèle aux droites données B et B_2, serait le plan directeur du second mode de génération (nº **552**) du paraboloïde cherché; et comme ce plan Q est évidemment déterminé, au moins en direction, par les données actuelles du problème, il nous sera toujours permis d'adopter les dispositions suivantes :

1°. Nous choisirons notre plan horizontal de projection, perpendiculaire aux deux plans directeurs P et Q, lesquels seront alors représentés par leurs traces horizontales *op* et *oq*. Fig. 120.

2°. Nous dirigerons le plan vertical de projection, de manière qu'il soit parallèle à la droite *oy* qui divise en parties égales l'angle *poq*; puis, nous tracerons les projections (CD, C′D′) de la droite donnée B, et les projections (EF, C′F′) de l'autre directrice B_2, en faisant attention que les deux projections horizontales CD et EF, devront être nécessairement parallèles entre elles, d'après la condition 1°, puisqu'elles le seront à la trace *oq* du plan directeur Q.

3°. Nous pouvons encore élever ou abaisser notre plan horizontal, de telle sorte que la ligne de terre VY′ passe par le point C′ où se croisent les deux projections verticales des directrices B et B_2; et alors les traces horizontales C et E de ces droites, se trouveront sur une même perpendiculaire CE à la ligne de terre.

4°. Nous limiterons ces directrices aux deux points (D, D′), (F, F′), où elles vont rencontrer le plan vertical DOF mené perpendiculairement sur le milieu de CE; de sorte que la figure CDEF sera un losange, dont le centre O sera la projection de l'*axe* du paraboloïde, ainsi que nous le verrons plus loin (nº **572**), pourvu cependant que les directrices B et B_2 soient *également inclinées* sur le plan horizontal actuel. A la vérité, cette dernière condition pourrait bien ne pas être remplie par les directrices que la question assigne; mais *nous admettrons qu'elle est vérifiée ici*, et par suite que les points (D, D′), (F, F′), sont à la même hauteur, attendu que dans tous les cas, nous saurons retrouver (nº **572**) parmi les génératrices du paraboloïde, deux droites qui seraient également inclinées sur la verticale, et qui dès-lors pourraient être substituées aux directrices données (CD, C′D′), (EF, C′F′), si ces dernières ne remplissaient pas cette condition.

FIG. 120. **567**. Cela posé, la droite qui réunira les points (D, D′) et (E, C′), sera évidemment parallèle au plan directeur P, puisque sa projection horizontale DE se trouvera parallèle à la trace *op* de ce plan vertical P, d'après les conditions 2° et 4° du numéro précédent. Donc (DE, D′C′) est une position de la génératrice mobile A; et comme il en sera de même de la droite (CF, C′F′), on voit que si l'on divise en un même nombre de parties égales, les deux directrices données (CD, C′D′), (EF, C′F′); puis, que l'on joigne les points de division 0 et 16, 1 et 15, 2 et 14, 3 et 13,....., on obtiendra ainsi les diverses génératrices du système A, savoir

(DE, D′C′),......, (GH, G′H′),....., (CF, C′F′);

et d'ailleurs, toutes ces droites seront projetées horizontalement sur des parallèles à la trace *op* du plan directeur P.

568. Quant aux projections verticales de ces mêmes génératrices, elles formeront, par leurs intersections successives, une courbe D′O′F′ *enveloppe* de toutes ces droites, et qui sera une parabole. Car chaque génératrice G′H′ fournissant évidemment la proportion F′G′ : G′C′ :: C′H′ : H′D′, il en résulte que, dans la courbe enveloppe, deux tangentes menées du même point sont coupées par une troisième tangente en parties réciproquement proportionnelles; ce qui est une propriété connue de la parabole du second degré. D'ailleurs, puisque la courbe D′O′F′ forme le contour apparent de la surface sur le plan vertical, il faudra *ponctuer* les parties des génératrices qui se trouveront au-delà de ce contour apparent; ainsi la droite (GMH, G′M′H′), par exemple, sera visible sur le plan vertical dans la portion G′M′, et invisible dans la portion M′H′; en outre, le point de contact M′ qui sépare ces parties, se trouvera nécessairement projeté en M sur la diagonale DF. En effet, dans la parabole D′O′F′, on aura, par le principe rappelé ci-dessus,

G′M′ : M′H′ :: C′H′ : H′D′ :: 11 : 5;

mais dans le losange CDEF, on a aussi évidemment

GM : MH :: GF : DH :: 11 : 5;

d'où l'on conclut G′M′ : M′H′ :: GM : MH, et par conséquent le point M′ se projette en M. Cette circonstance qui se reproduit pour toutes les génératrices,

prouve que la parabole D″O″F″ n'est autre chose que la section faite par le plan vertical DOF, dans le paraboloïde en question.

569. Maintenant, si l'on projetait ce même paraboloïde sur un plan vertical VZ″ parallèle à la diagonale CE, les directrices primitives deviendraient les droites (CD, C″D″), (EF, E″D″); et l'on prouverait, comme ci-dessus, que les projections des génératrices formeraient par leurs intersections successives, une autre parabole C″O″E″ qui représenterait la section faite dans la surface par le plan vertical COE. Les lecteurs familiarisés avec l'application de l'analyse à la géométrie des trois dimensions, reconnaitront dans les plans verticaux OY et OZ qui fournissent ces paraboles, *les deux plans diamétraux principaux* du paraboloïde hyperbolique, lesquels doivent se couper (n° **91**) suivant l'*axe* unique de cette surface; et en effet, nous allons démontrer (n° **572**) que cet axe est la droite (O, O′X′).

570. Le paraboloïde hyperbolique admet, comme nous l'avons vu au n° **551**, un second système de génératrices rectilignes qui sont parallèles au plan directeur Q, déterminé par les deux directrices primitives B et B_2, ou (CD, C′D′) et (EF, C′F′); c'est ici le plan vertical *oq*. Par conséquent ces nouvelles génératrices seront projetées horizontalement sur des parallèles à la trace *oq*; et comme elles doivent en outre s'appuyer sur deux droites du premier système A, par exemple sur (DE, D′C′) et (CF, C′F′) dont les extrémités correspondent déjà (n° **566**) à des plans verticaux DC et EF parallèles à *oq*, on voit qu'il suffira de diviser en un même nombre de parties égales, ces deux nouvelles directrices (DE, D′C′), (CF, C′F′), puis de joindre ensemble les points de division 0 et 16, 1 et 15, 2 et 14, 3 et 16,.......; par-là, on obtiendra les diverses génératrices du système B, savoir : Fig. 120.

(CD, C′D′), ..., (*g*M*h*, G′M′H′), ..., (FE, F′C′).

571. Ces droites du système B se confondront en projection verticale avec celles du système A déjà construites; car dans le losange CDEF, il est évident que les points G et *g*, H et *h*, se trouveront deux à deux sur des perpendiculaires à la ligne de terre; ainsi les projections verticales de ces génératrices B, seront encore tangentes à la parabole principale D′O′F′; mais les parties visibles, comme (M*h*, M′H′), tomberaient sur les parties ponctuées des génératrices A, et réciproquement. C'est pourquoi, afin de laisser subsister pour l'œil la distinction des deux nappes *antérieure* et *postérieure* au plan vertical DOF, nous n'avons pas voulu représenter les génératrices du système B comme réellement

existantes, mais nous les avons marquées seulement en lignes mixtes sur le plan horizontal.

Une coïncidence analogue aura lieu sur le plan vertical VZ″, où les génératrices du système B se trouveront aussi tangentes à la parabole principale C″O″E″.

572. Pour trouver le *sommet* et l'*axe* du paraboloïde hyperbolique, il faut emprunter à l'analyse, ou bien admettre comme des définitions qu'il est loisible de poser, les relations suivantes : L'AXE *du paraboloïde est une droite parallèle aux deux plans directeurs* P *et* Q, *et telle qu'elle coupe la surface en un point par lequel passent deux génératrices qui sont l'une et l'autre perpendiculaires à cet axe : ce point est d'ailleurs appelé* SOMMET (n° 91). D'après cela, on voit que pour des données quelconques, il faudra généralement mener un plan π perpendiculaire à P et Q, puis chercher par le n° 565, les deux génératrices qui sont parallèles à π. Alors le point de rencontre de ces deux droites sera le sommet demandé; et une perpendiculaire à π menée par ce point, sera l'axe de la surface.

FIG. 120. Mais, ici où nous avons adopté (n° 566) les données les plus symétriques, il est clair que l'axe du paraboloïde est vertical, et que par le point (O, O′) il passe deux génératrices horizontales (K′O′I′, KOI) et (K′O′I′, *k*O*i*); donc le point (O, O′) est le sommet demandé, et par suite l'axe est la droite (O, C′O′X′).

Parmi les conditions admises au n° 566, il y en a une seule qu'on ne sera pas toujours maître de remplir; c'est celle qui suppose que les deux directrices données sont *également inclinées* sur le plan horizontal, choisi comme nous l'avons fait. Lorsque cette relation ne sera pas vérifiée, il en résultera seulement que les points D′ et F′ ne se trouveront plus à la meme hauteur, et que le centre O du losange CDEF formé comme il a été dit (n° 566), ne sera plus la projection du sommet de la surface; mais alors on obtiendra ce sommet par la méthode générale, ou plus simplement, en menant à la parabole D′O′F′, *une tangente horizontale*. D'ailleurs, on pourra aussi se procurer deux directrices telles que nous les avons admises, en conduisant à cette parabole deux tangentes également inclinées sur la verticale; et en regardant ces droites comme deux génératrices du paraboloïde, on retrouvera aisément leurs projections horizontales, qui serviront alors à former le losange dont le centre répondra exactement au sommet de la surface.

573. Pour manifester clairement la forme inverse des deux nappes du paraboloïde, qui sont l'une au-dessus, l'autre au-dessous du sommet unique (O, O′)

où elles se réunissent sans discontinuité, coupons cette surface par divers plans perpendiculaires à l'axe (O, C'O'X'). Soit L'R' un de ces plans; il rencontre les projections verticales des génératrices que nous avons construites, en des points que l'on projettera sur le plan horizontal, et qui formeront une courbe composée de deux branches indéfinies, mais séparées, LMl, RNr. Cette courbe est nécessairement une hyperbole (n° 562) dont l'axe réel est ici (MN, M'N'); mais si le plan sécant était au-dessous du sommet, comme T'W', alors la section qui serait encore (n° 562) une hyperbole TUW, *tuw*, aurait pour axe réel la droite (Uu, U'); et si ce plan sécant passait précisément par le sommet (O, O'); la section se réduirait aux deux droites (KOI, K'I') et (kOi, K'I'), dont les projections horizontales sont les asymptotes communes aux deux sections précédentes.

574. *Le plan tangent* pour un point quelconque du paraboloïde, donné par sa projection horizontale λ, s'obtiendra en menant les génératrices $\lambda\alpha$ et $\lambda\delta$, respectivement parallèles à DE et DC; puis, si l'on projette sur le plan vertical, les deux points où chacune de ces droites ira couper les côtés opposés du losange CDEF, on trouvera ainsi les projections verticales de ces génératrices, et il restera à faire passer un plan par ces deux droites. Nous n'effectuerons pas ici ces constructions, dans la crainte de rendre l'épure un peu confuse; mais elles n'offriront aucune difficulté pour le lecteur.

CHAPITRE IV.

Des plans tangents aux surfaces gauches générales.

L'hyperboloïde à une nappe et le paraboloïde hyperbolique sont, parmi les surfaces gauches, les plus simples que l'on puisse concevoir, puisque *toutes leurs directrices* sont *rectilignes;* aussi ce sont les seules dont l'équation ne s'élève pas au-delà du second degré, et pour cette raison, on les appelle *les deux surfaces gauches du second degré*. Comme la construction de leurs plans tangents est facile, on a cherché à y ramener la solution des questions semblables pour les surfaces gauches générales, et l'on y est parvenu au moyen du lemme suivant.

575. LEMME. *Lorsque deux surfaces gauches* S *et* S' *ont une génératrice commune* GLMN, *et qu'elles* SE TOUCHENT *en trois points* L, M, N *de cette droite,* FIG. 116.

alors ces deux surfaces SE RACCORDENT *complétement tout le long de cette génératrice*, c'est-à-dire que, pour chaque point de cette droite, le plan tangent est commun à l'une et à l'autre surface.

Puisqu'en L les deux surfaces ont un plan tangent commun, et qu'il en est de même aux points M et N, trois plans quelconques menés par ces points, couperont les surfaces S et S' suivant des courbes respectivement tangentes,

$$Aa,\ Bb,\ Cc,\quad \text{et}\quad A'a',\ B'b',\ C'c',$$

dont les trois premières pourront être adoptées pour *directrices* de la droite mobile G, quand elle décrit la surface S, tandis que les trois autres courbes seront les directrices relatives à S'. Cela posé, je fais glisser la génératrice G sur les trois directrices Aa, Bb, Cc, et je l'amène dans une position infiniment voisine *glmn* : cette droite mobile n'aura pas cessé d'être en même temps sur la seconde surface S', parce que les courbes directrices de celle-ci, qui sont tangentes aux autres, ont de commun avec elles les éléments linéaires Ll, Mm, Nn; donc les droites G et g, ainsi que toutes les positions intermédiaires de la génératrice, sont communes aux surfaces S et S', ce qui permettrait déjà de conclure que ces surfaces ayant de commun *l'élément superficiel* compris entre G et g, et indéfini en longueur, elles *se touchent* tout le long de la droite G. Mais pour établir encore plus clairement cette conséquence, coupons les surfaces S et S' par un quatrième plan arbitraire, mené par le point quelconque H : alors les sections seront deux courbes Dd et $D'd'$ qui passeront nécessairement par les deux points H et h où ce plan sécant rencontrera les droites G et g; donc les courbes Dd et $D'd'$ ayant deux points communs infiniment voisins, se toucheront suivant l'élément Hh, ou bien elles auront la même tangente HhT. Par conséquent les plans tangents de S et de S' au point H, coïncideront bien l'un avec l'autre, puisque chacun d'eux devra passer par les droites GH et HT.

576. Si les surfaces gauches S et S' sont du genre de celles qui admettent *un plan directeur*, il suffira, pour qu'elles se raccordent tout le long d'une génératrice commune G, qu'elles aient seulement *deux plans tangents communs* en deux points de cette droite, *et qu'en outre le plan directeur soit le même* pour l'une et l'autre surface. Cette proposition se démontrera précisément comme la précédente, et l'on doit voir tout de suite pourquoi, dans le cas actuel, on n'exige que deux plans tangents communs; car dès lors que les directrices Aa et $A'a'$, Bb et $B'b'$, sont respectivement tangentes, et qu'en outre le plan

directeur est le même, cela suffit évidemment pour que la droite G qui glisse sur Aa et Bb parallèlement à ce plan directeur, *ne cesse pas de se trouver à la fois sur les deux surfaces*, quand elle passe de la position G à la position infiniment voisine *g*.

Les deux théorèmes précédents sur le contact des surfaces gauches, sont non-seulement utiles dans plusieurs questions de stéréotomie où l'on veut *raccorder* de pareilles surfaces; mais ils servent aussi de base à la méthode par laquelle on construit leurs plans tangents ou leurs normales, dont la détermination est encore nécessaire pour former les *joints* des voussoirs de certaines voûtes.

577. Du plan tangent *dont le point de contact est donné*. Soient Aa, Bb, Cc, les trois directrices d'une surface gauche quelconque S, et H le point d'une génératrice GLMN, pour lequel on demande le plan tangent. Je mène les tangentes LT, MU, NV, aux directrices données, et en faisant glisser la droite G sur ces trois tangentes fixes, j'obtiendrai (n° **521**) *un hyperboloïde* à une nappe qui aura évidemment en L, M, N, les mêmes plans tangents que S. Donc ces deux surfaces se toucheront (n° **575**) dans tous les points de la génératrice GLMN; et par suite, la recherche du plan tangent de la surface S au point H, sera ramenée à celle du plan tangent de cet hyperboloïde en ce même point, problème dont la solution a été indiquée au n° **530** : mais nous allons donner une méthode encore plus simple au n° **579**. Fig. 117.

578. Observons d'abord que pour construire un *hyperboloïde de raccordement* le long de la génératrice G, il n'est pas nécessaire d'employer précisément les trois tangentes LT, MU, NV : il suffirait d'adopter pour directrices trois droites quelconques, situées respectivement dans les plans GLT, GMU, GNV qui touchent la surface S aux points L, M, N; car l'hyperboloïde ainsi formé aurait encore évidemment trois plans tangents communs avec la surface S. Par conséquent *l'hyperboloïde de raccordement* est susceptible d'une infinité de formes; aussi, parmi tous ces hyperboloïdes tangents, il y en aura un qui offrira un contact plus intime avec la surface S, et qu'on appelle hyperboloïde *osculateur;* mais comme sa construction ne nous est pas utile à présent, nous en parlerons en traitant de la courbure des surfaces (*voyez* n° **744**).

579. Un *paraboloïde de raccordement* offre la méthode la plus simple pour construire le plan tangent d'une surface gauche générale S. En effet, dans le plan tangent de S en N, lequel est déterminé par GN et NV, on peut toujours tracer une droite NR qui soit parallèle au même plan que LT et MU; car cela se

réduit à couper le plan tangent GNV par un plan parallèle à LT et MU. Alors, si j'adopte les trois droites LT, MU, NR, qui se trouvent *parallèles à un plan unique*, pour diriger le mouvement de la génératrice G, j'obtiendrai (n° **553**) un paraboloïde qui aura encore trois plans tangents communs avec la surface S, dans les points L, M, N; donc le plan qui touchera S en H, sera le même (n° **575**) que le plan tangent du paraboloïde ainsi formé; or ce dernier plan se construira par la méthode très-simple du n° **556**. Nous offrirons bientôt un exemple de ces constructions dans le problème du n° **608**.

580. Lorsque la surface S admettra elle-même *un plan directeur* P, il suffira alors d'adopter les tangentes LT et MU aux deux courbes directrices, pour faire glisser la génératrice GLM parallèlement au plan P; par-là cette droite décrira immédiatement un paraboloïde qui aura bien *deux plans tangents communs* avec S et *le même plan directeur*. Donc (n° **576**) ce paraboloïde touchera la surface S tout le long de GLM; de sorte qu'en construisant le plan tangent de ce paraboloïde pour le point H (n° **556**), ce sera aussi le plan qui touchera la surface S en ce point. (Voyez l'exemple du n° **598**.)

581. Si une des directrices linéaires était remplacée par une surface directrice Σ, à laquelle la génératrice de S devrait demeurer tangente (n° **516**), la courbe $\alpha\alpha'\alpha''$.... formée par la suite des points de contact des génératrices $G\alpha$, $G'\alpha'$, $G''\alpha''$,.... avec Σ, serait au fond la troisième directrice linéaire; mais sans construire cette courbe, ni sa tangente, il n'y a qu'à observer que le plan tangent de la surface Σ au point α, est le même que le plan tangent de la surface gauche proposée S, puisque l'un et l'autre doivent renfermer la droite $G\alpha$ et la tangente de la courbe $\alpha\alpha'\alpha''$.... Donc il suffira de tracer *dans le plan tangent* de Σ, relatif au point α, une droite quelconque αR, laquelle jointe aux tangentes des deux autres directrices linéaires, servira encore à former une surface auxiliaire du second degré, qui aura trois plans tangents communs avec S, et dont on tirera le même parti qu'au n° **577**. Cette méthode trouvera des applications utiles dans les épures relatives aux escaliers en pierre ou en bois; voyez aussi l'exemple du n° **604**.

582. Enfin, il peut arriver que la définition de la surface gauche S, ne fasse pas connaître immédiatement *trois* directrices, comme nous en avons cité des exemples au n° **519**; ou bien, que ces directrices étant données, on ne sache pas construire leurs tangentes. Dans ce cas, désignons par G la génératrice sur laquelle est situé le point H où l'on veut trouver le plan tangent, et construisons plusieurs génératrices voisines G_1, G_2, et G', G'',... qui précèdent et qui suivent la proposée. Alors, un plan π mené arbitrai-

rement par la droite G, coupera ces génératrices voisines en des points α_3, α_2, α', α'', qui fourniront une courbe $\alpha_3\alpha_2\alpha'\alpha''$... dont la rencontre α avec G, fera connaître le point dans lequel le plan π *touche* la surface S; en effet, ce plan π renfermant la droite $G\alpha$ et la tangente de la courbe $\alpha\alpha'\alpha''$..., sera bien tangent à S dans le point α. De même, en conduisant par la droite G un autre plan π', on trouvera le point 6 où il sera tangent à S; puis, un troisième plan π'', mené par G, touchera cette surface en un certain point γ. Cela posé, dans les trois plans tangents π, π', π'', on tracera des droites quelconques αR, 6T, γV, que l'on adoptera pour directrices d'une surface gauche du second degré, laquelle touchera bien la surface proposée S tout le long de la droite G (n° **578**); donc la recherche du plan tangent de S au point H, sera réduite à trouver le plan tangent de la surface auxiliaire du second degré, pour ce même point; problème qui se résoudra comme au n° **530** ou **556**, selon que les trois directrices rectilignes auront été choisies parallèles ou non, à un même plan.

583. Il résulte de là *que tout plan π mené par une droite G d'une surface gauche, se trouve* en général *tangent à cette surface dans un certain point α*, qui se détermine en construisant, comme ci-dessus, la courbe $\alpha_3\alpha_2\alpha'\alpha''$.... suivant laquelle ce plan coupe la surface proposée. Cependant, le plan π deviendrait *asymptote* de la surface, si la courbe $\alpha_3\alpha_2\alpha'\alpha''$.... ne rencontrait la droite G qu'à l'infini, ainsi qu'il est arrivé dans l'hyperboloïde au n° **546**; ou encore, si ce plan ne coupait pas les génératrices voisines de G, comme dans le cas du paraboloïde examiné au n° **561**.

584. Ce qui précède nous permet de résoudre un problème intéressant, du moins sous le rapport de la théorie : c'est de *construire la tangente à une courbe D tracée arbitrairement*, et tout à fait inconnue quant à ses propriétés géométriques, mais donnée par ses deux projections.

Pour cela (*), faisons passer par cette courbe une surface gauche S qui ait pour directrices la courbe D et deux droites A et B prises à volonté. Après avoir construit la génératrice $G\alpha$ qui passera par le point α donné sur la courbe D, on saura trouver par le n° **582**, le plan tangent de S pour le

(*) Cette méthode ingénieuse est due à M. *Hachette*. Mais il faut avouer que, dans la pratique, la multiplicité des opérations qu'elle entraîne, ne produira pas un résultat plus certain que si l'on se contentait de mener cette tangente au moyen de la règle, en lui donnant un petit arc de commun avec la courbe proposée.

point α, *sans employer la tangente inconnue de la directrice* D. De même, en formant une seconde surface gauche S′, dont les directrices seraient la courbe D et deux droites A′, B′, très-différentes des premières, on saura construire aussi le plan tangent de S′ pour le point donné α. Or, puisque la courbe D est en même temps sur les deux surfaces S et S″, sa tangente au point α devra être située dans les deux plans tangents dont nous venons de parler; et par conséquent elle sera fournie par l'intersection de ces plans.

Pour simplifier les opérations graphiques, on pourra former les deux surfaces gauches S et S′, avec deux seules directrices D et A, D et A′, en y joignant d'ailleurs un plan directeur commun P. Une seule surface S suffirait évidemment, si la courbe D était plane, puisque le plan de cette courbe devrait renfermer la tangente demandée.

585. Des plans tangents *dont le point de contact n'est pas donné*. On peut appliquer aux surfaces gauches les méthodes générales indiquées pour ces sortes de problèmes dans le livre V; mais ici, elles sont susceptibles de quelques simplifications notables.

Si le plan tangent à la surface S, est assujetti seulement à *passer par un point donné* V, le problème admettra une infinité de solutions (n° **348**), lesquelles seront fournies toutes par *la ligne de contact d'un cône circonscrit* à la surface S, et ayant son sommet en V. Pour obtenir cette courbe, il suffira de mener par le point V et par chacune des diverses génératrices G, G′, G″,.... des plans qui seront tangents à la surface S, en des points α, β, γ,..... que l'on saura construire (n° **583**); alors la courbe $\alpha\beta\gamma$..... qui réunira tous ces points, sera la ligne de contact cherchée.

586. Cette marche sera fort commode, si la surface S est du second degré; car la ligne auxiliaire $\alpha_1\alpha_2\alpha'\alpha''$ du n° **582**, qui sert à trouver le point de contact α du plan mené par la génératrice G, se réduira à *une droite* dont il suffira de construire deux points; et la courbe définitive $\alpha\beta\gamma$... sera elle-même plane et du second degré (n° **533**).

On pourrait ramener au cas actuel le problème du numéro précédent, en construisant le paraboloïde de raccordement le long de chaque génératrice G de la surface quelconque S.

587. Lorsque le plan tangent à la surface S, devra être *parallèle à une droite donnée* D, on conduira par les diverses génératrices G, G′, G″,..... des plans parallèles à D; et en déterminant (n° **583**) leurs points de contact α, β, γ,... avec la surface S, la courbe $\alpha\beta\gamma$.... sera *la ligne de contact d'un cy-*

lindre circonscrit à S et parallèle à D; par conséquent cette courbe $\alpha\epsilon\gamma$.. fournira toutes les solutions du problème proposé (n° **378**).

588. Si la surface S est du second degré, on retrouvera les mêmes simplifications qui ont été indiquées au n° **586**; et l'on pourra aussi ramener au cas actuel, le problème analogue pour une surface quelconque S.

589. Lorsque le plan tangent à la surface gauche quelconque S devra *passer par une droite donnée* D, il n'y aura qu'à suivre la marche générale indiquée n° **395**, laquelle consiste à chercher les points communs aux courbes de contact de deux cônes qui sont circonscrits à S, et qui ont leurs sommets placés sur la droite D.

590. Mais si la surface gauche est du second degré, on résoudra le problème d'une manière beaucoup plus simple, par les considérations suivantes. Le plan tangent cherché devra contenir, outre la droite D, les deux génératrices de l'hyperboloïde (ou du paraboloïde) qui se coupent au point de contact inconnu; donc une, au moins, de ces génératrices ira rencontrer D en un point M, dans lequel cette dernière droite traversera l'hyperboloïde.

D'après cela, si l'on commence par chercher (n° **534**, 5°) les deux points M et M' où la droite donnée D coupera généralement la surface; puis, si l'on construit les quatre génératrices MA et MB, M'A' et M'B', qui passent par ces deux points, il n'y aura plus qu'à conduire par les droites D et MA, D et MB, deux plans qui satisferont au problème, puisqu'ils seront tangents quelque part à la surface (n° **545**). D'ailleurs, comme le plan DMA renfermera évidemment la génératrice M'B' qui a un point M' dans ce plan et qui nécessairement rencontre MA, et que l'autre plan DMB contiendra semblablement la génératrice M'A', on voit que les points de contact α et ϵ de ces plans tangents, seront fournis immédiatement par la rencontre de MA avec M'B', et de MB avec M'A'.

591. Il résulte de là que le problème en question sera impossible, toutes les fois que la droite D ne rencontrera pas l'hyperboloïde. Cependant, il ne faut pas comprendre dans cette exclusion, le cas où cette droite venant à coïncider avec une arête du cône asymptote, se trouverait elle-même asymptote de la surface : alors le plan tangent demandé serait celui qui touche ce cône le long de la droite D.

592. Considérons enfin, la cas où le plan tangent cherché doit être *parallèle à un plan donné* π. Si la surface gauche S est quelconque, il faudra encore

recourir à la marche générale du n° **421**; mais on pourra y substituer les méthodes suivantes, lorsque la surface sera du second degré.

593. Pour un *hyperboloïde* gauche, on cherchera comme au n° **548**, les génératrices A et B, A′ et B′, qui dans les deux systèmes, se trouvent parallèles au plan π; on sait que les deux premières seront parallèles entre elles, et que les deux autres offriront une relation semblable. Alors, le plan conduit par les droites A et B′, ainsi que celui qui passera par B et A′, satisferont évidemment au problème, puisqu'ils renfermeront chacun deux droites parallèles à π et qui se coupent. D'ailleurs, les points de contact seront immédiatement fournis par la rencontre des génératrices A et B′, B et A′; et le problème pourra admettre deux solutions, ou une seule, ou aucune, suivant la discussion faite au n° **547**.

594. Pour un *paraboloïde* gauche, on trouvera encore plus facilement par le n° **565**, les deux *seules* génératrices A et B qui, dans les deux systèmes, sont parallèles au plan π; et comme ces deux droites ne sauraient être ici parallèles entre elles (n° **554**, 3°), le plan conduit suivant ces deux lignes, sera bien parallèle à π, et fournira la solution *unique* du problème actuel. D'ailleurs, le point de contact de ce plan tangent sera donné immédiatement par la rencontre des génératrices A et B.

On aurait pu se contenter de construire une seule A de ces génératrices, puis de mener par celle-ci un plan parallèle à π; mais alors il resterait à trouver le point de contact de ce plan tangent, en cherchant la seconde branche de son intersection avec le paraboloïde, laquelle serait précisément la génératrice B. Le problème peut être impossible ou indéterminé, selon ce que nous avons dit au n° **565**.

Fig. 118. **595. THÉORÈME.** *Dans toute surface gauche S, les diverses normales MN, M′N′, M″N″,..... menées par tous les points d'une même génératrice G, forment toujours un paraboloïde hyperbolique.*

Si l'on désigne par Σ la surface lieu de toutes ces normales, et qu'on lui fasse faire un quart de révolution autour de la droite G, chaque normale MN qui est déjà perpendiculaire à cet axe de rotation, décrira un plan et se rabattra suivant une droite MT qui formera des angles droits avec GM et MN; par conséquent MT se trouvera dans le plan tangent de la surface S. D'ailleurs, comme ce déplacement simultané de toutes les normales, altère seulement la position de la surface Σ, et non sa forme, il suffira d'examiner quelle est la surface Σ' produite par les diverses droites MT, M′T′, M″T″,..... qui sont *tangentes* à S,

et satisfont en outre à la condition d'être toutes *perpendiculaires à la génératrice* G.

Pour cela, je fais glisser la droite G sur trois quelconques de ces tangentes, savoir : MT, M'T', M''T''; et comme ces directrices sont évidemment parallèles à un même plan, je forme ainsi un paraboloïde (n° 555) qui, ayant les mêmes plans tangents que la surface S aux points M, M', M'', *touchera* cette surface (n° 575) tout le long de GMM'. Or, je dis que les autres tangentes M'''T''',... sont pareillement situées sur ce paraboloïde; car, si je le coupe par un plan perpendiculaire à GM et mené par le point M''', on sait (n° 551) que la section sera *une droite* M'''R qui, à cause du *raccordement* établi entre S et le paraboloïde, se trouvera contenue dans le plan tangent de la surface primitive S, c'est-à-dire dans le plan GM'''T'''; d'où il suit que les deux droites M'''R et M'''T''' coïncideront entièrement, puisqu'elles seront l'une et l'autre perpendiculaires à GM''', et placées toutes trois dans un même plan GM'''T''' : donc M'''T''' est bien située sur le paraboloïde que nous avons construit avec les trois premières tangentes. D'ailleurs, comme ce raisonnement s'appliquerait à toutes les autres tangentes de S, perpendiculaires à la génératrice G, il demeure prouvé que la surface Σ', lieu de ces tangentes, est un paraboloïde hyperbolique; et la même conclusion s'étend à la surface Σ formée par les normales MN, M'N',..., puisque celle-ci ne diffère de Σ' que par sa position dans l'espace (*).

Ce théorème remarquable par sa grande généralité, puisqu'il subsiste pour toutes les surfaces gauches, servira à assigner la nature des *joints* normaux dans les voûtes où la *douelle* sera gauche, et à prévoir aussi la forme des sections faites dans ces joints par divers plans.

(*) Cette démonstration fort simple et purement synthétique, est due à M. *J. Binet*.

CHAPITRE V.

Exemples divers de surfaces gauches.

§ 1er. *Conoïde droit.*

FIG. 121. **596.** Nous avons dit (n° **520**) qu'un *conoïde* était la *surface engendrée par une droite mobile, qui s'appuie constamment sur* UNE DROITE *et sur une courbe fixes, en demeurant parallèle à un plan donné.* Ici, nous prendrons ce plan directeur pour le plan horizontal de projection, et pour directrices, l'ellipse (AZ'H, AH) et la verticale (O'Z', O); cette dernière étant perpendiculaire au plan directeur, le conoïde sera *droit.* Les diverses génératrices se construiront bien aisément, puisqu'il suffira de conduire un plan horizontal arbitraire B'G', qui coupera l'axe au point (O, O''), et l'ellipse aux points (B', B), (G', G); puis, en joignant ces points, on trouvera (OB, O''B') et (OG, O''G') pour deux génératrices du conoïde; et les autres s'obtiendront d'une manière semblable.

597. Il est certain que cette surface sera *gauche;* car, quelque rapprochés que soient deux points B' et C' pris sur la directrice, les génératrices correspondantes (BO, B'O'') et (CO, C'O'') ne seront point parallèles, puisque leurs projections horizontales se coupent en O; et d'ailleurs ces génératrices ne pourront se couper dans l'espace, attendu qu'elles sont situées dans des plans horizontaux différents. En outre, il faut observer que ces droites prolongées indéfiniment, formeront une seconde nappe projetée dans l'espace angulaire *a*O*h*; et que la verticale (O, O'Z') suivant laquelle se coupent les deux nappes de la surface, sera ici une *ligne de striction,* attendu qu'elle indiquera la direction de la plus courte distance entre deux génératrices quelconques.

598. Le plan tangent de ce conoïde, pour un point (M, M') donné sur une génératrice, s'obtiendra en appliquant ici la méthode générale indiquée au n° **580**. Je trace donc la tangente B'T au point de l'ellipse où aboutit la génératrice en question (OMB, O''M'B'), et comme l'autre directrice (O, O'Z') est une droite qui est elle-même sa propre tangente, je la conserve, et je fais glisser sur cette verticale O et sur la tangente B'T, la génératrice (OMB, O''M'B') toujours horizontale; par là j'obtiens un *paraboloïde de raccordement,* dont une seconde génératrice du même système est évidemment la droite TO tracée dans le plan horizontal de projection. Alors je coupe les deux génératrices OT et (OMB, O''M'B'), par le plan vertical MP évidemment *parallèle*

aux deux directrices, lequel devra donner (nº 551) pour section dans le paraboloïde, *une droite* du second système qui sera (MP, M′P′). Cela posé, le plan qui passera par les deux droites (MP, M′P′) et (MB, M′B′), situées l'une et l'autre sur le paraboloïde, sera bien le plan tangent de cette surface auxiliaire, et aussi du conoïde proposé, puisque ces deux surfaces se raccordent (nº 576) tout le long de la génératrice (OMB, O″M′B′). Or il est facile de voir que ce plan aura pour trace horizontale la droite Pα parallèle à MB, et pour trace verticale la droite αB′ qui doit se trouver aussi parallèle à M′P′; ainsi PαB′ est le plan tangent du conoïde pour le point (M, M′).

599. Si l'on voulait avoir le plan tangent relatif à un autre point (N, N′) situé sur la même génératrice, le paraboloïde déjà construit servirait encore; il suffirait de le couper par le plan vertical NQ parallèle aux deux directrices, et la section qui serait la droite (NQ, N′Q′), combinée avec la génératrice (NB, N′B′), fournirait le plan QϐB′ pour celui qui touche le conoïde en (N, N′). On reconnaît ici que les divers plans tangents de cette surface, le long de la génératrice (OB, O″B′), sont bien distincts les uns des autres, quoiqu'ils contiennent tous cette génératrice; et par suite, leurs traces horizontales sont toutes parallèles à OB. Enfin, si l'on assignait le point de contact en (O, O″), le plan tangent deviendrait le plan vertical OBB′.

600. Il est bon d'observer que toutes les droites B′T, M′P′, N′Q′,..... doivent aller rencontrer la verticale O′Z′ en un même point que j'appellerai ω′; car ce sont les projections d'autant de génératrices du paraboloïde, appartenant au second système, et qui doivent toutes s'appuyer sur la génératrice du premier mode (OO′, ω′). D'ailleurs, comme les droites M′P′, N′Q′,.... seraient évidemment les tangentes des sections faites dans le conoïde par les plans verticaux MP, NQ,...., la relation précédente s'accorde bien avec la nature de ces courbes, qui sont ici des ellipses ayant toutes *un axe commun* O′Z′, et qui se construiraient aisément en projetant sur le plan vertical, les points où chaque plan tel que MP, rencontre les diverses droites OA, OB, OC,.... du conoïde.

§ 2. *Conoïde circonscrit à une sphère.*

601. Imaginons *une droite mobile qui, restant toujours horizontale, s'appuie sur une droite fixe* (AH, A′H′) *et sur une sphère* (RI, O′I′) *à laquelle elle demeure tangente :* la surface ainsi décrite sera encore un conoïde, dans lequel la directrice curviligne sera remplacée par une surface que devront toucher les diverses génératrices. Pour obtenir ces dernières, on mènera un plan horizontal FIG. 123.

quelconque C'S', qui rencontre la droite fixe au point (C, C'), et coupe la sphère suivant un cercle du rayon K'S'; alors, en conduisant à la projection horizontale de ce cercle, les deux tangentes CM et C*m*, ce seront deux génératrices du conoïde, qui seront projetées verticalement suivant la droite unique C'*m*'. D'ailleurs, si l'on projette sur cette dernière droite, les points de contact M et *m* en M' et *m*'; puis, si l'on répète des opérations semblables pour tous les plans horizontaux qui peuvent couper la sphère donnée, on obtiendra une courbe fermée

(RLMNPQR*qpnml*R, R'L'M'N'P'Q'R''*q'p'n'm'l'*R')

pour la ligne de contact de la sphère avec le conoïde circonscrit : cette courbe, si elle avait été connue primitivement, aurait pu remplacer la sphère directrice.

602. Afin d'obtenir plus de netteté dans notre épure, nous avons supposé ici que les génératrices du conoïde étaient terminées à leurs points de contact avec la sphère, ce qui laisse *visible* toute la partie de cette surface, située au delà de la courbe de contact par rapport à la droite (AH, A'H'); mais en deçà de cette droite, il existe une seconde nappe du conoïde, dont la partie *supérieure* et *visible sur le plan horizontal*, se trouve formée par les prolongements Bλ, Cμ, Dν,.... des génératrices *inférieures* B*l*, C*m*, D*n*,..... de l'autre nappe, et réciproquement. D'ailleurs, pour compléter le contour apparent du conoïde sur le plan horizontal, il faudrait tracer les courbes *enveloppes* des droites AR, B*l*, C*m*,..... et GR, FQ, EP,....; courbes qui seraient fournies immédiatement par les intersections successives de ces génératrices, si en les multipliant davantage, nous n'avions pas craint de jeter quelque confusion dans l'épure.

603. Ici, la droite (AH, A'H') n'est plus une ligne de *striction*, comme cela arrivait dans l'exemple du n° **597**; mais, par les raisons citées dans cet article, on verra que la surface actuelle est encore *gauche*, aussi bien que *tous les conoïdes*.

604. Cherchons le plan tangent relatif à un point quelconque (V, V') situé sur la génératrice (CM, C'M'); et comme ici la seconde directrice est une surface, et non une courbe, employons la méthode du n° **581**. Je construis donc d'abord, une tangente de la sphère au point (M, M'), et pour plus de simplicité, j'adopte la tangente du méridien qui est évidemment (RMT, Z'M'T'); puis, en faisant glisser sur cette tangente et sur la directrice rectiligne (AH, A'H'), la droite (CM, C'M') toujours horizontale, je forme un paraboloïde qui *raccordera* (n° **576**) le conoïde tout le long de cette génératrice : d'ailleurs,

une seconde position de cette droite mobile sera évidemment la ligne TH située dans le plan horizontal de projection. Cela posé, je mène par le point (V, V'), un plan parallèle aux deux directrices (AH, A'H') et (MT, M'T'); ce plan qui a pour trace horizontale la ligne XY facile à trouver, doit donner dans le paraboloïde une section rectiligne (n° 551), laquelle est par conséquent la droite (αV, α'V'); alors cette droite, jointe à (CVM, C'V'M'), déterminera un plan $\alpha\beta\gamma'$ qui sera tangent au paraboloïde, et aussi au conoïde primitif dans le point (V, V').

605. Ce plan, quoique tangent au conoïde, doit couper cette surface (n^{os} **512** et **585**); et l'intersection totale se composera de la droite (CVM, C'V'M') et d'une courbe passant par le point (V, V'), laquelle s'obtiendra aisément en cherchant les points de rencontre du plan $\alpha\beta\gamma'$ avec les diverses génératrices du conoïde que nous avons construites.

§ 3. *Le Biais passé, dit : Corne de vache.*

606. Cette surface, employée quelquefois à voûter un *passage biais* compris entre deux plans verticaux parallèles AC et BD, a pour génératrice une droite mobile qui s'appuie constamment, 1° sur le cercle vertical (AZ'B, AB); 2° sur un second cercle (C'Z'D', CD) égal et parallèle au premier; 3° sur une droite O'OO" perpendiculaire aux deux cercles précédents, et menée par le centre O du parallélogramme ABDC. Pour construire les diverses positions de la génératrice mobile, on mènera par la droite OO' un plan quelconque OO'K'; il coupera les deux cercles aux points (K', K), (L', L), et en les joignant par une droite (KL, K'L'), ce sera une génératrice de la surface en question. De même, (M'N'O', MNO") sera une autre position de la droite mobile; et quand cette ligne viendra passer par les deux points des circonférences qui sont projetés en Z', elle se trouvera horizontale, et ne rencontrera plus la directrice OO' qu'à l'infini. Au delà de cette position, la génératrice mobile s'inclinera en sens contraire, et ira couper la directrice OO' derrière le plan vertical (*). Fig. 122.

(*) Il y aurait, à la vérité, un autre moyen de faire remplir à la droite mobile la condition de s'appuyer constamment sur les trois directrices assignées. Car, si cette droite passant toujours par le point fixe O, glissait sur le demi-cercle *supérieur* (AZ'B, AB), elle rencontrerait nécessairement aussi la moitié *inférieure* du second cercle, et réciproquement; de sorte que la surface ainsi produite serait un cône du second degré. Mais, comme on aperçoit bien que la position de cette surface n'est point propre à former une voûte qui recouvre l'espace ACDB, nous négligeons ici ce mode de génération.

607. La surface ainsi produite est *gauche*, puisque deux génératrices quelconques se trouvant dans des plans menés suivant OO′, ne pourraient se couper que sur cette droite; or elles vont la rencontrer en des points différents, comme on le voit par les projections horizontales BD, KL, MN,.... D'ailleurs, ces diverses projections formeront par leurs intersections successives, une courbe enveloppe de toutes ces droites, et qui sera le contour apparent de la surface sur le plan horizontal. Quant à la nature de cette courbe, et à l'équation de la surface elle-même, on pourra consulter *l'Analyse appliquée à la géométrie des trois dimensions*, chapitre XV.

608. Construisons le plan tangent de cette surface gauche, pour le point (G, G′) donné sur la génératrice (MNO″, M′N′O′); et pour cela, formons d'abord un paraboloïde auxiliaire ayant pour directrices trois tangentes de la surface qui soient *parallèles à un même plan* (n° 579). Deux de ces directrices seront les tangentes M′T′ et (N′V′, NV); la troisieme doit être une droite parallele au plan vertical, et menée par le point O″ dans le plan qui touche la surface en ce point. Or ce plan tangent devant contenir la droite O″O′ et la génératrice (MNO″, M′N′O′), est precisément le plan O″O′M′, et par suite, la troisième directrice du paraboloïde auxiliaire est (O″μ, O′M′).

Cela posé, je fais glisser sur ces trois directrices la droite mobile (MNO″, M′N′O′), et je cherche la position qu'elle prend, lorsqu'elle arrive au point (V′, V), par exemple. Pour cela, je conduis par ce point et par la directrice (O″μ, O′M′), un plan dont la trace horizontale est evidemment O″Vα, et la trace verticale une droite $\alpha\beta'$ parallele à O′M′; puis, comme ce plan rencontre la première directrice M′T′ au point (β', β), j'en conclus que (βVγ, β'V′γ') est une seconde position de la génératrice (MNO″, M′N′O′) du paraboloïde auxiliaire. Maintenant, je coupe ces deux lignes par le plan vertical GH parallele aux trois directrices, et la droite (GH, G′H′) est une génératrice (n° 551) appartenant au second mode de génération du paraboloïde; par conséquent, le plan qui passera par les droites (GH, G′H′) et (MNO″, M′N′O′), savoir O″PM′, sera bien le plan tangent du paraboloïde, et aussi de la surface gauche proposée, pour le point en question (G, G′). On observera que la trace PM′ doit se trouver précisément parallele à la projection verticale G′H′ d'une des droites que contient ce plan.

609. De là on conclura aisément la normale de la surface gauche au point (G, G′); et en construisant de même les autres normales pour divers points de la portion (M′N′, MN) de la génératrice, on obtiendrait un paraboloïde

hyperbolique (n° 595), qui serait propre à former *le joint normal* de cette petite voûte.

§ 4. *Des hélicoïdes gauches.*

610. Après avoir construit une hélice à base circulaire (ABCD......, A'B'C'D'H'A''H''), imaginons *une droite mobile* (AO, A'a') *qui glisse sur cette hélice et sur son axe* (O, O'Z'), *en formant d'ailleurs un angle constant avec cet axe* : nous produirons ainsi un *hélicoïde* qu'il ne faut pas confondre avec *l'hélicoïde développable* déjà considéré au n° 455; car celui dont il est ici question est *gauche*, comme nous allons le démontrer, après avoir appris à construire les diverses positions de sa génératrice. FIG. 124.

611. Pour obtenir celle qui passera par le point quelconque (F, F') de l'hélice, prenons sur l'axe vertical un intervalle *a'f'* égal à la différence de niveau des points (F, F') et (A, A'), et la droite (F'f', FO) sera la génératrice demandée; car elle formera avec l'axe et le rayon du cylindre qui aboutirait au point (F, F'), un triangle rectangle évidemment égal à A'a'O'; de sorte que les angles aux sommets de ces deux triangles, seront bien les mêmes, comme l'exige la loi de mouvement citée plus haut. Mais, pour rendre cette opération plus uniforme et plus simple, on observera que le tracé de l'hélice primitive a déjà conduit (n° 451) à diviser la circonférence ABCH..... et *le pas* de l'hélice A'A'', en un même nombre de parties égales, ici *quatorze;* par conséquent, si l'on commence par marquer sur l'axe vertical, à partir du point *a'*, des intervalles *a'b'*, *b'c'*, *c'd'*, *d'e'*, *e'f'*,.... tous égaux aux divisions du pas de l'hélice, il n'y aura plus qu'à joindre par des droites, les points correspondants B' et *b'*, C' et *c'*, D' et *d'*,..... pour obtenir les projections verticales B'*b'*, C'*c'*, D'*d'*,.... des diverses génératrices projetées horizontalement sur les rayons BO, CO, DO,.....

612. D'après cette construction, il est évident que deux génératrices, quelque rapprochées qu'elles soient, ne se trouveront jamais dans un même plan; puisque leurs projections horizontales se couperont toujours en O, et que les points situés sur la verticale O, y seront placés à des hauteurs différentes : donc cet hélicoïde est une *surface gauche*.

613. Puisque les divers triangles rectangles, formés par chaque génératrice avec l'axe et le rayon du cylindre qui aboutit au point correspondant de l'hélice, sont (n° 611) tous égaux à A'a'O', il s'ensuit que la portion de la droite mobile, comprise entre l'axe et l'hélice directrice, conserve toujours la même longueur; par conséquent on peut aussi regarder l'hélicoïde gauche qui nous

38

occupe, comme engendré par *une droite de longueur constante* (AO, A'a') *qui glisse sur une hélice à base circulaire et sur son axe.*

614. Dans ce mouvement, où la longueur de la génératrice et son inclinaison sur l'axe demeurent invariables, il est évident qu'un point quelconque (α, α') de cette droite mobile, reste à une distance constante αO de l'axe vertical (O, O'Z'), c'est-à-dire que ce point se meut sur le cylindre droit qui a pour base le cercle $\alpha\beta\gamma$..... En outre, comme les deux extrémités de la génératrice s'élèvent, à la fois, d'une quantité égale $a'b'$, ou $a'c'$, ou $a'd'$,..., il en sera de même du point (α, α'), dont les ordonnées verticales *comptées à partir du plan horizontal* $\alpha'\omega'$, seront toujours égales aux ordonnées du point (A, A') au-dessus du plan A'O'. Or celles-ci sont, par la nature de l'hélice que parcourt le point (A, A'), proportionnelles aux arcs AB, AC, AD,..... ou bien aux arcs $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, $\alpha\delta$,.....; donc aussi ces derniers sont proportionnels aux ordonnées des positions qu'occupe le point (α, α') au-dessus du plan horizontal $\alpha'\omega'$, lorsqu'il se projette successivement en β, γ, δ,.....; par conséquent (n° **446**) *la courbe*

$$(\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\lambda\ldots\ldots,\ \alpha'\beta'\gamma'\delta'\varepsilon'\lambda'\pi'\alpha''\beta''\gamma''\lambda'')$$

décrite par un point quelconque (α, α') *de la génératrice, pendant son mouvement, est une hélice de même pas que l'hélice primitive*, mais tracée sur un cylindre concentrique au premier.

Pour construire cette hélice, il suffirait, après avoir décrit le cercle du rayon Oα, de projeter les points β, γ, δ,.... en β', γ', δ',..... sur les génératrices déjà tracées; mais, afin d'éviter la rencontre de lignes très-obliques, il vaudra mieux couper ces génératrices par des horizontales élevées au-dessus de $\alpha'\omega'$, de 1, 2, 3,..... fois l'intervalle $a'b'$.

615. D'après cette propriété, on pourrait aussi définir l'hélicoïde gauche, comme engendré *par une droite qui glisse constamment sur deux hélices concentriques, de rayons inégaux, mais de même pas, et sur l'axe commun de ces deux courbes.* Par là, on assignerait trois directrices à la surface, et les autres conditions énoncées aux n^{os} **610** et **613** se trouveraient remplies d'elles-mêmes.

616. Il est évident que l'hélicoïde gauche admet encore *une nappe supérieure*, laquelle serait engendrée par le prolongement α'U' de la droite (α'A', OA) qui a déjà décrit *la nappe inférieure*. Cette dernière est la seule que nous ayons voulu représenter ici, afin d'en laisser voir plus distinctement la forme; toutefois, nous ferons observer que non-seulement les deux nappes auraient de commun la droite (O, O'Z'), mais *qu'elles se couperaient encore suivant une ou*

plusieurs hélices de même pas que l'hélice (ABCD...., A'B'C'D'....). En effet, si l'on compare deux positions de la génératrice qui soient situées dans le même méridien, telles que (AO, A'a'U') et (OH, h'H'), on voit qu'elles se coupent en un point u' commun aux deux nappes, et qui restera constamment sur l'une et sur l'autre, lorsqu'il sera entraîné par le mouvement simultané de ces deux droites autour de l'axe. Or nous avons démontré (n° 614) que dans ce mouvement, un point quelconque α' ou u' de la génératrice décrivait une hélice concentrique avec (ABCD....., A'B'C'D'.....) et de même pas que celle ci : donc, c'est bien une telle courbe qui formera l'intersection des deux nappes de l'hélicoïde; et il existerait d'autres sections analogues, si l'on prolongeait les génératrices assez loin pour que A'a'U' rencontrât h''H'', h'''H''',..... en des points u'', u''',.... qui décriraient encore des hélices communes aux deux nappes.

617. *Représentation graphique de la surface.* Elle est donnée par l'ensemble des génératrices successives que nous avons construites; et si l'on restreint l'hélicoïde à sa nappe inférieure, et que l'on termine les génératrices aux points où elles s'appuient sur l'hélice directrice (ABCD....., A'B'C'D'....), le contour apparent de la surface sur le plan horizontal se réduira au cercle ABCHLA. Fig. 124.

Quant au plan vertical de projection, le contour apparent se composera d'abord des portions A'B'C'D'G'H'L' et P'Q'A''B''C''F''H''L'' de l'hélice directrice; puis, de diverses courbes symétriques X'Y'B', x'y'L', X''Y''B'',.... qui seront les *enveloppes* des projections verticales des génératrices. En effet, les droites A'a', B'b', C'c', D'd', formant avec l'axe O'Z' des angles qui vont toujours en diminuant, produiront par leurs intersections successives un polygone dont la convexité sera tournée vers l'axe; et si l'on conçoit ces génératrices multipliées indéfiniment, ce polygone deviendra une courbe X'Y'B' tangente à chacune de ces droites, et qui aura pour *asymptote* la génératrice particulière d'A' dont l'inclinaison sur l'axe est *maximum* en projection verticale. Cette courbe touchera aussi l'axe O'Z', qui est lui-même la projection d'une génératrice de la surface, en un certain point X' situé entre d' et e'; puis, elle continuerait à avoir pour tangentes les prolongements des génératrices E'e', F'f', G'g', H'h', dont la dernière serait une nouvelle *asymptote*. Mais, comme ici la nappe supérieure de l'hélicoïde n'existe pas, la courbe enveloppe des génératrices se réduira à la partie comprise depuis le point X', jusqu'au point (situé vers B') où la génératrice de l'hélicoïde se trouve, en projection verticale, tangente à la sinusoïde A'B'C'D'; seulement, dans cette dernière partie, la courbe enveloppe se confondra sensiblement avec la droite B'b'.

De même, la branche x'y'L' du contour apparent, se tracera en la rendant

tangente à l'axe entre les points n', p', et tangente aussi aux génératrices $n'N'$, $m'M'$, $l'L'$, jusqu'à ce qu'elle touche la sinusoïde $H'L'M'$; et si l'on devait la prolonger plus loin, elle aurait pour *asymptote* la génératrice $h'H'$. Enfin, on opérera semblablement pour les autres branches $X''Y''B''$, $x''y''L''$ (*).

618. *Sections remarquables.* Si l'on coupe l'hélicoïde gauche par un plan mené suivant l'axe $(O, O'Z')$, on aura évidemment pour section des lignes droites, qui seront autant de positions diverses de la génératrice; et si l'on employait, pour couper la surface, un cylindre vertical $\alpha\delta\gamma\partial\lambda\pi$ concentrique avec l'hélice directrice, il résulte de ce que nous avons prouvé au n° **614**, que la section serait une autre hélice $\alpha'\delta'\gamma'\partial'\lambda'\pi'$..... de même pas que $A'B'C'D'L'P'$.....

619. Maintenant, coupons l'hélicoïde par un plan horizontal quelconque $G''a''$. Il suffira de projeter sur le plan horizontal, les points G'', W'', ε'', S'',..... où le plan sécant rencontre les projections verticales des génératrices de la surface, et l'on obtiendra la spirale OIKSεWG.... qui s'étendrait indéfiniment, si l'on prolongeait assez loin les génératrices suivantes $h''H''$, $l''L''$,.... D'ailleurs, si la nappe supérieure (n° **616**) formée par le prolongement des droites $R'r'$, $Q'q'$,..... existait ici, elle serait coupée par le même plan $G''a''$, suivant une autre branche $Oik\partial$..... appartenant à la même spirale, et ces deux branches auraient pour tangente commune le diametre AOH, car les rayons OKC, OIB, sont des sécantes, dont les deux points de section avec la spirale se réunissent en un seul O, quand on arrive à la position OA.

620. La section que nous venons d'obtenir est *une spirale d'Archimède*. En effet, d'après la manière dont nous avons construit (n° **611**) les génératrices de l'hélicoïde, chacune de ces droites a pour différence de niveau entre ses deux extrémités, un intervalle constant égal à $O'a'$ qui comprend ici *six* divi-

(*) Nous conseillons ici de tracer les courbes $X'Y'B'$, $x'y'L'$,..... en les rendant simplement tangentes à la sinusoïde et aux projections des génératrices, parce que ce procédé offrira toute la précision graphique que l'on peut désirer, en multipliant suffisamment les génératrices qui sont très-faciles à construire. Cependant, si l'on voulait déterminer *les points de contact* de cette courbe, il n'y aurait qu'à mener par chaque génératrice *un plan perpendiculaire au plan vertical;* puis, chercher le point où ce plan serait *tangent à l'hélicoïde*, en employant la méthode que nous exposerons au n° 627; alors, la suite de tous ces points de contact appartiendrait rigoureusement au contour apparent $X'Y'B'$ de la surface; mais cette marche serait très-laborieuse.



sions du pas de l'hélice; puis, comme les points F″, E″, D″,... sont au-dessous du plan G″a″ de 1, 2, 3,.... de ces divisions, il en résulte évidemment que, dans l'espace, on a

$$F''W'' = \tfrac{1}{6}F''f'', \quad E''\varepsilon'' = \tfrac{2}{6}E''e'', \quad D''S'' = \tfrac{3}{6}D''d'', \ldots\ldots$$

Or les projections horizontales de ces droites devant être divisées dans le même rapport, on aura aussi

$$FW = \tfrac{1}{6}FO, \quad E\varepsilon = \tfrac{2}{6}EO, \quad DS = \tfrac{3}{6}DO, \ldots\ldots$$

ou bien

$$OI = \tfrac{1}{6}OB, \quad OK = \tfrac{2}{6}OC, \quad OS = \tfrac{3}{6}OD, \ldots\ldots$$

D'après cela, on voit que pour un point quelconque W de la spirale, on aurait la relation générale

$$\frac{OW}{OF} = \frac{AF}{AG}, \quad \text{ou} \quad \frac{\rho}{R} = \frac{u}{\frac{5}{3}\pi},$$

en appelant ρ le rayon vecteur de ce point, u l'angle correspondant mesuré dans le cercle qui a pour rayon l'unité, et R le rayon donné OA. Ainsi, puisque l'équation précédente prouve que ρ et u croissent proportionnellement, la courbe est bien *une spirale d'Archimède;* mais pour y introduire, suivant l'usage, le rayon vecteur constant R′ qui correspond à la première révolution totale, il n'y aura qu'à prendre

$$R' = \tfrac{14}{6}R, \quad \text{et il viendra} \quad \rho = R'\,\frac{u}{2\pi}.$$

La fraction $\frac{14}{6}$ exprime ici le rapport du pas de l'hélice A′A″, avec la hauteur O′a′ que nous nous sommes donnée arbitrairement, pour fixer la première génératrice de l'héliçoïde gauche.

621. *Du plan tangent pour un point donné* sur une génératrice quelconque (DO, D′d′). Supposons d'abord que le point assigné soit (D, D′) situé Fig. 124.
sur l'hélice directrice : alors, en tirant la droite DT égale à l'arc DA, et perpendiculaire sur DO, on sait (nº **449**) que le point (T, T′) sera le pied de la tangente à l'hélice; par conséquent le plan tangent relatif au point (D, D′) se trouvera déterminé par l'ensemble des deux droites (DO, D′d′) et (DT, D′T′), et ce plan aura évidemment pour trace horizontale VT.

Maintenant, soit (δ, δ') un point quelconque de la même génératrice.

On sait (n° **614**) que par ce point, il passe une hélice dont la naissance (α, α') se détermine en décrivant l'arc $\partial\alpha$, et projetant α en α' sur la génératrice $A'a'$. D'ailleurs, sans tracer cette courbe, sa tangente est facile à construire; car, si après avoir mené la droite TO, on tire $\partial\theta$ parallèle à DT, il est évident qu'on aura $\partial\theta = \partial\alpha$; donc, en projetant θ en θ' sur le *plan de naissance* $\alpha'\omega'$, on obtiendra le pied (θ, θ') de la tangente cherchée qui sera ($\partial\theta$, $\partial'\theta'$). Cela posé, le plan tangent au point (∂, ∂') de l'hélicoïde, devant contenir cette tangente ainsi que la génératrice (∂O, $\partial'd'$) qui vient percer le plan horizontal $\omega'\alpha'$ au point (ξ, ξ'), il aura évidemment pour trace, sur ce plan de naissance, la droite $\xi\theta$; et sur le plan horizontal primitif, sa trace sera Vt parallèle à $\xi\theta$.

On opérerait semblablement pour un nouveau point (ψ, ψ') de la génératrice (DO, D'd'), en employant toujours le triangle rectangle TOD, dans lequel on tracerait parallèlement à DT, la droite $\psi\zeta$ qui fournirait le pied (ζ, ζ') de la tangente à l'hélice passant par le point (ψ, ψ').

622. Il importe ici de remarquer que, *pour tous les points d'une même génératrice* (DO, D'd'), *les triangles rectangles* TDV, $\theta\partial\xi$,.... *auront des bases égales* DV $= \partial\xi = \ldots$ En effet, la hauteur du point (D, D') au-dessus de (A, A'), est évidemment la même que celle du point (∂, ∂') au-dessus de (α, α'); par conséquent les portions D'V' et $\partial'\xi'$ de la génératrice sont égales, et il doit y avoir aussi égalité entre leurs projections horizontales DV et $\partial\xi$. Mais l'angle à la base, V ou ξ, de ces triangles est *variable;* tandis qu'il serait *constant* et la base *variable*, pour les divers points d'une même hélice, attendu qu'en passant du point D aux points C, B,...., les côtés DV et DT varient dans le même rapport.

Il résulte de là que les plans qui touchent l'hélicoïde dans les divers points d'une même hélice, sont également inclinés sur le plan horizontal.

623. Observons encore que, pour tous les points d'une même génératrice (DO, D'd'), *les pieds des tangentes aux hélices, sont tous situés sur la droite* (TO, T'a'), ce qui permettrait d'obtenir la projection verticale θ' sans recourir (n° **621**) au plan de naissance $\alpha'\omega'$. En effet, les hauteurs des deux points (O, a') et (θ, θ') au-dessus du plan horizontal primitif, fournissent évidemment les rapports égaux

$$\frac{O'a'}{O'\omega'} = \frac{A'a'}{A'\alpha'} = \frac{AO}{A\alpha} = \frac{DO}{D\partial} = \frac{TO}{T\theta};$$

or, l'égalité entre la première et la dernière de ces fractions, indique que les

ordonnées verticales des points (O, a') et (θ, θ') sont proportionnelles à leurs abscisses comptées du point (T, T'); donc ces trois points se trouvent en ligne droite.

624. Il suit de là que les tangentes (DT, D'T'), ($\delta\theta$, $\delta'\theta'$), ($\psi\zeta$, $\psi'\zeta'$),... aux hélices décrites par les divers points de la génératrice (DO, D'd'), s'appuient toutes sur les deux droites fixes (TO, T'a') et (DO, D'd'); et d'ailleurs, comme ces tangentes sont évidemment parallèles à un même plan vertical DT, il en résulte (n° **549**) qu'elles forment, par leur ensemble, *un paraboloïde hyperbolique* qui touche la surface de l'hélicoïde tout le long de la génératrice (DO, D'd').

625. C'est à ce résultat que nous serions parvenus si, d'après la méthode générale du n° **577**, nous avions voulu former *l'hyperboloïde de raccordement* le long de la droite (DO, D'd'). Car, en définissant l'hélicoïde comme au n° **615**, par le moyen des trois directrices (ABCD...., A'B'C'D'....), ($\alpha\beta\gamma\delta$...., $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$....), (O, O'Z'), cet hyperboloïde aurait eu lui-même pour directrices les droites (DT, D'T'), ($\delta\theta$, $\delta'\theta'$), (O, O'Z'); et puisqu'elles sont évidemment toutes trois parallèles à un même plan vertical, cette dernière surface dégénère (n° **553**) en un paraboloïde hyperbolique, qui est celui dont nous avons parlé tout à l'heure.

626. Ce paraboloïde a pour plan directeur du premier système de génératrices, le plan vertical DT; quant au second système, le plan directeur devrait passer par (TO, T'a') et par une parallèle à (DO, D'd'). Or, si l'on fait partir cette parallèle du point (O, a'), il est aisé de voir qu'elle ira percer le plan horizontal en D; de sorte que TD sera encore la trace horizontale du second plan directeur, et il sera incliné d'une quantité angulaire égale à a'A'O', ce qui achève de fixer sa direction. On voit ainsi que les deux plans directeurs sont à la fois perpendiculaires au plan vertical OD qui contient la génératrice de l'hélicoïde; d'où l'on peut conclure que *l'axe du paraboloïde* (n° **572**) *est horizontal et parallèle à* DT.

Pour toute autre génératrice que (DO, D'd'), il est évident que le paraboloïde de raccordement demeurerait *constant de forme*, et prendrait seulement une position analogue par rapport à la nouvelle génératrice.

627. *Trouver le point de contact de l'hélicoïde gauche, avec un plan donné qui passe par une génératrice connue.* Ce problème qui serait utile dans la *Perspective* et les *Ombres*, pour trouver la courbe de contact de l'hélicoïde avec un cône ou un cylindre circonscrit à cette surface, pourrait se résoudre comme on l'a indiqué n°s **585** et **587**; ou plus simplement, par les procédés FIG. 124.

des nos **586** et **588**, si l'on commençait par substituer à l'hélicoïde le paraboloïde de raccordement le long de chaque génératrice. Mais les opérations graphiques sont encore très-laborieuses, et nous allons donner une méthode beaucoup plus courte, fondée sur la remarque du n° **622** (*).

Soit Vt la trace horizontale du plan donné qui passe par la génératrice (DO, D$'d'$); après avoir construit le triangle rectangle TDO qui détermine la tangente de l'hélice au point (D, D') de la génératrice proposée, menez par le point t une parallèle $t\theta$ à DO, puis une perpendiculaire $\theta\partial$; cette dernière fera connaître le point (∂, ∂') où le plan donné touche l'hélicoïde. En effet, pour construire le plan tangent relatif à ce point (∂, ∂'), il faudrait (nos **621** et **622**) tirer dans le triangle ODT, la droite $\partial\theta$ perpendiculaire sur ∂O, puis prendre $\partial\xi$ égale à DV, et la ligne $\theta\xi$ serait la trace de ce plan tangent sur le plan de naissance $\alpha'\omega'$ de l'hélice passant par (∂, ∂'). Or il est évident que, d'après les constructions employées ci-dessus, la ligne $\theta\xi$ se trouvera parallèle à Vt; ainsi, le plan donné et le plan tangent pour le point (∂, ∂'), auront leurs traces horizontales parallèles; et comme ils passent tous les deux par la droite (ODV, d'D'V'), ils coïncideront certainement l'un avec l'autre.

628. HÉLICOÏDE *à plan directeur.* La définition générale du n° **610** suppose que *la droite mobile glisse sur une hélice et sur son axe, en formant avec ce dernier un angle constant*, mais quelconque : lorsque cet angle est *droit*, toutes les positions de la génératrice se trouvent évidemment *parallèles au plan horizontal* qui devient ainsi un *plan directeur* de la surface; et celle-ci, toujours *gauche*, rentre alors dans le genre des conoïdes droits (n° **520**). Il est facile de voir comment toutes les propriétés reconnues dans l'hélicoïde gauche général, se reproduiront avec des simplifications remarquables, dans l'hélicoïde particulier qui nous occupe; c'est pourquoi nous nous contenterons d'indiquer la forme de ce dernier, en employant un seul plan de projection, comme dans la
FIG. 126. *fig.* 126 qui doit nous servir plus tard à représenter *une vis.* On y aperçoit l'hélice directrice ABCDE...., et les diverses positions A0, B1, C2,..... de la droite mobile; puis, on démontrera plus facilement encore qu'au n° **614**, que tout point α de la génératrice, décrit *une hélice* $\alpha\mathcal{C}\gamma\partial\varepsilon$.... *concentrique avec la première*, et qui a *le même pas* et *le même plan de naissance* que celle-là.

(*) Cette méthode a été indiquée dans le *Traité des surfaces réglées* par M. Gascheau, ancien élève de l'École Polytechnique.

629. Quant au plan tangent de cet hélicoïde, pour un point assigné sur une génératrice, il se construira aussi en cherchant, comme au n° **621**, le pied de la tangente à l'hélice qui passera par le point donné; et ce pied se déterminera encore au moyen du triangle rectangle ODT de la *fig.* 124 : mais, dans le cas actuel, les traces horizontales des divers plans tangents le long de la génératrice OD, partiront des points T, θ, ζ,.... et *seront toutes parallèles* à OD, puisque cette droite *horizontale* se trouvera commune à tous ces plans.

630. D'ailleurs, la droite (TO, T'α') sur laquelle étaient situés (n° **623**) les pieds des tangentes aux diverses hélices, se réduira ici à la ligne TO tracée dans le plan horizontal; et le paraboloïde de raccordement (n^{os} **624** et **626**) aura pour ses deux plans directeurs, le plan vertical DT et le plan horizontal lui-même. FIG. 124.

631. Enfin, le probleme du n° **627** se résoudra bien simplement, puisque étant donnée pour trace horizontale du plan assigné, une droite $t\theta$ parallèle à OD, le point θ où cette trace rencontrera la ligne TO, permettra de tirer la perpendiculaire $\theta\delta$ qui fera connaître le point de contact δ que l'on cherchait.

La surface dont nous parlons ici, est employée non-seulement pour former la vis à *filet rectangulaire*, mais encore pour l'épure de l'escalier, dit : VIS A JOUR *circulaire*.

§ 5. *De la vis à filet triangulaire.*

632. Imaginons un triangle isoscele $\alpha A\alpha'$, dont la base $\alpha\alpha'$ coïncide toujours avec une arête d'un cylindre vertical à base circulaire, et dont le plan passant constamment par l'axe de ce cylindre, tourne uniformément autour de cette droite; puis, concevons que ce triangle s'élève en même temps de quantités proportionnelles aux espaces angulaires décrits par son plan mobile, et de telle sorte qu'au bout d'une révolution totale, le triangle générateur se soit élevé d'une hauteur égale à sa base $\alpha\alpha'$, c'est-à-dire qu'il ait pris la position $\alpha'A'\alpha''$. Alors, le solide engendré par ce triangle mobile, sera le *filet* de la vis dont le cylindre primitif est le noyau. FIG. 125.

633. Il est évident que, d'après ces conditions et le n° **446**, le sommet A du triangle décrit une hélice ABCDEFA'B'.... qui appartient à un cylindre concentrique avec le premier, et dont le pas est égal à $\alpha\alpha'$; d'ailleurs, comme les côtés $A\alpha$ et $A\alpha'$ rencontrent toujours l'axe, en faisant des angles constants avec cette droite, il en résulte (n° **610**) que les deux faces du

filet sont des portions de deux hélicoïdes gauches, dont la *nappe supérieure* de l'un (n° **616**) forme la face *inférieure* du filet, tandis que la face *supérieure* de ce filet appartient à la *nappe inférieure* de l'autre hélicoïde.

634. Pour représenter complétement cette vis, il faudra d'abord construire (n° **451**), au moyen d'un plan horizontal que nous avons supprimé ici, la projection verticale ABCDFA'B'.... de l'hélice décrite par le point A, en observant que *le pas* AA' de cette hélice, doit être pris *égal à la base* $\alpha\alpha'$ du triangle donné. Ensuite, les divisions égales de ce pas, qui sont ici au nombre de *dix*, devront être reportées sur l'axe, à partir des points o et 16 où cette droite est rencontrée par les côtés $A\alpha$ et $A\alpha'$; ce qui produirait en général deux séries distinctes de points de division : mais ici elles n'en forment qu'une seule, attendu que nous avons choisi le triangle $A\alpha\alpha'$ de manière que ses côtés comprissent, sur l'axe, un nombre exact des divisions du pas de l'hélice. Cela posé, en joignant le premier point de division B de l'hélice avec les points 1 et 17, le point C avec 2 et 18, le point D avec 3 et 19,...., on obtiendra évidemment les diverses positions du triangle générateur.

635. Toutefois, il faut terminer ces droites aux points β et β', γ et γ', δ et δ',...., où elles vont rencontrer le noyau cylindrique de la vis. Or ceux-ci n'étant autre chose que les positions successives prises par les points α et α' du triangle mobile, il résulte du n° **614** que la courbe $\alpha\beta\gamma\varphi\alpha'\beta'$.... est une hélice de même pas que ABCDFA'....; par conséquent on déterminera cette nouvelle hélice en coupant les génératrices indéfinies, par des horizontales menées des points 4 et 14, 5 et 15, 6 et 16,.... D'ailleurs, comme le point α' est commun aux deux triangles $\alpha A\alpha'$ et $\alpha'A'\alpha''$, il arrivera nécessairement que l'hélice $\alpha\beta\gamma\varphi\alpha'\beta'\gamma'$.... sera aussi produite par les intersections des côtés $B\beta'$ et $B'\beta'$, $C\gamma'$ et $C'\gamma'$,..., ce qui offrira une vérification des constructions précédentes. Cette hélice formera ainsi *l'arête rentrante* de la vis, tandis que *l'arête saillante* sera l'hélice ABCDFA'....

Fig. 125. **636.** Quant au contour apparent des deux faces du filet, on doit bien observer qu'il n'est pas formé par deux génératrices rectilignes, mais par deux courbes XY et *xy*, qui sont (n° **617**) les *enveloppes* des projections des génératrices, et qui ont pour asymptotes les génératrices particulières $A\alpha'$ et $A'\alpha'$. Toutefois, vu que les portions des deux hélicoïdes gauches qui forment le filet, sont peu étendues et assez éloignées de l'axe, les lignes XY et *xy* pourront être ici tracées approximativement comme *deux droites* convergentes avec $\alpha'A$ et $\alpha'A'$, et qui devront toucher, l'une les deux arcs AYB et $\alpha'X\beta'$, l'autre les deux arcs A'yF et $\alpha'y\varphi$. D'ailleurs, de ces deux branches du contour

apparent, la première XY cache une partie de la seconde xy, laquelle doit alors se terminer en un point z situé à la hauteur de α', à cause de la forme symétrique de ces deux courbes.

Ces remarques qui s'appliquent à chaque angle rentrant du filet situé à gauche, et qui se reproduiront d'une manière *inverse* pour les angles rentrants situés à droite, suffisent sans doute pour que le lecteur se rende compte aisément des diverses ponctuations par lesquelles nous avons exprimé, sur notre épure, les parties *visibles* ou *invisibles* de la vis en question. Nous ajouterons seulement que le rectangle UVvu représente le parallélipipède qui forme la tête de cette vis.

§ 6. *De la vis à filet carré.*

637. Le filet de cette vis est engendré par un rectangle A$\alpha\lambda$L dont le plan, qui passe par l'axe d'un cylindre droit et circulaire, tourne uniformément autour de cet axe, tandis que le rectangle s'élève le long des arêtes du cylindre, de quantités proportionnelles aux espaces angulaires décrits par son plan mobile. Il en résulte évidemment que les points A et L décrivent, dans ce mouvement, deux hélices égales, dont le pas commun AA' ou LL' peut être choisi arbitrairement, pourvu qu'il égale au moins le double de AL, afin de laisser un libre passage au filet saillant de l'écrou qui engrène avec la vis. D'ailleurs, les deux côtés Aα et Lλ qui s'appuieront toujours sur ces hélices et sur l'axe, en coupant celui-ci sous un angle droit, engendreront des faces gauches qui appartiendront (nº **628**) à des *hélicoïdes à plan directeur;* tandis que le côté AL décrira une zone cylindrique, qui terminera extérieurement le filet de cette vis. FIG. 126.

638. Pour représenter graphiquement la vis à filet carré, il faut d'abord construire les deux hélices de même pas ABCDEFA'F'....., LMNPQRL'R'......, en se servant (nº **451**) d'un plan horizontal que nous avons supprimé ici; puis, tracer semblablement sur le cylindre du noyau, les deux autres hélices $\alpha\mathcal{E}\gamma\delta\varepsilon\varphi\alpha'$....., $\lambda\mu\pi\rho$....., qui sont produites (nº **628**) par les points α et λ, et dont le pas commun $\alpha\alpha'$ doit égaler AA'. Ces deux dernières courbes sont les intersections du noyau de la vis avec les faces inférieure et supérieure du filet, et elles servent à limiter les portions de génératrices B$\mathcal{E}$ et Mμ, Dδ et Pπ, Fφ et Rρ,..... qui appartiennent à ces deux faces gauches. Enfin, on pourra ajouter quelques-unes des arêtes du cylindre extérieur, telles que BM, CN, DP,....

639. Parmi les diverses lignes dont nous venons de parler, le lecteur dis-

cernera aisément celles qui sont visibles de celles qui se trouvent cachées. Nous avons tracé les unes et les autres complétement dans la première spire du filet, en les ponctuant d'une manière convenable à leur position; mais, dans les autres spires, nous n'avons conservé que les lignes visibles, afin d'offrir ici un résultat tout à fait conforme à celui que présenterait au spectateur la vue de l'objet en relief.

§ 7. *Du conoïde de la voûte d'arêtes en tour ronde.*

640. En écartant les circonstances qui sont spécialement relatives à la stéréotomie, la question se réduira ici à trouver l'intersection d'un tore avec un conoïde, courbe dont les tangentes donnent lieu à des recherches nouvelles, et
FIG. 127. qui trouveront des applications utiles dans la *Coupe des pierres*. Le tore est engendré par la révolution du demi-cercle B'C'b' qui, relevé dans le plan vertical B'ω, tourne autour de la verticale ω, et forme la surface intérieure de la voûte principale qu'on nomme un *berceau tournant*. Une porte pratiquée dans cette première voûte, et limitée aux plans verticaux Ff et Gg qui convergent vers l'axe de la tour, est recouverte par un conoïde dont la génératrice rectiligne demeure toujours horizontale, en glissant sur la verticale ω et sur une seconde directrice formée de la manière suivante. On rectifie l'arc AOD suivant sa tangente aOd, et sur cette droite comme grand axe, on décrit une demi-ellipse A''C''D'' dont le demi-axe vertical O''C'' est égal au rayon OB ou O'B' du tore; puis, en imaginant que cette ellipse placée d'abord dans le plan vertical aOd, soit *roulée sur le cylindre droit* AOD, de manière que ses abscisses coïncident avec les arcs de cette circonférence, et ses ordonnées avec les arêtes verticales du cylindre, cette ellipse deviendra une ligne à double courbure projetée sur AOD, et que l'on adopte pour la seconde directrice ou pour la *base* du conoïde.

641. Cela posé, pour obtenir l'intersection de ce conoïde avec le tore, coupons ces deux surfaces par divers plans horizontaux. Celui qui passera par le point M' du méridien B'C'b', coupera le tore suivant deux cercles décrits avec les rayons ωP' et ωp'; puis, si l'on cherche sur l'ellipse les points M'' et N'' qui sont à la même hauteur que M', et que l'on prenne les arcs OP et OQ égaux aux abscisses O''P'' et O''Q'', les points P et Q seront évidemment les projections des points où la *base* du conoïde est rencontrée par le plan sécant horizontal; et par suite, les sections faites dans cette surface seront deux droites projetées sur ωP et ωQ. Or ces droites rencontrent les deux sec-

tions circulaires en quatre points M, m, N, n, qui appartiennent à l'intersection des deux surfaces, laquelle se composera de deux branches à double courbure, projetées horizontalement sur GMOnf et FNOmg.

642. Observons, 1° qu'en prolongeant le conoïde en arrière de l'axe vertical ω, il rencontrerait une seconde fois le tore suivant deux autres branches $G_2O_2f_2$ et $F_2O_2g_2$, qui sont symétriques avec les premières et se construisent par les mêmes opérations; 2° que les deux nappes du conoïde sont censées terminées ici aux deux cylindres verticaux B'GBF..... et $b'gbf$..... qu'elles coupent suivant des courbes à double courbure, qui ne sont autre chose que des ellipses roulées sur ces cylindres, et ayant toutes pour demi-axe vertical le rayon du tore; c'est ce qui résulte évidemment de la proportionnalité des arcs horizontaux BG et BF, ou bg et bf, avec les arcs OA et OD; 3° que pour faire servir le tore et le conoïde à former une *voûte d'arêtes*, il faudrait supprimer entièrement toutes les *portions intérieures* des génératrices rectilignes et circulaires, lesquelles sont ici ponctuées comme étant invisibles.

643. Il est à remarquer que chacune des courbes planes, telles que GOf, qui reçoivent la projection horizontale des courbes d'arête, est une *spirale d'Archimède*. En effet, d'après la construction qui a fourni (n° **641**) le point quelconque M, l'arc OP et la droite PM sont respectivement égales aux abscisses O"P" et O'P' des deux points M" et M', qui répondent à une même ordonnée verticale dans l'ellipse et dans le cercle méridien du tore; or ces deux courbes ayant un axe vertical commun, on sait que de telles abscisses sont entre elles dans le rapport du grand axe au petit axe; par conséquent nous aurons la proportion FIG. 127.

$$\mathrm{OP} : \mathrm{PM} :: \mathrm{OA} : \mathrm{AG}.$$

Mais, si l'on prend un arc Oλ qui soit avec OA, dans le rapport de ωO avec OB, nous pourrons remplacer la proportion précédente par celle-ci

$$\mathrm{OP} : \mathrm{PM} :: \mathrm{O}\lambda : \mathrm{O}\omega, \quad \text{d'où} \quad \lambda\mathrm{P} : \omega\mathrm{M} :: \lambda\mathrm{O} : \omega\mathrm{O},$$

résultat qui montre que le rapport de l'arc λP au rayon vecteur ωM, demeure constant pour tous les points de la courbe GMO$f\omega$; par conséquent cette courbe est une spirale d'Archimède, dont l'*origine* est sur le rayon $\omega\lambda$ qu'elle touche en se prolongeant suivant une autre branche $\omega\varphi$ symétrique de la première. Pour avoir le *pas* de cette spirale, c'est-à-dire le rayon vecteur qui correspond à une révolution entière, il suffira de construire une quatrième proportionnelle δ aux

trois lignes suivantes : l'arc λO, la circonférence totale, et le rayon ωO; alors on pourra, selon l'usage ordinaire, compter sur la circonférence du rayon δ, les arcs qui mesurent le mouvement angulaire du rayon vecteur mobile.

644. La courbe $FOq\omega\gamma$ est aussi une spirale d'Archimède dont l'origine est sur le rayon $\omega\zeta$, et qui ne coïncidera avec la précédente qu'autant que l'arc $O\lambda$ se trouvera égal à un quart de cercle; pour obtenir cette coïncidence, il suffirait de prendre la demi-ouverture OA de la porte, telle qu'elle eût avec le quart de cercle, le même rapport que OB avec $O\omega$. Enfin, les deux autres courbes $G_2O_2f_2$ et $F_2O_2g_2$ appartiennent encore à deux nouvelles spirales d'Archimède, qui touchent les mêmes rayons $\lambda\omega\lambda_2$ et $\zeta\omega\zeta_2$, mais qui ont une situation opposée aux premières (*).

(*) L'analyse conduit aussi à ces résultats; car, si l'on adopte pour axe des x la droite ωOB, une perpendiculaire à celle-ci pour axe des y, et enfin la verticale ω pour axe des z; puis, si l'on pose

$$\omega O = l, \quad OB = R, \quad OA = O''A'' = a,$$

on trouvera (*Analyse appliquée*, chap. XIV) que les équations du tore et du conoïde sont :

$$\left(l - \sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 + z^2 = R^2, \quad \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sin \frac{a}{Rl} \sqrt{R^2 - z^2};$$

alors en éliminant z, il viendra pour la projection horizontale de l'intersection de ces deux surfaces,

$$\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \pm \sin \frac{a}{Rl}\left(l - \sqrt{x^2 + y^2}\right).$$

Nous simplifierons cette équation en y introduisant les coordonnées polaires, au moyen des formules $x = r \cos u$, $y = r \sin u$; car elle deviendra

$$\sin u = \pm \sin \frac{a(l - r)}{Rl};$$

d'où l'on conclut

$$u = \pm \frac{a(l - r)}{Rl}, \quad \text{et} \quad \pi - u = \pm \frac{a(l - r)}{Rl},$$

ou bien

$$r = l \pm \frac{Rl}{a} u, \quad \text{et} \quad r = l \pm \frac{Rl}{a}(\pi - u).$$

Ces quatre équations distinctes sont celles des quatre spirales construites dans notre épure; et pour ramener la première, par exemple, à l'axe polaire $\omega\lambda$ qui lui est tangent, il n'y a qu'à re-

645. *La tangente* en un point quelconque M, sera donnée par l'intersection du plan tangent au tore avec le plan tangent du conoïde. Or le premier de ces plans a pour trace horizontale la droite VK perpendiculaire à ωM, laquelle s'obtient en ramenant en V le pied T' de la tangente M'T' du méridien circulaire; quant au second plan tangent, il faut d'abord construire (n° **580**) un paraboloïde qui *raccorde* le conoïde tout le long de la génératrice ωPM. Pour cela, je mène la tangente M''T'' à l'ellipse plane; puis, en roulant cette courbe (n° **640**) sur le cylindre vertical DOA, la soutangente deviendra PT = P''T'', de sorte que T sera le pied de la tangente au point P de la *base* du conoïde; alors la génératrice ωP du paraboloïde auxiliaire, qui doit glisser sur cette tangente et sur la verticale ω, en demeurant toujours horizontale, prendra la position ωT quand elle arrivera au pied de cette tangente. Cela posé, si je coupe les deux génératrices ωP et ωT par le plan vertical MS, on sait (n° **551**) que la section sera une droite projetée sur MS et qui, jointe à la génératrice ωM, déterminera le plan tangent du paraboloïde; donc ce plan aura pour trace horizontale la ligne SK parallèle à ωM. Maintenant, les traces SK et VK des deux plans tangents allant se couper en K, il en résulte que KM est la tangente cherchée. FIG. 127.

646. Cette méthode ne peut plus s'appliquer immédiatement au *point multiple* O, parce qu'en cet endroit, les deux plans tangents devenant horizontaux, ils coïncident entièrement, et leur intersection reste indéterminée. Mais, si l'on cherche à évaluer l'angle VMK = θ que forme une tangente quelconque avec le rayon vecteur correspondant, on trouve d'abord

$$\tang\theta = \frac{KV}{VM} = \frac{MS}{P'T'};$$

puis, comme la sous-tangente P'T' dans le cercle équivaut à la sous-tangente dans l'ellipse, P''T'' ou PT, multipliée par le rapport du petit axe au grand axe, il vient

$$\tang\theta = \frac{MS}{PT}\cdot\frac{OA}{OB}, \quad \text{ou bien} \quad \tang\theta = \frac{M\omega}{P\omega}\cdot\frac{OA}{OB}. \qquad (1)$$

---

culer l'origine des angles u, qui se comptent ici à partir et à droite de la ligne ωO, en posant

$$u = u' - \frac{a}{R}, \quad \text{d'où il résultera} \quad r = \frac{Rl}{a}u'.$$

Cette dernière équation est bien celle d'une spirale d'Archimède, dont les angles u' sont comptés à partir du rayon $\omega\lambda$.

Or, dans cette dernière expression, la seule quantité qui varie avec le point de contact M, c'est le facteur Mω, lequel devient égal à son dénominateur Pω, pour le point particulier O; donc l'inclinaison de la tangente en ce point sera donnée par la formule

$$\tang \theta' = \frac{OA}{OB} = \frac{Oa}{OB}, \qquad (2)$$

laquelle montre que cette tangente Oα est précisément *la diagonale du rectangle* construit sur Oa et OB.

Fig. 127. **647.** La construction générale du n° **645** est encore insuffisante pour obtenir les tangentes aux quatre points F, G, g, f, qui sont à la naissance de la voûte; parce qu'en ces points, les plans tangents des deux surfaces devenant *verticaux*, leur intersection est une verticale qui serait bien tangente à la courbe d'arête dans l'espace, mais qui se réduit à un seul point en projection horizontale, et n'apprend plus rien sur la tangente de la courbe plane GOf, au point G. Cependant, si nous recourons encore à la formule (1), elle deviendra pour le point G,

$$\tang \theta'' = \frac{\left(\frac{G\omega}{A\omega}\right) OA}{OB} = \frac{GB}{GA}; \qquad (3)$$

car les arcs OA et GB sont semblables et proportionnels à leurs rayons Aω et Gω. D'où il résulte évidemment que la tangente en G sera la diagonale du rectangle construit sur GA et sur l'arc GB rectifié; opération extrêmement simple que, pour laisser plus de clarté dans l'épure, nous avons effectuée au point F, en formant un rectangle avec FD et Fδ = FB.

648. Il est même à remarquer que cette méthode très-avantageuse s'applique aussi au point quelconque M; car, si dans la formule générale (1), on remplace le rapport de OA à OB = AG, par celui de OP à PM, qui lui est égal d'après le n° **643**, il viendra

$$\tang \theta = \frac{\frac{M\omega}{P\omega} \cdot OP}{PM} = \frac{MI}{MP}; \qquad (4)$$

ce qui prouve que la tangente LMK peut s'obtenir immédiatement, en formant sur MP et l'arc MI rectifié, un rectangle dont la diagonale sera la tangente cherchée. Ici, nous n'avons tracé que la moitié de ce rectangle, en prenant PL = MI, et tirant LM qui devra coïncider avec la tangente MK déjà construite.

LIVRE VIII.

DE LA COURBURE DES LIGNES ET DES SURFACES.

CHAPITRE PREMIER.

Sur la courbure et les développées des lignes courbes.

649. Une courbe et sa tangente, qui n'ont en général qu'un seul élément de commun, sont dites avoir entre elles un contact du *premier ordre;* mais, comme dans certaines questions on a besoin de considérer des lignes qui approchent de se confondre avec la courbe proposée, plus que ne fait la tangente, il est nécessaire de distinguer ces rapprochements plus ou moins intimes, et l'on dit que *deux courbes quelconques*, planes ou non, *offrent un contact du* PREMIER, SECOND, TROISIÈME ..... ORDRE, *selon qu'elles ont* UN, DEUX, TROIS,..... ÉLÉMENTS *consécutifs de communs.*

650. Comme le contact du second ordre se présentera très-fréquemment dans les applications géométriques, nous le désignerons souvent par le nom abrégé d'*osculation;* ainsi deux *courbes osculatrices* seront celles qui auront *deux éléments communs.* Pour en donner un exemple qui nous deviendra fort utile par la suite, considérons une courbe quelconque AMB, et après l'avoir partagée en éléments égaux (*), élevons sur les milieux de MM′ et M′M″, deux normales KO et K′O *situées dans le plan* MM′M″, lequel ne contiendra les autres éléments de AMB qu'autant que cette courbe sera plane. Alors, le point O où ces deux normales se couperont, sera le centre d'un cercle αMδ qui, passant évidemment par les trois points M, M′, M″, aura ainsi deux éléments MM′ et M′M″ communs avec AMB, et sera par conséquent le *cercle osculateur* de cette FIG. 129.

(*) Si ces éléments étaient inégaux, mais toujours infiniment petits, les mêmes conséquences subsisteraient, comme le calcul le prouve aisément. Toutefois, pour abréger les démonstrations, il est plus simple de supposer qu'on a choisi des éléments égaux, ce qui est toujours permis. Voyez l'*Analyse appliquée*, chap. XVI, n° 581.

courbe, pour le point M. Le rayon de ce cercle sera l'une des trois distances égales OM, OM′, OM″; mais on peut adopter en place, l'une des deux normales égales OK et OK′, parce que la différence n'est qu'un infiniment petit du second ordre. (*Voyez* n° **197**.)

651. On voit par là que le cercle osculateur *est unique* pour chaque point M assigné sur la courbe AMB, tandis qu'il existe une infinité de cercles simplement tangents dans ce point; mais le cercle osculateur variera de position et de grandeur en passant aux points M′, M″,..., puisque alors il faudra opérer semblablement sur les deux éléments consécutifs M′M″ et M″M‴, M″M‴ et M‴M⁗, ..., ce qui changera le rayon KO en K′O′, K″O″,.... Nous examinerons tout à l'heure (n° 656) si ces rayons se coupent consécutivement.

652. Le plan du cercle osculateur, qui n'est autre que celui de deux éléments consécutifs MM′ et M′M″, ou de deux tangentes infiniment voisines MT et M′T′, se nomme aussi le *plan osculateur* de la courbe AMB pour le point M; et à moins que cette dernière ne soit plane, ce plan osculateur variera en passant d'un point à un autre de AMB. D'ailleurs, deux plans osculateurs consécutifs TM′T′ et T′M″T″, se couperont toujours suivant l'élément intermédiaire M′M″.

Fig. 129. **653.** Quant à la *courbure* de la ligne AMB au point M, nous avons déjà dit (n° **198**) qu'elle était mesurée par l'angle TM′T′ compris entre deux tangentes infiniment voisines, parce que cet angle, nommé *angle de contingence* ou *de courbure*, exprime évidemment la quantité dont il a fallu écarter l'élément M′M″ de sa direction primitive M′T, pour plier la ligne droite MM′T suivant la ligne polygonale MM′M″M‴..... (*). Or l'angle TM′T′ égale KOK′; et comme ce dernier a pour mesure l'arc ε décrit avec un rayon égal à l'unité, tandis qu'il comprend un arc KM′K′ du cercle osculateur dont le rayon est $OK = \rho$, on aura pour l'expression de la courbure au point M,

$$\varepsilon = \frac{KM'K'}{OK} = \frac{ds}{\rho}.$$

Mais la courbe ayant été divisée en éléments égaux, la quantité ds sera constante pour tous ses points, et l'on pourra dire que *la courbure varie* d'un point à

(*) Il est bon d'observer que l'angle de contingence TM′T′ est aussi égal à l'angle de deux plans *normaux* consécutifs, puisque ces plans seraient perpendiculaires sur les milieux des deux éléments MM′ et M′M″.

un autre, *en raison inverse du rayon* OK $= \rho$ qui, pour cette raison, se nomme aussi le *rayon de courbure* de la courbe au point M.

Observons toutefois que, pour avoir la mesure exacte de la courbure d'une ligne, et pour rendre cette mesure applicable à deux courbes différentes dans lesquelles les éléments, quoique infiniment petits, pourraient se trouver inégaux de l'une à l'autre, et même avoir un rapport déterminé et nécessaire, il faut considérer, non pas la grandeur absolue de l'angle de contingence ε, mais bien son rapport avec l'élément ds; parce que c'est seulement sur deux arcs *de même longueur*, que l'angle extérieur des tangentes extrêmes peut manifester, avec précision, la courbure plus ou moins prononcée de l'un de ces arcs par rapport à l'autre. Par exemple, dans deux cercles concentriques dont les rayons seraient doubles et les circonférences divisées chacune en un même nombre d'éléments égaux, les angles de contingence correspondants aux mêmes rayons seraient égaux, et cependant la courbure des deux cercles serait évidemment différente; mais, si l'on fait attention que les éléments de la grande circonférence ont une longueur double de ceux de la seconde, on reconnaîtra que le rapport $\frac{\varepsilon}{ds}$ indique effectivement une courbure moitié plus faible pour le grand cercle que pour le petit. Concluons donc de là que la véritable expression de la courbure d'une ligne quelconque, sera toujours donnée par le rapport

$$\frac{\varepsilon}{ds} = \frac{1}{\rho},$$

ρ désignant le rayon du cercle osculateur de la courbe, au point considéré.

654. Tout ce qui précède convient également aux courbes *planes* et aux courbes *gauches* : nous nous servons ici, avec M. Vallée, de cette dernière expression, au lieu de *courbe à double courbure*, tant pour abréger que pour éviter l'emploi du mot *courbure* dans un sens inexact. En effet, une ligne qui n'est point plane, n'admet qu'une seule courbure qui s'estime comme au numéro précédent ; mais elle offre en outre une *flexion*, ou plutôt une *torsion*, qui a été produite en faisant tourner l'un des deux plans osculateurs consécutifs $TM'T'$ et $T'M''T''$, autour de l'élément commun $M'M''$; de sorte que dans une courbe gauche, *la torsion est mesurée* en chaque point, *par l'angle des deux plans osculateurs voisins*. Or, si l'on rendait nul cet angle, en rabattant le plan $T'M''T''$ sur $TM'T'$, par une rotation autour de la droite $M'M''$, la torsion disparaîtrait et la courbe deviendrait *plane* dans les environs du point considéré, *sans que sa courbure eût augmenté ou diminué*, puisque les angles

de contingence TM′T′ et T′M″T″ seraient demeurés constants; tandis que, sans rien changer dans la position de ces deux plans osculateurs, ou dans la torsion de la courbe, on peut altérer sa courbure en écartant ou rapprochant les deux éléments MM′ et M′M″ : par conséquent, *la courbure* et *la torsion* d'une ligne sont des modifications indépendantes l'une de l'autre. Mais les courbes planes et les courbes gauches présentent, quant au lieu de leurs centres de courbure, une différence essentielle que nous allons faire ressortir.

Fig. 129. **655.** Il existe toujours une infinité de normales, pour un même point assigné sur une courbe quelconque; mais la normale KO suivant laquelle est dirigé le rayon de courbure au point M, doit être tracée (n° **650**) dans le plan osculateur MM′M″, et nous la distinguerons par le nom de *normale principale*. Or, quand la courbe AMB est plane, toutes les normales principales relatives aux divers points M, M′, M″,... se trouvent dans son plan; et par suite *elles se coupent consécutivement* de manière à former une courbe OO′O″.... à laquelle ces diverses normales sont évidemment *tangentes ;* d'où il suit (n° **199**) qu'un fil O″O″O′OK plié sur cette *développée*, et déroulé successivement, décrirait par son extrémité K la ligne AMM′M″B.

Fig. 130. **656.** Au contraire, *quand la courbe proposée est gauche*, *les normales principales*, ou les rayons de courbure, *ne se rencontrent plus consécutivement.* En effet (*fig.* 130), concevons par les milieux K, K′, K″,.... des divers éléments, les plans normaux PQS, P′Q′S′, P″Q″S″,.... qui se couperont deux à deux suivant les droites QS, Q′S′,.... et formeront ainsi une surface développable (n° **186**), *enveloppe* de tous ces plans. Alors, si nous coupons les plans P et P′ par le plan osculateur MM′M″ qui est perpendiculaire à ces deux-là, nous obtiendrons pour intersections les deux normales KO et K′O qui déterminent évidemment le centre O du cercle osculateur correspondant au point M, et dont la première sera le rayon de courbure relatif à ce point (*). De même, en coupant les plans normaux P′ et P″ par le second plan osculateur M′M″M‴, nous aurons pour sections les normales K′O′ et K″O′ dont la première sera aussi le rayon de courbure relatif au point M′. Or ce rayon K′O′ ne coïncide pas avec l'autre normale K′O, puisque ces droites proviennent du même plan P′ coupé par deux plans osculateurs distincts :

(*) Il nous sera utile, plus tard, d'observer ici que cela revient à abaisser du point K, une perpendiculaire KO sur la génératrice QS de la surface enveloppe des plans normaux.

ainsi K'O' va rencontrer QS en un point I différent de O; et par conséquent les deux rayons de courbure consécutifs KO et K'O', n'ayant pas de point commun sur l'intersection QS des plans P et P' qui les contiennent, ne sauraient eux-mêmes se rencontrer.

657. Il résulte de là que les centresde courbure O, O', O",... n'étant pas donnés par les intersections successives des rayons de courbure KO, K'O', K"O",..., la courbe que l'on ferait passer par tous ces centres *n'aurait pas pour tangentes* ces mêmes rayons; et par conséquent ceux-ci ne sauraient être regardés comme formés par le développement d'un fil qui entourerait la ligne OO'O".... Donc enfin, *le lieu des centres de courbure d'une courbe gauche* AMM'M" .... *n'est point une* DÉVELOPPÉE *de cette dernière ligne.*

658. Cependant la courbe gauche AMM'M".... admet une infinité de développées, ainsi que MONGE l'a fait voir. En effet, si dans le premier plan normal P, nous traçons arbitrairement une droite KD, qui sera toujours normale à la courbe proposée, et ira rencontrer QS en un point D: puis, que par les points K' et D nons tirions la droite K'DD' qui sera dans le second plan normal P', puis la droite K"D'D" située dans le plan P", et ainsi de suite; nous obtiendrons, par les intersections successives de ces normales, une courbe DD'D"D"'.... à laquelle elles seront *tangentes*, et qui pourra servir à décrire la ligne AMM'.... par le développement d'un fil enroulé autour de cette *développée* DD'D" ..... Pour le prouver, il suffit de faire voir que les portions DK et DK' des tangentes à cette développée, sont égales entre elles, ou bien que le point D est à égale distance des trois points M, M', M"; or cela résulte de ce que la droite QS étant l'intersection de deux plans P et P' élevés perpendiculairement sur les milieux des éléments égaux MM' et M'M", chaque point de QS est à la même distance de M, de M' et de M": aussi cette droite QS est appelée la *ligne des pôles* de l'arc MM'M", et les distances DK, D'K', D"K",.... sont les *rayons de développée* qu'il ne faut pas confondre avec les rayons de courbure KO, K'O', K"O",..... D'ailleurs, comme la première normale KD a été menée arbitrairement dans le plan P, on pourra donc, en faisant varier la direction de cette normale, obtenir une infinité de développées, situées toutes sur la *surface développable* qui est l'enveloppe des plans normaux P, P', P",.... de la courbe AMM'M".... FIG. 130.

659. Cette surface *lieu de toutes les développées* de la courbe AMM'...., ou bien *lieu de tous les pôles* de cette ligne, a pour génératrices rectilignes les intersections successives QS, Q'S', Q"S",.... des plans normaux; et ces droites, qui se coupent nécessairement deux à deux, forment ainsi (n° **178**) *l'arête de rebroussement* UV de cette surface développable. D'ailleurs, puisque chaque généra-

trice QS est perpendiculaire au plan osculateur correspondant MM′M″, et passe par le centre de courbure O où se coupent les deux normales égales KO et K′O, il en résulte évidemment que *les angles* KDO *et* K′DO, *formés par deux tangentes de la développée avec la génératrice intermédiaire* QS, *sont égaux;* et par suite (nº **187**), on peut affirmer que *chaque développée* DD′D″.... *deviendra une ligne droite,* quand on développera la surface enveloppe des plans normaux. Cela revient à dire (nº **187**) que cette développée est *la ligne la plus courte* qui puisse être tracée sur la surface développable, entre deux de ses points; par conséquent un fil qui, attaché en K, serait tendu et plié librement sur cette surface développable, prendrait de lui-même la forme d'une des développées KDD′D″...., puisqu'à cause de son élasticité, ce fil ne pourra demeurer en équilibre sur la surface qu'autant qu'il aura suivi la route la plus courte.

« D'après cela, dit *Monge,* on conçoit comment il est possible d'engendrer, par un mouvement continu, une courbe quelconque à double courbure. Car, après avoir exécuté la surface développable touchée par tous les plans normaux de la courbe, si du point donné dans l'espace et par lequel la courbe doit passer, on dirige deux fils tangents à cette surface; et si, après les avoir pliés sur la surface en les tendant, on les fixe par leurs autres extrémités; le point de réunion des deux fils, qui aura la faculté de se mouvoir avec le plan tangent à la surface, sans glisser ni sur l'un des fils ni sur l'autre, engendrera dans son mouvement, la courbe proposée. »

Fig. 130. **660**. Lorsque la courbe AMM′.... sera *sphérique*, c'est-à-dire située entièrement sur une sphère d'un rayon quelconque, tous les plans normaux P, P′, P″,... iront passer nécessairement par le centre de cette sphère, et leur enveloppe, qui est le lieu de toutes les développées de AMM′...., se réduira ici à un cône dont le sommet sera placé au centre de la sphère en question. Ce point unique pourra donc être considéré comme étant une développée particulière de la courbe AMM′....; et en effet, un fil attaché à ce centre pourra tourner autour de ce point, sans s'allonger sensiblement, tandis que son autre extrémité demeurera sur la courbe AMM′.... dont tous les points sont à une distance constante du centre.

661. Enfin, si la courbe AMM′.... était *plane*, tous les plans normaux P, P′, P″, ... seraient perpendiculaires au plan de cette courbe, aussi bien que leurs intersections consécutives QS, Q′S′, ...; de sorte que l'enveloppe de ces plans normaux se réduirait à *un cylindre*, sur lequel seraient situées *toutes les développées qu'admettrait encore la courbe plane* AMM′..... En outre, chacune de ces développées DD′D″.... serait alors *une hélice;* car ses diverses tangentes,

ou les rayons de développée KD, K'D',..., formeraient tous des angles égaux (n° 659) avec les droites parallèles QS, Q'S',.... qui sont les génératrices de ce cylindre. D'ailleurs, *le lieu des centres de courbure* OO'O".... *redeviendrait ici une véritable développée*, puisque cette courbe serait la section droite du cylindre enveloppe, et qu'on peut dès lors la regarder comme une hélice dont le pas est nul : mais cette ligne OO'O"..... serait, parmi toutes les développées de la courbe AMM'...., la seule qui fût plane. Ainsi, par exemple (*fig.* 96), la développante de cercle ABCDL..... a pour développée plane le cercle A$\beta\gamma\delta\lambda$....; tandis qu'elle admet pour développées gauches toutes les hélices qui, comme (A$\beta\gamma\delta\lambda$...., A'$\beta'\gamma'\delta'\lambda'$...), ont leur origine au point (A, A').

662. Observons ici que le cercle osculateur αMβ de la courbe plane AMB, traverse ordinairement cette courbe, c'est-à-dire que s'il se trouve *en dehors* à gauche du point M, à droite il sera *en dedans* de la courbe. En effet, la partie rectiligne OK du fil qui entoure la développée OO'O"...., va continuellement en augmentant à mesure que l'on déroule ce fil; donc les rayons de courbure qui précèdent OK, sont plus petits que cette droite, et ceux qui le suivent sont plus grands; donc aussi l'arc MA de la courbe proposée sera embrassé par l'arc de cercle Mα, tandis que M"B se trouvera en dehors de M"β, du moins dans les environs du point considéré M. Cependant, lorsque la développée présente un point de rebroussement, comme cela arrive aux sommets d'une ellipse (*fig.* 76), alors le rayon de courbure devient un *minimum* ou un *maximum*, et le cercle osculateur se trouve, tant à droite qu'à gauche du point de contact, placé en dedans de la courbe, ou bien en dehors. Dans ce cas particulier, le cercle osculateur acquiert un contact du troisième ordre avec la courbe. Fig. 129.

663. Une circonstance analogue se présente pour le plan osculateur MM'M" d'une courbe gauche AMB; c'est-à-dire que *ce plan traverse ordinairement la courbe*, en laissant au-dessous de lui l'arc MA, et au-dessus l'arc M"B, parce que la torsion des éléments, produite (n° 654) par la différence d'inclinaison des plans osculateurs consécutifs, persévère en général dans le même sens. Cependant, comme par suite de la *continuité* de la courbe proposée, l'inclinaison du plan osculateur ne varie que par degrés infiniment petits, s'il existe un point singulier où cette torsion change de sens, cela ne pourra arriver qu'autant que l'*angle de torsion* aura passé par zéro; et dans cet endroit de la courbe, trois éléments consécutifs seront situés dans un même plan osculateur, lequel se trouvera alors tout entier au-dessus de la courbe AMB, ou bien tout entier au-dessous. Fig. 130.

664. *Construire le plan osculateur relatif à un point assigné sur une courbe gauche?*

FIG. 51. Soit N le point assigné sur la courbe gauche VNU, laquelle devra être définie par ses deux projections. Si, pour obtenir approximativement deux tangentes infiniment voisines, on menait celle du point N et une autre *extrêmement voisine*, deux droites aussi rapprochées détermineraient, avec peu de précision, les traces du plan qui les contient. Il vaudra donc mieux construire diverses tangentes à la courbe VU, pour le point N et pour d'autres situés à de médiocres distances, en arrière et en avant de N; puis chercher les traces de ces tangentes sur le plan horizontal, par exemple, et réunir tous ces points par une courbe continue ALD qui sera la trace de la surface développable lieu de toutes les tangentes à la courbe VU. Alors, comme on sait (n° **181**) que le plan tangent de cette surface est le plan osculateur de son arête de rebroussement, il n'y aura qu'à mener la tangente Lϑ à la trace ALD, et le plan NLϑ sera le plan osculateur demandé.

665. *Construire le rayon de courbure relatif à un point donné sur une courbe gauche ?*

Soit M le point donné sur la courbe gauche que nous désignerons par A : construisons comme ci-dessus, le plan osculateur π correspondant au point M, et projetons-y la courbe A, qui deviendra une autre ligne B ayant évidemment deux éléments communs avec la première. Dès-lors, la courbure de A étant la même que celle de B en M, la question sera réduite à trouver le rayon de courbure d'une courbe B qui est *plane*.

FIG. 141. **666.** Pour résoudre ce dernier problème, soit MN la normale de B au point donné M, et MC, MC',..... diverses cordes partant de ce même point. Si par le milieu de la corde MC, on lui mène une perpendiculaire IP, et que par le point P où elle va couper la normale MN, on élève sur cette dernière droite, une perpendiculaire $P\alpha = MC$; puis, si l'on répète des constructions analogues pour les autres cordes, la courbe $\alpha\alpha'\alpha''\beta\beta'$ ira couper la normale MN en un point O qui déterminera le rayon de courbure MO de la ligne proposée. En effet, lorsque la corde MC″ diminue de plus en plus, l'ordonnée $P''\alpha''$ décroît pareillement, et la perpendiculaire I″P″ approche davantage d'être normale à la courbe MB; donc, le point O où la ligne auxiliaire $\alpha\alpha'\beta$ ira couper MN, sera bien l'intersection de cette normale avec une normale infiniment voisine; et par conséquent le rayon de courbure de la ligne B pour le point M, aura bien pour longueur MO (*).

(*) Cette méthode est tirée de la *Géométrie des courbes*, par M. Bergery; et elle offre

667. *Étant donnée une courbe quelconque* A, *construire une de ses développées, et le lieu des centres de courbure.*

On mènera divers plans normaux à cette courbe, par des points assez rapprochés; et après avoir construit leurs traces sur les deux plans de projection, on décrira une courbe α tangente à toutes les traces horizontales, puis une courbe β tangente à toutes les traces verticales. Ces deux courbes α, β, seront évidemment les traces de la surface Σ lieu de toutes les développées de A (n° **659**); et l'on obtiendra diverses génératrices G, G', G'',... de cette surface développable, en joignant deux à deux les points où les courbes α et β sont touchées par un même plan normal. Cela posé, du point de départ M choisi à volonté sur la courbe A, on mènera une tangente MD à la surface Σ, puis on effectuera le développement de Σ sur un plan quelconque, où la développée cherchée, devant être une ligne droite (n° **659**), ne sera autre chose que le prolongement indéfini de MD. Alors, en marquant les points où cette droite MD rencontre chacune des génératrices $\gamma, \gamma', \gamma''$,.... de Σ développée, puis rapportant ces points sur les génératrices primitives G, G', G'',...., on obtiendra la développée qui est tangente au rayon MD. En faisant varier cette droite qui a pu être tracée de bien des manières, on trouverait d'autres développées de la courbe A.

668. Si du point M on abaisse une perpendiculaire sur la génératrice G qui se trouve dans le plan normal relatif à M, le pied de cette perpendiculaire sera le centre de courbure de A pour le point M (n° **656**, *note*); et le lieu de tous les centres de courbure s'obtiendrait en répétant cette construction pour divers points M', M'',... de la ligne donnée A.

Ces diverses opérations seront ordinairement très-laborieuses; mais elles deviendront assez simples dans plusieurs cas intéressants, comme cela arrive pour les deux exemples que nous allons étudier, et qui serviront d'ailleurs à éclaircir la généralité des considérations précédentes.

669. *Étant donnée une développante sphérique,* projetée sur DMPGQF, *trouver le lieu de ses centres de courbure, et l'une de ses développées.* Fig. 101.

Nous avons dit au n° **493** que cette épicycloïde particulière est engendrée par un point *m* d'un cercle mobile S'', dont le plan *roule* sur un cône fixe S'AE, pendant que son centre coïncide perpétuellement avec le sommet S'

---

l'avantage que la courbe auxiliaire vient couper à angle droit la normale donnée, ce qui fixe mieux la position du point cherché.

de ce cône ; on a vu aussi au n° **495** que le *plan normal* de cette courbe, pour un point quelconque (M, M'), est le plan S'AV dans lequel se trouve alors le cercle mobile, et qui est *tangent au cône* fixe S'AE. Il s'ensuit donc que ce cône est précisément la surface enveloppe de tous les plans normaux, dont nous avons parlé au n° **659**, et sur laquelle doivent être placées toutes les développées et tous les centres de courbure de la développante sphérique DMPGQF; ainsi, d'après la note du n° **656**, si nous abaissons du point (M, M') la perpendiculaire (MR, M') sur la génératrice de contact S'A du plan normal, le pied (R, M') de cette perpendiculaire sera le centre de courbure correspondant à (M, M'), et la vraie grandeur du rayon de courbure sera RM. Semblablement, lorsque le point générateur se trouvera projeté en N_5, époque où le contact du cercle mobile est arrivé en A_5, la perpendiculaire N_5R_5 abaissée sur la génératrice OA_5 sera le rayon de courbure, et R_5 la projection du centre de courbure : sa projection verticale serait facile à obtenir. Enfin, pour le point P qui répond à un quart de la révolution du cercle mobile, le rayon de courbure sera PO égal à S''A ; de sorte que le lieu des centres de courbure aura pour projection horizontale une courbe à double nœud $DRR_5OR_9G \ldots O \ldots F$ que nous n'avons pas achevée, afin d'éviter la confusion, mais qui passerait deux fois par le point O, et dont la partie OR_9GO répond à un arc situé sur la nappe supérieure du cône S'AE.

670. Pour suppléer à la projection verticale que nous n'avons pas voulu tracer ici, nous allons construire sur le plan du cercle mobile, les positions occupées successivement par tous les centres de courbure. Or, d'après la méthode exposée ci-dessus pour le point quelconque (M, M') de la développante sphérique, on doit voir que si l'on tire les rayons $S''a_4$, $S''a_5$, $S''a_6, \ldots$ qui représentent les génératrices suivant lesquelles le cône est touché successivement par le plan du cercle mobile, et qu'on leur mène les perpendiculaires mr_4, mr_5, $mr_6, \ldots$ parties du point générateur m, ces perpendiculaires seront les longueurs précises des divers rayons de courbure; et leurs pieds qui forment évidemment une circonférence de cercle, iront coïncider tour à tour avec les vrais centres de courbure de la développante sphérique, lorsqu'on fera rouler le cercle S''A sur le cône S'AE. Il en serait de même si l'on ployait le plan de ce cercle pour l'appliquer sur le cône, par une opération inverse de celle qui sert à développer cette surface; de sorte que la circonférence $mr_4r_5S''r_9 \ldots$ peut être regardée comme la *transformée* du lieu des centres de courbure,

lorsqu'on développe le cône S'AE qui contient réellement tous ces centres (*).

671. Quant à la construction d'*une développée* de la développante sphérique, il faut se rappeler (n° **659**) qu'une pareille courbe doit devenir *rectiligne* lorsqu'on développera la surface enveloppe de tous les plans normaux, laquelle est ici le cône S'AE. Si donc, sur le cercle rabattu en S'', on trace une droite arbitraire partant de m, telle que $m\alpha\beta\gamma\delta$, il n'y aura plus qu'à transporter sur le cône S'AE les points α, β, γ,... où cette droite rencontre les divers rayons $S''a_6$, $S''a_7$, $S''a_8$,.... qui représentent autant de génératrices de ce cône; or il est bien facile de retrouver les véritables positions de ces génératrices sur les deux plans de projection, et d'y rapporter à partir du sommet S' les longueurs $S''\alpha$, $S''\beta$, $S''\gamma$,..., ce qui fournira les deux projections de la développée en question. Nous n'avons point effectué ces opérations sur notre épure, afin d'éviter la confusion qui en serait résultée pour le lecteur; mais nous les achèverons dans le problème suivant, où les résultats offriront plus d'intérêt.

672. *Étant donnée une hélice à base circulaire* (ABCDEF...., A'B'C'D'E'F'....), *trouver le lieu de ses centres de courbure, et l'une de ses développées?* Fig. 128.

Après avoir construit la tangente (ET, E'T') de cette hélice, menons le plan normal correspondant E'N'N, lequel passe évidemment par le rayon (OE, E') du cylindre qui contient cette hélice, et fait avec l'axe vertical O un angle complémentaire de celui que forme la tangente. Or cette dernière ligne ayant une inclinaison constante (n° **450**), quelle que soit la position du point de contact (E, E') sur l'hélice, il s'ensuit que tous les plans normaux de cette courbe auront pareillement une inclinaison constante, et que chacun passera par le rayon du cylindre qui aboutira au point considéré sur l'hélice. Par conséquent, si l'on conçoit que ces plans normaux soient menés par des points infiniment voisins, pris à distances égales sur l'hélice proposée, ils se couperont consécutivement suivant des droites qui auront toutes des positions parfaitement symétriques relativement à l'axe vertical O; c'est-à-dire que ces droites seront *également inclinées sur cet axe*, et

(*) Ce résultat remarquable est emprunté à un Mémoire intéressant de M. *Th. Olivier*, sur les centres de courbure des épicycloïdes, inséré dans le XXIIIe cahier du *Journal de l'École Polytechnique*. Toutefois, nous croyons devoir avertir que, dans ce Mémoire, il s'est glissé une erreur sur la forme de *la projection* du lieu des centres de courbure de la développante sphérique; car cette projection ne saurait être, comme on l'a dit par inadvertance, *la développée* de la projection horizontale de la développante sphérique.

placées *à la même distance* de cette verticale. D'où je conclus que ces droites, intersections des plans normaux consécutifs, se trouveront tangentes à une nouvelle hélice tracée sur un cylindre droit à base circulaire *abcde*.... dont le rayon est encore inconnu, et qu'elles formeront *un hélicoïde développable* (n° **456**) qui sera le *lieu des pôles*, ou le *lieu de toutes les développées* (n° **659**) de l'hélice primitive (ABCDE..., A'B'C'D'E'...).

673. Pour déterminer cet hélicoïde, j'observe que sa trace horizontale sera précisément la développante du cercle inconnu *abcde*.... (n° **453**), et que cette courbe devra être tangente aux traces de tous les plans normaux. Or le plan normal relatif au point (A, A') ayant évidemment une trace AOI qui passe par le centre O, le rayon OI contiendra nécessairement l'origine de cette développante; tandis que la trace N'N perpendiculaire à OI, répondra au premier quart de révolution de cette développante; par conséquent sa distance au centre, c'est-à-dire OI ou *en*, devra se trouver précisément *égale au quart de la circonférence* inconnue *abcde*. Mais déjà il existe une relation semblable entre la soutangente ET et le quart de cercle AE; donc le rayon OA de ce dernier doit avoir avec ET, le même rapport qu'aura le rayon inconnu O*a* avec OI. D'après cette remarque, on tirera la droite A'δ' parallèle à E'T', puis $\delta'a'$ parallèle à E'N', et cette seconde parallèle déterminera la grandeur O'*a'* que l'on doit donner au rayon du cercle demandé *abcde*; ensuite, on construira l'hélice (*abcde*...., *a'b'c'd'e'*.....) de même *pas* que l'hélice primitive, et ce sera l'arête de rebroussement de l'hélicoïde en question. Cette surface aura d'ailleurs pour trace horizontale la développante *anvr* du cercle *abcde*...., et pour génératrices les tangentes de la nouvelle hélice, telles que (*en*, E'N'), (*hv*, *h'v'*), lesquelles représentent les intersections consécutives des plans normaux infiniment voisins, menés à l'hélice (ABCD...., A'B'C'D'....).

Fig. 128. **674.** Pour trouver le rayon de courbure de cette dernière ligne au point (E, E'), par exemple, il faut abaisser de ce point (*note* du n° **656**) une perpendiculaire (EO*e*, E') sur la génératrice (*en*, E'N') qui est dans le plan normal correspondant au point assigné. Or, comme cette perpendiculaire aboutit évidemment au point (*e*, E'), et que des résultats semblables arriveraient pour tout autre plan normal, nous en conclurons ces deux théorèmes bien remarquables : 1° *toute hélice à base circulaire* (ABCDE...., A'B'C'D'E'....) *a pour lieu de ses centres de courbure, une autre hélice* (*abcde*...., *a'b'c'd'e'*....) déterminée comme ci-dessus; 2° *le rayon de courbure de la première hélice est* CONSTANT, *et égal à la somme* OE + O*e des rayons des cylindres où sont situées ces deux courbes.*

675. Réciproquement, on verra aisément par des considérations semblables,

que la seconde hélice (*abcde..*, *a'b'c'd'e'....*) a pour lieu de ses centres de courbure, la première hélice (ABCD..., A'B'C'D'....) ; et que le rayon de courbure de celle-là, est aussi constamment égal à la somme Oe + OE. Cela tient à ce que le plan normal E'N'N de la première hélice, est le plan osculateur (n° 463) de la seconde ; et qu'aussi le plan normal de celle-ci, qui serait E'T'T perpendiculaire à la tangente (*en*, E'N'), se trouve le plan osculateur de la première ; de sorte qu'il y a une complète réciprocité entre ces deux hélices, et les *angles de contingence* et *de torsion* (n°s 653, 654) dans l'une, sont respectivement égaux aux *angles de torsion* et *de contingence* dans l'autre (*).

676. Si l'on veut exprimer par l'analyse la grandeur des rayons de courbure ρ et ρ' de ces deux hélices, il n'y a qu'à poser

$$\mathrm{OA} = \mathrm{R},\quad \mathrm{O}a = r,\quad \text{angle } \mathrm{T}' = \omega,\quad \mathrm{N}' = 90^\circ - \omega = \omega',\quad \mathrm{O'E'} = \tfrac{1}{4}h;$$

et le triangle rectangle $A'\partial'a'$ que nous avons tracé sur l'épure, fournira évidemment la relation $r = \mathrm{R}\,\mathrm{tang}^2\,\omega$, d'où l'on déduira

$$\rho = \mathrm{R} + r = \mathrm{R}\,(1 + \mathrm{tang}^2\omega) = \mathrm{R}\left(1 + \frac{h^2}{4\pi^2\mathrm{R}^2}\right)$$

pour la première hélice ; et pour la seconde,

$$\rho' = r + \mathrm{R} = r\,(1 + \mathrm{tang}^2\omega') = r\left(1 + \frac{h^2}{4\pi^2 r^2}\right).$$

677. Maintenant, construisons *une développée* de l'hélice (ABCD....., A'B'C'D'....), en menant d'abord par un point arbitraire (E, E') de cette courbe, une droite qui soit située (n° 658) dans le plan normal E'N'N relatif à ce point ; ou bien, une tangente à la surface enveloppe des plans normaux, laquelle surface est ici l'hélicoïde développable qui a pour arête de rebrousse- FIG. 128.

(*) Cette réciprocité entre les angles de contingence et de torsion, a lieu pareillement dans une courbe quelconque AMM'M''B (*fig.* 130) comparée avec l'arête de rebroussement UV de la surface enveloppe des plans normaux de la première ligne. Car il résulte de ce que nous avons vu au n° 659, que les plans P, P', P'',..., normaux à AMM', sont les plans osculateurs de UV, tandis que les plans osculateurs de AMM', étant perpendiculaires sur QS, Q'S',..., se trouvent seulement *parallèles* aux plans normaux de UV ; mais cela suffit pour que les angles de contingence et de torsion de AMM'..., soient respectivement égaux aux angles de torsion et de contingence de la ligne UV.

ment l'hélice (*abcd*...., *a'b'c'd'*....). Afin d'arriver à des résultats plus symétriques, choisissons pour cette première tangente, le rayon de courbure (E*e*, E'), et rappelons-nous qu'après le développement de cet hélicoïde, la développée cherchée deviendra une ligne droite (n° **659**) qui devra être le prolongement indéfini de (E*e*, E'). Si donc nous voulons développer cet hélicoïde sur son plan tangent E'N'N, il faudra (n° **467**) rabattre les tangentes (*ne*, N'E') et (Nα, N'α') suivant $n\varepsilon$ et Nα''; puis, élever à leurs extrémités deux perpendiculaires $\varepsilon\omega$ et $\alpha''\omega$ qui détermineront par leur rencontre, le centre ω et le rayon $\omega\varepsilon$ (*) du cercle $\varepsilon\lambda$ suivant lequel se transformera l'hélice (*abcd*....., *a'b'c'd'*.....); d'ailleurs, sur ce développement, la droite indéfinie $\omega\varepsilon\pi$ représentera la transformée de la développée cherchée.

Quant à la position que prendra, sur ce développement, la génératrice quelconque (*hv*, *h'v'*) de l'hélicoïde, nous l'obtiendrons en prenant l'arc de cercle $\varepsilon\eta$ de même longueur que l'arc d'hélice (*eh*, E'*h'*), longueur qui est donnée (n° **468**) par l'hypoténuse du triangle E'$\eta'\eta''$, dont la base E'η' égale l'arc horizontal *eh*; et alors la génératrice cherchée deviendra la tangente $\eta\pi$. Or cette dernière allant rencontrer la transformée $\omega\varepsilon$ de la développée, au point π, il s'agira de reporter la distance $\eta\pi$ sur la génératrice primitive (*hv*, *h'v'*); pour cela, on prendra l'hypoténuse E'$\pi'' = \eta\pi$, et la base E'π' de ce nouveau triangle rectangle, étant portée de *h* en *p*, fournira évidemment la projection horizontale *p*, puis la projection verticale *p'*, d'un point de la développée cherchée, laquelle sera (*epx*, E'*p'x'*).

678. Ainsi, un fil enroulé sur cette branche suivant la direction (*xpe*E, *x'p'*E'), décrira par son extrémité (E, E'), la partie supérieure (EFGH....., E'F'G'H'.....) de l'hélice donnée, du moins jusqu'à une certaine limite que nous allons déterminer; et le *rayon de développée* aboutissant au point (*p*, *p'*), sera la tangente (H*p*, H'*p'*). Quant à la partie inférieure (EDCB..., E'D'C'B'...), elle aura pour développée une autre branche (*e*PX, E'P'X') qui se construira comme la première, ou plutôt qui s'en déduira immédiatement, en cherchant des points (P, P') placés symétriquement avec (*p*, *p'*).

(*) Ce rayon $\omega\varepsilon$ doit se trouver egal à E*e*, puisque c'est là le rayon de courbure (n° **674**) de l'helice (*abcd*..., *a'b'c'd'*...), et que cette ligne ne doit pas changer de courbure, quand on developpe la surface dont elle est l'arête de rebroussement (n° **179**, *note*). Ainsi il aurait mieux valu rabattre une seule tangente suivant $n\varepsilon$, puis élever la perpendiculaire $\varepsilon\omega$ egale à E*e*, laquelle aurait suffi pour tracer le cercle $\varepsilon\lambda$; c'est la marche que nous avons déjà conseillée au n° **468**.

679. Il y aura sur le développement de l'hélicoïde, une tangente $\lambda\rho$ parallèle à la transformée $\omega\epsilon\pi$ de la développée : donc, si nous rapportons le point λ sur l'hélice, en prenant l'arc de cercle *ehl* égal à la base E'λ' du triangle rectangle E'λ''λ' dont l'hypoténuse est l'arc $\epsilon\lambda$ rectifié, la génératrice (*lr*, *l'r'*) de l'hélicoïde correspondra à $\lambda\rho$, et n'ira plus rencontrer la développée (*epx*, E'*p'x'*) qu'à l'infini. Toutefois, ce n'est pas là l'asymptote de cette branche; car une pareille droite doit non-seulement rencontrer la courbe en un point infiniment éloigné, mais aussi lui être tangente. Or, puisqu'au point (*p*, *p'*) situé sur la génératrice (*hv*, *h'v'*), la tangente était (H*p*, H'*p'*); pour le point infiniment éloigné situé sur (*lr*, *l'r'*), la véritable tangente, ou l'*asymptote*, partira du point (L, L') diamétralement opposé à (*l*, *l'*), et sera la droite (L*z*, L'*z'*) parallèle à (*lr*, *l'r'*).

680. On voit par-là que la branche de développée (*epx*, E'*p'x'*), quoique infinie, ne peut servir qu'à décrire la portion d'hélice (EKL, E'K'L'); et quand le point générateur (E, E') du fil mobile, est arrivé en (L, L'), il faut que ce fil prolongé en sens contraire (LZ, L'Z'), et fixé à son extrémité opposée, recommence à se plier sur une nouvelle branche (YQ*b*, Y'Q'*b''*) qui a la même asymptote, et qui servira à décrire un second arc d'hélice (LAB, L'A''B'') égal au précédent. Pour construire cette nouvelle branche de développée, dont la projection horizontale doit être évidemment symétrique de *epx*, on prendra l'arc *lb* = *le*, puis on décrira la circonférence *p*P*q*Q, sur laquelle on placera le point Q à gauche du rayon O*b*, comme le point *p* était placé à droite du rayon O*e*; enfin, on projettera Q en Q', en élevant ce dernier au-dessus de l'horizontale B''*b''* de la même quantité dont le point *p'* est abaissé au-dessous de E'λ'.

681. A la branche de développée (YQ*b*, Y'Q'*b''*) succédera une troisième branche (*bqy*, *b''q'y'*) dont chaque point (*q*, *q'*) se construira comme précédemment, et d'une manière que notre épure rend assez visible; cette troisième branche servira à décrire un nouvel arc d'hélice (BES, B''E''S'') toujours égal aux précédents, et ainsi de suite. L'asymptote de cette dernière branche serait encore parallèle à la génératrice de l'hélicoïde, qui partirait du point diamétralement opposé à (S, S''); mais il sera plus simple de mener au cercle la tangente SWU, qui coupera LZ au point W situé sur le rayon O*b*; et comme ce point serait projeté en W' sur la première asymptote, il faudra placer le point W'' à la même hauteur au-dessus de B''*b''*; puis tirer la droite W''U' de manière à former avec la verticale, le même angle que W'Z'.

682. Quant à l'asymptote (Vζ, V''ζ') de la branche (*e*PX, E'P'X'), sa pro-

jection horizontale a une position symétrique de Vz; et sa projection verticale étant évidemment parallèle à V'z', il suffira de la mener par le point V" placé au-dessous de E', comme le point V' est au-dessus.

Fig. 128. **683.** Pour mieux saisir la liaison de ces diverses branches de la développée totale d'une hélice, et bien comprendre la description de cette courbe par un *mouvement continu*, sans être obligé de transporter le point d'attache du fil mobile, d'une branche sur l'autre, il n'y a qu'à se représenter une droite indéfinie et *inflexible*, placée d'abord dans la position horizontale (Ee, E'), laquelle roule, *sans glisser*, sur la branche (*epx*, E'*p'x'*) en lui demeurant tangente. Dans ce mouvement, le point générateur (E, E') commencera par décrire l'arc d'hélice (EKL, E'K'L'), et lorsqu'il sera parvenu en (L, L'), la droite mobile sera devenue l'asymptote (Lz, L'z'); mais, comme au même instant cette droite touchera à l'infini la seconde branche (*b*Y, *b*"Y'), si elle recommence à rouler en sens contraire sur cette dernière branche, pour se rapprocher de la position horizontale (B*b*W, B"*b*"), le point générateur décrira dans cette seconde période de son mouvement non interrompu, l'arc d'hélice (LAB, L'A"B"). Puis, si de la position horizontale (B*b*, B"*b*"), la droite mobile vient à rouler sur la troisième branche (*bqy*, *b*"*q'y'*), le point générateur décrira un nouvel arc d'hélice (BES, B"E"S"), jusqu'à ce que la droite ait pris la position de l'asymptote (SWU, S" W"U'); d'où elle passera, sans interruption, sur une quatrième branche qui a la même asymptote, et ainsi de suite.

Si l'on éprouvait quelque difficulté à suivre ces divers mouvements dans l'espace, on pourrait d'abord les étudier sur une *sinusoïde* (n° **451**, *note*), courbe plane dont la développée située dans son plan, offre ainsi des branches infinies qui ont, deux à deux, une asymptote commune.

CHAPITRE II.

De la courbure des surfaces.

684. Deux surfaces sont dites *osculatrices* l'une de l'autre, lorsque tout plan mené par la normale commune, les coupe suivant deux courbes qui sont *osculatrices entre elles* (n° **650**), ou bien qui ont *le même rayon de courbure.*

Mais on doit sentir que, parmi toutes les sphères qui peuvent *toucher* une surface S en un point donné, aucune ne saurait lui être osculatrice; puisque la courbure d'une sphère est uniforme tout autour de sa normale, tandis qu'il n'en est pas ainsi d'une surface quelconque. Alors, pour estimer la courbure de cette dernière en un point donné, on cherche les rayons de courbure des diverses *sections normales*, et par leur comparaison, on acquiert des notions précises sur la forme plus ou moins aplatie de la surface autour du point considéré, ainsi que sur sa position par rapport à son plan tangent. Or il existe, entre les rayons de courbure de ces sections normales, une loi bien remarquable que nous allons d'abord étudier sur les surfaces du second degré.

685. Dans un ellipsoïde dont les trois demi-axes sont $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$, considérons spécialement un sommet C, pour lequel la normale est l'axe COZ perpendiculaire aux tangentes CX et CY des deux ellipses principales CA et CB. Si nous menons par ce point un troisième plan normal VCZ, dont la trace sur le plan tangent XCY soit CV, il coupera la surface suivant une ellipse CD qui aura évidemment pour demi-axes $OC = c$ et $OD = d$. Or on sait (n° **200**) que les rayons de courbure au sommet C des trois ellipses CA, CB, CD, ont pour grandeurs respectives Fig. 131.

$$CG = \frac{a^2}{c} = R, \quad CH = \frac{b^2}{c} = R', \quad CI = \frac{d^2}{c} = \rho;$$

et comme le demi-diamètre d de l'ellipse ADB, aura toujours une longueur comprise entre a et b, on voit qu'en supposant $a < b$, le rayon ρ se trouvera toujours plus grand que R et plus petit que R'; c'est-à-dire que de toutes les *sections normales* faites par le sommet C, la courbe CA est la section de *courbure maximum* puisque son rayon R est le plus petit (n° **653**), et la courbe CB est la section de *courbure minimum* puisque son rayon R' est plus grand que tout autre.

D'ailleurs, si l'on désigne par φ l'angle que fait le plan normal VCZ avec le plan principal XCZ, φ sera aussi l'angle compris entre l'axe OA et le diametre OD de l'ellipse ADB; et l'on sait que la longueur de ce diamètre est donnée par l'équation

$$\frac{1}{d^2} = \frac{1}{a^2}\cos^2\varphi + \frac{1}{b^2}\sin^2\varphi.$$

Donc, en multipliant tous les termes par c, et ayant égard aux valeurs pré-

cédentes des rayons ρ, R, R', il viendra

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{R}\cos^2\varphi + \frac{1}{R'}\sin^2\varphi, \tag{1}$$

relation qui permettra de calculer immédiatement le rayon de courbure ρ d'une section normale quelconque passant par le sommet C, quand on connaîtra l'angle φ de cette section avec une des deux *sections principales*, et les rayons de courbure R et R' de ces dernières courbes.

FIG. 132. **686.** Considérons maintenant un hyperboloïde à une nappe, dont l'ellipse de gorge est CAFE qui a pour axes les deux axes réels de la surface, savoir : $OA = a$, $OC = c$; tandis que l'axe imaginaire est une horizontale $Ob = b$ perpendiculaire au plan de l'ellipse que nous regardons ici comme le plan vertical de la figure. Le rayon de courbure de cette ellipse, pour le sommet C, sera une ligne $CG = \frac{a^2}{c} = R$; et celui de l'hyperbole BCL contenue dans le plan des deux axes OC et Ob, sera $CH = \frac{b^2}{c} = R'$, mais il se trouvera dirigé au-dessus du plan tangent XCY, au lieu d'être au-dessous comme CG. Maintenant, menons par le point C un plan normal quelconque VCZ, qui forme avec le plan principal XCZ un angle désigné par φ; si cet angle est assez petit, la section sera une ellipse CDF qui aura pour axes $OC = c$, $OD = d$, et ce dernier sera évidemment un diamètre de l'hyperbole ADK contenue dans le plan des deux axes horizontaux OA et Ob. Or on sait que ce diamètre est lié avec les axes de l'hyperbole, par la relation

$$\frac{1}{d^2} = \frac{1}{a^2}\cos^2\varphi - \frac{1}{b^2}\sin^2\varphi;$$

si donc on multiplie tous les termes par c, et qu'on observe que le rayon de courbure au sommet C de l'ellipse CDF est $\rho = \frac{d^2}{c}$, on en conclura

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{R}\cos^2\varphi - \frac{1}{R'}\sin^2\varphi, \tag{2}$$

relation qui rentre précisément dans la formule (1), pourvu qu'on y regarde

comme *négatif*, celui des deux *rayons principaux* R, R′, qui se trouvera dirigé *au-dessus* du plan tangent (*).

687. Cela posé, tant que l'angle φ sera peu différent de zéro, il est certain que le premier terme du second membre de la formule (2), prévaudra sur le terme négatif, et qu'ainsi le rayon de courbure ρ de la section normale CDF sera positif, ce qui annonce que cette courbe sera *convexe*, c'est-à-dire située *au-dessous* du plan tangent XCY. D'ailleurs $\frac{1}{\rho}$ étant évidemment moindre que $\frac{\cos^2\varphi}{R}$, et à plus forte raison moindre que $\frac{1}{R}$, il en résulte que le rayon variable ρ sera plus grand que R, et qu'il augmentera continuellement avec φ, jusqu'à ce que cet angle ait acquis la valeur ω déterminée par l'équation

$$\frac{\cos^2\omega}{R} = \frac{\sin^2\omega}{R'}, \quad \text{d'où } \tang\omega = \pm\sqrt{\frac{R'}{R}}.$$

Si donc on trace sur le plan tangent XCY, ou sur le plan horizontal (**) parallèle à celui-là, deux droites O′P, O′Q, qui fassent avec O′X′ des angles égaux à ω; alors, quand le plan sécant normal arrivera dans la position O′P, il coupera l'hyperboloïde suivant une ligne dont la courbure sera nulle, puisque ρ deviendra infini; et en effet, on doit voir que cette section sera l'une des deux génératrices rectilignes qui passent par le sommet C, attendu que d'après les valeurs de R et R′, l'expression de ω revient à $\tang\omega = \frac{b}{a}$.

688. Lorsque l'angle φ sera devenu plus grand que ω, et que le plan normal aura pris la position O′W′, alors la formule (2) montre que le rayon ρ aura une valeur négative; de sorte que la section correspondante se trouvera *concave*, c'est-à-dire située au-dessus du plan tangent, et ce sera une hyperbole dont le Fig. 132.

(*) Ordinairement, on adopte l'hypothèse contraire, parce que l'analyse fournit une valeur positive pour le rayon de courbure d'une courbe située *au-dessus* de sa tangente, du moins quand on compte les ordonnées positives *de bas en haut*. Mais, comme nous avons dirigé ici l'axe des z positifs *de haut en bas*, la convention faite dans le texte s'accorde bien avec l'analyse; et nous avons préféré cette disposition, parce que les sections normales sont plus commodes à figurer, quand on les place au-dessous du plan tangent.

(**) Nous employons ici, outre la figure en perspective sur le *tableau* vertical XCZ, une projection horizontale faite sur un plan perpendiculaire à la normale CZ, afin de faire mieux apercevoir les limites qui séparent les sections convexes des sections concaves.

rayon de courbure ρ ira en diminuant numériquement, jusqu'à ce que l'on ait

$$\varphi = 90^\circ, \quad \text{d'où} \quad \rho = -R' = CH :$$

ce dernier résultat se rapporte au plan normal O'Y', qui coupe la surface suivant l'hyperbole principale BCL.

689. En continuant cette discussion depuis $\varphi = 90^\circ$ jusqu'à $\varphi = 360^\circ$, on retrouverait successivement des résultats analogues, puisque la formule (2) ne renferme que les carrés de $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$. D'où l'on doit conclure, 1° que les deux plans normaux $PO'p$, $QO'q$, partagent la surface autour du point (O', C), en quatre régions distinctes : dans les deux angles $PO'Q$ et $pO'q$ opposés par le sommet, toutes les sections normales sont *convexes*, ou situées au-dessous du plan tangent XCY ; et dans les deux autres angles $PO'q$, $QO'p$, toutes les sections normales sont *concaves*, ou situées au-dessus de ce plan tangent ; d'ailleurs le passage des unes aux autres se fait par deux sections rectilignes $PO'p$, $QO'q$, qui sont les génératrices de l'hyperboloïde situées dans le plan tangent XCY. 2° Le rayon de courbure R de la section principale CAF, est le *minimum* de tous les rayons positifs, lesquels varient depuis $\rho = R$ jusqu'à $\rho = \infty$; tandis que le rayon de courbure R' de l'autre section principale BCL, est le *minimum* des rayons négatifs : ou bien, en tenant compte du signe de ces derniers, on pourra dire que $-R'$ est un *maximum*, mais seulement par rapport aux rayons négatifs qui varient depuis $\rho = -R'$ jusqu'à $\rho = -\infty$.

FIG. 133 et 134. **690.** Les propositions que nous venons de démontrer pour un sommet réel d'un ellipsoïde ou d'un hyperboloïde à une nappe, sont également vraies pour toute surface S, et *pour un point quelconque* M de cette surface dont la normale est MZ. C'est-à-dire que, *parmi toutes les sections normales passant par ce point, il y en a toujours deux,* MA *et* MB, *nommées* SECTIONS PRINCIPALES, *dont la première a un rayon de courbure* $MG = R$ *qui est* MINIMUM, *et la seconde un rayon de courbure* $MH = R'$ *qui est* MAXIMUM : *ces deux sections principales sont situées dans des plans* XMZ, YMZ, *perpendiculaires entre eux ; et quand une fois on connaît la position de ces plans et les* RAYONS PRINCIPAUX R, R', *le rayon de courbure* ρ *de toute autre section normale* MD *passant par le même point, est donné par la formule*

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{R}\cos^2\varphi + \frac{1}{R'}\sin^2\varphi, \qquad (3)$$

où φ désigne l'angle du plan de MD avec le plan de MA, et où il faudrait regarder comme *négatif*, celui des deux rayons principaux, R, R', qui serait dirigé

au-dessus du plan tangent XMY, si la surface était *non convexe*, c'est-à-dire traversée par son plan tangent en M.

Ce théorème important, dû à *Euler*, n'est guère possible à démontrer d'une manière complète et rigoureuse, au moyen de considérations purement synthétiques; c'est pourquoi nous préférons de l'admettre ici comme un résultat du calcul différentiel (*); mais c'est l'unique emprunt que nous ferons à l'analyse, et nous allons ensuite développer par la géométrie seule, les conséquences intéressantes dont ce théorème est susceptible.

691. Lorsque les deux rayons principaux $MG = R$, $MH = R'$, sont positifs, Fig. 133.
comme dans la *fig.* 133, la formule (3) montre que ρ est constamment positif, quel que soit l'angle φ; donc alors toutes les sections normales se trouvent au-dessous du plan tangent XMY, au moins dans les environs du point M, et la surface est *convexe* en ce point. D'ailleurs, en supposant $R < R'$, il est facile de voir que R est alors le *minimum absolu* de tous les rayons de courbure des sections normales passant par M, et R' le *maximum absolu* de tous ces mêmes rayons; en effet, la formule (3) écrite tour à tour sous l'une et l'autre des formes suivantes,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{R} - \sin^2\varphi.\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right), \quad \frac{1}{\rho} = \frac{1}{R'} + \cos^2\varphi.\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right),$$

montre qu'on a toujours, quel que soit l'angle φ,

$$\frac{1}{\rho} < \frac{1}{R} \text{ et } \frac{1}{\rho} > \frac{1}{R'}; \text{ d'où } \rho > R \text{ et } \rho < R'.$$

Des conséquences semblables auraient lieu, si les deux rayons principaux étaient négatifs à la fois; seulement alors, la surface se trouverait placée au-dessus du plan tangent, tout autour du point M.

692. Lorsque, pour un point particulier M d'une surface quelconque, il arrive que les deux rayons principaux R, R', sont égaux et de même signe, la formule (3) se réduit évidemment, et l'angle φ disparaît; de sorte qu'on trouve $\rho = R$ pour toutes les sections normales passant par ce point, autour duquel la surface présente une courbure uniforme dans tous les sens, comme celle d'une sphère. Ces points particuliers se nomment des *ombilics*, et nous en ferons remarquer plusieurs de ce genre dans l'ellipsoïde (n° **739**); mais il est déjà évi-

(*) Voyez l'*Analyse appliquée à la géométrie des trois dimensions*, chap. XVI.

dent que, quand la méridienne d'une surface de révolution coupe l'axe sous un angle droit, ce point est toujours un ombilic.

FIG. 134. **693.** Lorsque les deux rayons principaux sont de signes contraires, comme dans la *fig.* 134 où $MG = R$ qui se rapporte à la section (MA, M'A') se trouve positif, et où $MH = R'$ qui se rapporte à la section (MB, M'B') se trouve négatif, alors la formule (3) écrite avec le signe de R' en évidence, devient

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{R}\cos^2\varphi - \frac{1}{R'}\sin^2\varphi. \qquad (4)$$

Elle montre déjà que ρ sera tantôt positif, tantôt négatif, suivant la valeur de l'angle φ; c'est-à-dire qu'il y aura des sections normales situées les unes au-dessous, les autres au-dessus du plan tangent XMY; ainsi la surface sera *non convexe*, ou *à courbures opposées*. Pour déterminer les limites de ces diverses sections, cherchons la valeur particulière ω de l'angle φ, qui satisferait à l'équaton

$$\frac{1}{R}\cos^2\omega - \frac{1}{R'}\sin^2\omega = 0, \quad \text{d'où} \quad \tang\omega = \pm\sqrt{\frac{R'}{R}};$$

puis, traçons sur le plan tangent XMY, ou sur le plan horizontal (*) qui lui est parallèle, deux droites M'P, M'Q, qui fassent chacune avec M'X' un angle égal à ω. Alors, pour toutes les valeurs de φ comprises entre $\varphi = -\omega$ et $\varphi = +\omega$, comme aussi pour toutes celles qui tomberont entre $\varphi = 180° - \omega$ et $\varphi = 180° + \omega$, la formule (4) donnera évidemment des valeurs de ρ qui seront positives; c'est-à-dire que toutes les sections normales comprises dans les angles dièdres PM'Q et $pM'q$, seront situées au-dessous du plan tangent horizontal XMY. Au contraire, lorsque la valeur de φ tombera entre ω et $180° - \omega$, ou bien entre $180° + \omega$ et $360° - \omega$, la formule (4) donnera pour ρ une valeur négative; ce qui prouve que toutes les sections normales comprises dans les deux angles dièdres PM'q et QM'p, seront situées au-dessus du plan tangent XMY, au moins dans les environs du point M.

(*) Nous employons encore ici, pour plus de clarté, une perspective sur un plan vertical, et une projection sur un plan horizontal; si d'ailleurs on veut fixer ses idées par un exemple, on peut regarder la surface qui nous occupe comme étant la gorge d'une poulie dont l'axe serait horizontal et projeté suivant (B'L', G). Le point considéré (M, M') est alors sur le cercle de gorge (EMA, E'M'A'), et la section (BML, B'M'L') est un demi-cercle qui sert de méridien au tore de cette poulie.

694. Enfin, lorsque φ recevra une des valeurs $\varphi = \pm \omega$, ou $\varphi = 180^\circ \pm \omega$, le rayon ρ devenant *infini* dans la formule (4), il s'ensuit que les deux plans normaux *limites* PM′p, QM′q, couperont la surface suivant des courbes qui, sans être rectilignes, comme cela arrivait dans l'hyperboloïde (n° 687), seront du moins très-aplaties dans les environs du point M, et y offriront *une courbure nulle;* c'est-à-dire que chacune aura en cet endroit deux éléments communs avec sa tangente qui sera précisément la trace M′P ou M′Q du *plan normal limite* sur le plan tangent XMY. Ainsi, on peut dire que les deux plans normaux PM′p et QM′q partagent la surface en *quatre* régions distinctes qui sont tour à tour *convexes* et *concaves*. FIG. 134.

695. Puisque dans les surfaces non convexes, les rayons de courbure positifs varient, d'après la formule (4), depuis $\rho = +R$ jusqu'à $\rho = +\infty$, et les rayons négatifs depuis $\rho = -R'$ jusqu'à $\rho = -\infty$, il s'ensuit que R sera ici un *minimum* relativement aux rayons de la première classe, et $-R'$ un *maximum* analytique pour ceux de la seconde classe, en tenant compte de leurs signes; mais, si l'on voulait seulement parler de leurs grandeurs absolues, R′ serait aussi un *minimum*.

Quant à la construction graphique des sections principales et de leurs rayons de courbure, nous attendrons, pour en citer des exemples, que nous ayons parlé des *lignes de courbure;* parce que ces dernières offriront à la géométrie des secours fort utiles (*).

696. *Pour chaque point* M *d'une surface quelconque* S, *on peut construire une surface du second degré* Σ *qui soit osculatrice de* S (n° 684), *tout autour de ce point.* Supposons d'abord que la surface donnée S soit convexe en M, et que MA et FIG. 135.

(*) Pour compléter les notions précédentes, nous ajouterons que si, par la tangente MV (*fig.* 133), on faisait une section *oblique* dont le plan formât un angle θ avec la section *normale* MD qui passe par la même tangente MV, le rayon de courbure ρ_1 de la section oblique aurait avec le rayon ρ de MD, la relation suivante :

$$\rho_1 = \rho \cos \theta,$$

laquelle exprime que ρ_1 est la projection de ρ sur le plan de la section oblique; ou bien, que la sphère décrite avec le rayon ρ sera coupée, par le plan de la section oblique, suivant un petit cercle qui sera précisément le cercle osculateur de cette section. C'est le théorème dû à *Meunier*, pour la démonstration duquel nous renverrons à notre *Analyse appliquée*, chap. XVII; en faisant seulement observer ici que, d'après la formule précédente, les sections obliques faites dans une surface quelconque, seront toujours *convexes* ou *concaves* en même temps que la section normale qui passera par la même tangente.

MB représentent ses deux sections principales, ou les sections normales de *courbure maximum* et *minimum*, lesquelles ont pour rayons $MG = R$, $MH = R'$. Sur la normale MZ, prenons une distance arbitraire $MO = c$, que nous adopterons pour un des axes d'une ellipse MA′ qui, tracée dans le plan de la section MA, devra lui être osculatrice : pour remplir cette condition, il suffit de choisir le second axe $OA' = a$ de telle sorte que le rayon de courbure de l'ellipse au sommet M, soit égal à R, ce qui donne la relation

$$\frac{a^2}{c} = R, \quad \text{d'où } a = \sqrt{Rc};$$

ainsi le demi-axe $OA' = a$ se déterminera en cherchant une moyenne proportionnelle entre R et c. De même, dans le plan de la section MB, construisons une ellipse MB′ qui lui soit osculatrice, et qui ait pour ses demi-axes $OM = c$ et $OB' = b$; ce dernier se déterminera encore par la relation

$$\frac{b^2}{c} = R', \quad \text{d'où } b = \sqrt{R'c}.$$

Cela posé, les deux ellipses MA′ et MB′ déterminent complétement un ellipsoïde Σ qui aura pour ses trois demi-axes, OM, OA′, OB′, attendu que le plan de la courbe MB est perpendiculaire sur celui de MA; et je dis que cet ellipsoïde sera *osculateur* de la surface S, ce qui se réduit à prouver (n° **684**) que tout plan normal MOD coupe S et Σ suivant deux courbes MD et MD′ qui ont le même rayon de courbure. Or, en appelant ρ et ρ' les rayons de ces deux sections, ils seront donnés (n^os **690** et **685**) par les formules

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{R}\cos^2\varphi + \frac{1}{R'}\sin^2\varphi, \quad \frac{1}{\rho'} = \frac{c}{a^2}\cos^2\varphi + \frac{c}{b^2}\sin^2\varphi,$$

lesquelles prouvent que $\rho = \rho'$, d'après les valeurs précédentes de a et b.

697. On doit observer que l'ellipsoïde Σ osculateur de S pour le point M, n'est pas unique, puisque la longueur de l'axe c a été choisie arbitrairement; ainsi en prenant $c = a = R$, ou $c = b = R'$, on le rendrait de révolution, mais non pas autour de la normale MZ. D'ailleurs, nous aurions pu employer deux hyperboles, ou deux paraboles, pour courbes osculatrices des sections principales MA et MB, et la surface osculatrice de S serait devenue un hyperboloïde à deux nappes, ou un paraboloïde elliptique, qui sont tous les deux des surfaces convexes.

698. Soit maintenant une surface S non convexe, dont les sections principales MA et MB ont des rayons de courbure de sens opposé, $MG = R$, $MH = R'$. Construisons, comme ci-dessus, une ellipse MA′ qui soit osculatrice de MA au point M, et dont les demi-axes soient $MO = c$ longueur arbitraire prise sur la normale, et $OA' = a$ ligne déterminée par la relation $a = \sqrt{Rc}$; mais, pour courbe osculatrice de la section MB, nous ne pouvons plus adopter une ellipse, car il n'existe pas de surface du second degré qui admette deux sections de ce genre, situées l'une au-dessous et l'autre au-dessus du plan tangent. Nous construirons donc une hyperbole B′ML′, qui ait pour demi-axe réel la ligne $MO = c$, et pour demi-axe imaginaire une droite $OB'' = b$ perpendiculaire au plan de l'ellipse, et telle que le rayon de courbure de cette hyperbole (nº **200**) vérifie la relation Fig. 136.

$$\frac{b^2}{c} = R', \text{ d'où } b = \sqrt{R'c}.$$

Alors, l'ellipse MA′ et l'hyperbole MB′ détermineront complétement un hyperboloïde à une nappe Σ, lequel sera bien osculateur de S au point M (nº **684**); car tout plan normal qui fera un angle φ avec MA, coupera S et Σ suivant deux courbes dont les rayons de courbure ρ et ρ' seraient donnés (nºˢ **695** et **686**) par les formules

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{R}\cos^2\varphi - \frac{1}{R'}\sin^2\varphi, \quad \frac{1}{\rho'} = \frac{c}{a^2}\cos^2\varphi - \frac{c}{b^2}\sin^2\varphi,$$

lesquelles prouvent que $\rho = \rho'$, d'après les valeurs précédentes de a et b. Nous aurions eu encore un hyperboloïde osculateur de S, mais tourné en sens contraire, si nous avions mis l'ellipse à la place de l'hyperbole, et réciproquement; d'ailleurs, on ne doit pas oublier que l'axe c dirigé suivant la normale MG ou MH, peut recevoir une longueur arbitraire. Enfin, si l'on avait adopté deux paraboles pour courbes osculatrices des sections MA et MB, on aurait obtenu, pour surface osculatrice de S, un paraboloïde hyperbolique.

699. LIGNES DE COURBURE *d'une surface quelconque.* MONGE a nommé ainsi la suite des points pour lesquels les normales de la surface S vont se rencontrer consécutivement, et nous allons démontrer qu'à partir de chaque point M donné sur S, il n'existe en général que *deux lignes de courbure* MαU, Fig. 135.

M$\mathfrak{S}$V, *lesquelles se coupent à angle droit* et sont *tangentes aux sections principales* MA, MB (n° **690**), dont elles diffèrent néanmoins, puisque ordinairement elles ne sont point planes, comme ces dernières. Commençons par étudier ces lignes de courbure au sommet d'une surface du second degré.

Fig. 131. **700**. Soient CA et CB les deux sections principales qui se coupent au sommet C d'un ellipsoïde, pour lequel la normale de la surface est CO; en menant un plan parallèle au plan tangent XCY, et à une distance Cω infiniment petite, il donnera une section elliptique $\alpha\beta\varepsilon$ dont les sommets α et β seront placés sur CA et CB; et si l'on prend sur cette courbe un point quelconque N différent de α et β, je dis que la normale NK de l'ellipsoïde ne rencontrera pas la normale CO relative au sommet. En effet, cette dernière est projetée au centre ω de la petite ellipse, tandis que NK qui doit être perpendiculaire à la tangente NT, se projettera sur le plan de cette même ellipse, suivant une droite NK' encore perpendiculaire à NT: or on sait qu'une normale NK' de l'ellipse $\alpha\beta\varepsilon$, ne va point passer par le centre ω; donc la normale NK de la surface ne rencontrera jamais Cω, quelque près de C que soit pris le point N; à moins qu'on ne le choisisse en α ou β, sur une des deux sections principales CA ou CB, parce qu'alors la normale de l'ellipsoïde serait projetée suivant l'un des axes $\alpha\omega$ ou $\beta\omega$, lesquels vont passer par le centre ω.

Il résulte de là que, pour le sommet C d'un ellipsoïde, il n'y a que deux lignes de courbure qui sont dirigées d'abord suivant les éléments Cα et Cβ des deux sections principales. D'ailleurs, pour ce point particulier, les deux lignes de courbure coïncideront totalement avec les sections CAF et CBF; parce que les normales de l'ellipsoïde menées par tous les points de la courbe CA, sont situées dans le plan de cette courbe, attendu que les tangentes des sections horizontales, pour les sommets α, A,.... se trouvent toutes perpendiculaires au plan de l'ellipse CAF. Les mêmes motifs s'appliquent à la section CBF.

Fig. 132 **701**. Dans l'hyperboloïde à une nappe de la *fig.* 132, on verra aisément qu'une section parallèle au plan tangent XCY, et placée au-dessous à une distance infiniment petite, fournirait une hyperbole dont les deux sommets réels α et ε seraient sur ACE; tandis que si cette section était au-dessus de XCY, ce serait une hyperbole renversée dont les sommets réels β et λ se trouveraient sur BCL. Or, comme la normale de la surface se projetterait encore sur la normale de l'une ou de l'autre de ces hyperboles, et que cette dernière droite ne va passer par le centre qu'autant que le point de contact coïncide avec l'un des sommets, on en conclura, comme ci-dessus, que la normale OCH de l'hyperbo-

loïde en C, ne peut être rencontrée par une normale infiniment voisine que quand cette dernière part d'un point de la section principale CA ou CB. Il est donc démontré qu'au sommet C de l'hyperboloïde, il n'y a encore que deux lignes de courbure, lesquelles coïncident entièrement avec ACE et BCL, par les mêmes raisons que dans l'ellipsoïde.

702. Revenons maintenant à une surface générale S que nous supposerons d'abord convexe, autour du point quelconque M que l'on considère. Il existe toujours (n° **696**) un ellipsoïde Σ qui est osculateur de S en M; et si l'on coupe ces deux surfaces par un plan parallèle au plan tangent, et infiniment voisin, non-seulement tous les points de la section αNϐ ainsi obtenue seront communs à S et à Σ, mais encore les normales de ces deux surfaces, pour chacun des points α, N, ϐ,..., seront les mêmes. En effet, on a vu que deux sections MD, MD′, contenues dans un même plan normal quelconque, étaient osculatrices; c'est-à-dire qu'elles avaient deux tangentes consécutives communes, l'une en M, l'autre en N : donc cette dernière tangente jointe avec la tangente NT de la courbe αNϐ, déterminera un plan qui *touchera en même temps* S et Σ au point N, et par suite, la perpendiculaire à ce plan sera une normale commune aux surfaces S et Σ. Cela posé, il a été prouvé (n° **700**) que sur l'ellipsoïde Σ, la normale MO du sommet ne peut être rencontrée par une normale infiniment voisine qu'autant que celle-ci part du point α situé sur MA′, ou du point ϐ situé sur MB′; donc aussi, sur la surface S, il n'y a que les deux normales αG et ϐH qui aillent couper la normale MO; et par conséquent il n'existe, à partir du point M, que deux lignes de courbure dont *les premiers éléments* Mα et Mϐ *sont communs aux sections principales* MA et MB. Maintenant si, à partir de α, on voulait trouver un point infiniment voisin α′ dont la normale allât couper la précédente αG, il faudrait choisir ce nouveau point sur une des deux sections principales relatives à α : or, en général, aucune de ces deux dernières ne serait dans le plan de MA; par conséquent la première ligne de courbure Mαα′U sera *gauche* ordinairement, et elle se trouvera seulement *tangente à la section principale* MαA. Une conséquence analogue a lieu pour la seconde ligne de courbure MϐV qui touchera la section principale MϐB; mais différera ordinairement de celle-ci dans le reste de son cours; et d'ailleurs, *ces deux lignes de courbure* MU et MV *se couperont à angle droit* en M, comme les deux sections principales auxquelles elles sont tangentes. Fig. 135.

703. En outre, les portions MG et MH de la normale primitive MO, déterminées par sa rencontre avec les deux normales voisines, et que Monge a nommées les *rayons de courbure de la surface* au point M, ne sont autre chose Fig. 135

43..

que les deux *rayons principaux* définis au n° **690**. En effet, les droites MG et αG étant normales à la surface S, le sont nécessairement à la courbe MA; et comme elles sont d'ailleurs dans son plan, leur rencontre G est bien le centre du cercle osculateur (n° **650**) de la section MA : de même, H est le centre de courbure de la section MB; mais la dénomination adoptée par *Monge,* tient à une propriété qu'il importe de faire ressortir.

Si du point G comme centre, avec une des normales GM, Gα, qui sont égales (n° **650**), on décrit une sphère, elle *touchera* la surface S *en deux points consécutifs* M et α, puisque deux de ses rayons sont normaux à S; et il en arrivera autant pour la sphère décrite du point H, avec le rayon HM=H6. Tandis que si, avec le rayon de courbure MI=NI d'une autre section normale MND, on décrivait une sphère, elle toucherait la surface S seulement en M, et non en N; car le rayon NI *ne serait pas normal à la surface* S, puisque nous venons de prouver que la véritable normale NK ne peut aller couper MO. Ainsi, les portions MG et MH de la normale en M, sont les rayons de deux sphères qui *seules* peuvent avoir *deux plans tangents consécutifs communs avec* S, et dont la courbure exprime le maximum et le minimum de courbure que présentent les diverses sections normales autour du point M. Toutefois, il ne faut pas dire que ces deux sphères sont *osculatrices* de S; parce que le double contact qu'elles ont chacune avec cette surface, n'a lieu que dans une direction, et non tout autour du point M, comme l'exigerait le véritable caractère de l'osculation (n° **684**).

704. Il faut aussi se garder de croire que MG soit le rayon de courbure de la ligne MαU, c'est-à-dire le rayon du cercle qui aurait avec cette ligne deux éléments communs. En effet, il est bien vrai que les deux droites MG et αG, étant normales à la surface, sont aussi telles par rapport à la courbe MαU : mais, pour que leur rencontre G donnât le centre de courbure de MαU, il faudrait que ces normales fussent situées toutes deux dans le plan osculateur de cette courbe (n° **650**); ce qui n'arrivera que dans le cas particulier où MU coïncidera avec MA, ou du moins lorsque MU et MA auront un contact du second ordre.

Fig. 136. **705**. Pour une surface non convexe, on démontrera d'une manière toute semblable l'existence et les propriétés des *deux lignes de courbure* relatives à un point quelconque M, en construisant (n° **698**) l'hyperboloïde osculateur de cette surface en M, et y appliquant ce que nous avons prouvé pour la rencontre des normales au sommet d'un hyperboloïde (n° **701**). Seulement ici, les deux *centres de courbure* G et H seront placés l'un au-dessous, l'autre au-dessus du plan tangent; mais toutes les relations précédentes seront également vraies.

706. Lorsque le point M considéré sur une surface quelconque, sera un *ombilic* (n° **692**), le nombre des lignes de courbure deviendra indéfini, comme celui des sections principales auxquelles elles doivent être tangentes; mais cette circonstance particulière ne se présentera jamais dans les surfaces non convexes, puisque quand même les rayons principaux seraient égaux en grandeur absolue, ils ne seraient pas identiques quant à la position.

707. Après avoir ainsi démontré généralement l'existence de deux lignes de courbure pour chaque point d'une surface quelconque, il est bon de citer divers exemples où la détermination de ces lignes s'effectue immédiatement.

Dans une surface de révolution décrite par un méridien quelconque AME, ce méridien est lui-même une première ligne de courbure pour chacun de ses points, tel que M; car les normales de la surface MG, αG, α'G',.... se trouvant contenues toutes dans le plan méridien (n° **130**), iront se couper consécutivement sur la développée GG′G″ .... de la courbe MA. La seconde ligne de courbure passant par le point M est évidemment le parallèle M$\mathfrak{E}$V, puisque toutes les normales de la surface qui partent des points M, $\mathfrak{E}$, V, ... vont aboutir (n° **130**) au même point H de l'axe. Ajoutons qu'ici les *deux rayons de courbure de la surface* sont le rayon de courbure MG du méridien, et la portion MH de la normale comprise entre le point considéré M et l'axe de révolution. Fig. 139 et 140.

708. Quant aux deux *sections principales* de la surface (n° **690**), relatives au point quelconque M, la première est encore le méridien MA; car le plan de cette section doit contenir la normale MG de la surface, et l'élément Mα de la ligne de courbure qui lui est tangente (n° **702**); et cette coïncidence entière entre la section principale et la ligne de courbure, se reproduira évidemment toutes les fois que cette dernière *sera plane* et que *son plan renfermera la normale de la surface*. La seconde section principale pour le point M, ne coïncide plus avec l'autre ligne de courbure M$\mathfrak{E}$V, parce que celle-ci, quoique plane, ne renferme pas la normale MH; mais on obtiendra aisément cette seconde section principale M$\mathfrak{E}$B, en conduisant suivant MHG un plan sécant perpendiculaire au plan de la première section MA, et la courbe M$\mathfrak{E}$B aura un élément M$\mathfrak{E}$ commun avec le parallèle M$\mathfrak{E}$V. D'ailleurs, les deux rayons de courbure des sections normales MA et MB, seront (n° **703**) les rayons de courbure MG et MH de la surface.

709. Dans un cylindre à base quelconque, la génératrice rectiligne qui passe par le point considéré, sera évidemment une première ligne de courbure; car, le plan tangent étant commun tout le long de cette génératrice, les diverses normales seront parallèles entre elles, et contenues dès lors dans un même plan, quoiqu'elles n'aillent ici se rencontrer qu'à l'infini. Cette génératrice sera en

même temps une première section principale, par la raison générale citée au numéro précédent; et *la courbure* de la surface *sera nulle* dans le sens de la génératrice, puisque le rayon de courbure fourni par la rencontre de deux normales voisines, se trouvera infini. Ensuite, si par le point considéré, on mène un plan perpendiculaire à la génératrice, *la section orthogonale* ainsi produite sera la seconde ligne de courbure, puisque les normales du cylindre relatives aux divers points de cette courbe, se trouveront évidemment dans son plan, et iront se couper sur la développée de cette section orthogonale dont le rayon de courbure devient ainsi le *rayon minimum* de la surface; c'est-à-dire que *la courbure maximum* du cylindre a lieu dans le sens de la section orthogonale, laquelle est aussi évidemment (n° **708**) la seconde section principale.

710. On verra de même que, dans un cône à base quelconque, chaque génératrice rectiligne est à la fois une ligne de courbure et une section principale, dans le sens de laquelle la surface offre une courbure nulle : puis, comme toutes ces génératrices doivent être coupées à angles droits par les lignes de la seconde courbure, ces dernières seront les intersections du cône avec des sphères dont le centre commun sera placé au sommet. Quant à la seconde section principale relative à un point donné sur une génératrice, on l'obtiendra en menant par la normale du cône en ce point, un plan sécant perpendiculaire à la génératrice.

711. S'il s'agit d'une surface développable quelconque, la génératrice rectiligne sera encore à la fois une ligne de courbure et une section principale dont le rayon de courbure se trouvera infini, attendu que le plan tangent de la surface est commun tout le long de cette génératrice. La seconde section principale pour un point donné M, s'obtiendra en menant par la normale en ce point, un plan sécant perpendiculaire à la génératrice qui y passe; et la seconde ligne de courbure qui doit couper à angles droits toutes les génératrices, sera une *développante* de l'arête de rebroussement de la surface. Ainsi, dans l'hélicoïde développable de la *fig.* 96, les génératrices rectilignes sont les lignes de première courbure, et les lignes de seconde courbure sont les sections horizontales, telles que ABCDLMPQ...; car cette spirale coupe à angles droits toutes les génératrices, et elle est bien une développante (n° **661**) de l'hélice ($A\mathcal{6}\gamma\delta$...., $A'\mathcal{6}'\gamma'\delta'$....).

Fig. 143. **712**. Lorsque la surface proposée S sera gauche, la génératrice GMP ne sera plus une ligne de courbure, puisque les normales le long de cette droite, loin de se rencontrer, forment un paraboloïde hyperbolique (n° **595**); mais GMP se trouvant dans le plan tangent en M, sera précisément la section d'un des deux

plans normaux limites (n° **694**) qui séparent les sections normales placées au-dessous du plan tangent, d'avec celles qui sont situées au-dessus. Or, comme le plan tangent en M coupera la surface gauche suivant une seconde branche Mα, si on lui mène sa tangente MQ qui sera la trace du second plan normal limite, et que l'on divise par moitiés l'angle PMQ et son supplément, au moyen des droites MA et MB, ces dernières seront les traces des deux *sections principales* sur le plan tangent, et ce seront aussi les tangentes aux deux lignes de courbure partant de M.

713. Des résultats semblables auraient lieu pour une surface S qui, sans être gauche, serait non convexe, parce que le plan tangent d'une telle surface la couperait nécessairement suivant deux branches passant par le point de contact, et dont les tangentes indiqueraient encore la position des plans normaux limites; d'où l'on conclurait, comme ci-dessus, la direction des sections principales et des lignes de courbure en ce point.

714. Après ces divers exemples, rentrons dans la théorie générale, et concevons qu'à partir d'un point M pris à volonté sur une surface quelconque S, on cherche, parmi les points infiniment voisins, les deux seuls M' et K pour lesquels les normales vont couper celle de M; puis, qu'à partir de M', on fasse la même recherche qui fournira les points M″ et K', et que l'on continue à opérer semblablement pour les points M″,..., K, K',..., R, R',...; on obtiendra ainsi deux séries de lignes de courbure, FIG. 142.

MM'U, KK'U', RR'U″,..... et MKV, M'K'V', M″K″V″,....,

lesquelles partageront la surface proposée en quadrilatères curvilignes dont les côtés se couperont toujours *à angles droits* (n° **702**), et indiqueront les directions des *deux courbures de la surface*, c'est-à-dire les directions où elle présentera, autour de chaque point, une courbure maximum ou minimum (n° **703**).

715. Maintenant si, par tous les points d'une des lignes de la première courbure MU, on conçoit les diverses normales de la surface S, ces droites qui se rencontreront consécutivement, formeront une surface développable dont l'arête de rebroussement GG'G″ tangente à toutes ces normales, sera la suite des centres de la première courbure de S, relatifs à la ligne MU. Observons, d'ailleurs, que cette arête de rebroussement sera *une développée* (n° **658**) de la ligne MU, et que cette dernière se trouvera aussi une ligne de courbure (n° **711**) pour la surface développable formée par les normales en question. En opérant ainsi pour chaque ligne KU', RU″, TU″,.... de la première courbure,

on obtiendra une série de surfaces développables, chacune normale à S, et dont les arêtes de rebroussement GG'G''..., $G_1G_1'G_1''$..., formeront, par leur ensemble, une surface Σ *lieu des centres de la première courbure* de S, et à laquelle toutes les normales de cette dernière seront tangentes. De même, il existera une seconde surface Σ' *lieu des centres de la seconde courbure* de S, et qui sera formée par les arêtes de rebroussement, telles que HH'H''..., de toutes les surfaces développables produites par les normales menées le long de chaque ligne de seconde courbure, MV, M'V', M''V'',....; et cette surface Σ' sera encore touchée par les mêmes normales que Σ.

716. Ordinairement, les lieux Σ et Σ' de tous les centres de courbure, ne seront autre chose que deux nappes distinctes d'une même surface courbe, assujetties à une génération commune, et représentées par une équation unique. Mais quelquefois aussi, ce seront deux surfaces indépendantes; comme dans les surfaces de révolution, où la nappe Σ' des centres de courbure relatifs aux parallèles, se réduit à l'axe de révolution lui-même (n° **707**), et où la nappe Σ des centres de courbure relatifs aux divers méridiens, est une nouvelle surface de révolution engendrée par la rotation de la développée plane du méridien (n° **707**) autour du même axe. Au reste, les deux nappes des centres de courbure de la surface S sont, par rapport à celle-ci, ce que les développées sont par rapport aux lignes courbes.

Fig. 142. **717.** Il faut bien observer que les surfaces développables, normales à S le long des lignes de première courbure MU, KU', RU'',..., sont tangentes à la seconde nappe des centres Σ', tandis que la première nappe Σ est touchée par les surfaces développables qui passent par les lignes de seconde courbure MV, M'V', M''V'',.... En effet, les normales parties de M, M', M'', se coupent sur la première nappe Σ en G, G', aussi bien que les normales parties de K, K', K'' qui se coupent en G_1, G_1'; mais la rencontre des normales de M à K, de M' à K', de M'' à K'', se fait en H, H_1, H_2, sur la seconde nappe Σ' : donc cette nappe est le lieu des *intersections consécutives* de toutes les surfaces développables de la première série, ou bien elle est leur *enveloppe* (n° **190**), et conséquemment elle se trouve tangente à chacune d'elles. On verra de même que la nappe Σ est l'*enveloppe* de toutes les surfaces développables relatives aux lignes de la seconde courbure.

718. Ce qui précède montre que deux surfaces développables normales à S, et qui appartiennent à la même série, ou qui passent par deux lignes de courbure de la même espèce, comme MU et KU', se coupent suivant une courbe HH_1H_2 qui est située sur la nappe des centres de l'espèce opposée. Mais

si l'on compare les surfaces développables de séries différentes, on verra qu'elles se coupent deux à deux suivant une normale de S, comme GMM'U et GMKV qui ont pour intersection la droite MG. De plus, cette intersection se fait toujours *à angle droit*, puisque les plans M'MG et KMG qui sont évidemment tangents à ces deux surfaces développables, se trouvent perpendiculaires l'un sur l'autre, attendu que les éléments MM' et MK des deux lignes de courbure sont perpendiculaires entre eux et à la normale MG.

719. Or le plan M'MG tangent à une surface développable de la première série, doit toucher (n° **717**) la seconde nappe des centres Σ'; et de même, le plan KMG sera tangent à la première nappe Σ : donc, puisque ces plans sont rectangulaires, toutes les fois que l'on considérera ces deux nappes d'un *point de vue* M pris à volonté sur S, *les contours apparents* de ces deux nappes paraîtront toujours se couper à angles droits.

720. Observons encore que le plan M'MG est le plan osculateur de l'arête de rebroussement GG'G''.... située sur la nappe Σ; or, puisque ce plan est perpendiculaire sur KMG qui touche cette nappe (n° **717**), il s'ensuit que la courbe GG'G''.... a tous ses plans osculateurs *normaux à la nappe* Σ; et par suite (n° **189**) cette courbe est *la ligne minimum* entre deux de ses points sur la surface Σ. La même conséquence a lieu pour toutes les autres arêtes de rebroussement situées sur cette nappe, comme aussi pour toutes celles qui composent la nappe Σ'.

721. Si les deux nappes Σ et Σ' se coupent quelque part, elles se couperont à angles droits, d'après ce que nous venons de dire; et leur intersection Φ s'appelle *le lieu des centres de courbure sphérique*, parce que chaque tangente à la courbe Φ sera une normale de S, qui ira percer cette surface en un point λ pour lequel les deux courbures auront évidemment même rayon et même centre; de sorte qu'elles seront égales, comme cela arrive en chaque point d'une sphère. Aussi, l'ensemble de toutes les tangentes à l'intersection Φ, ira percer la surface S suivant une courbe λλ'λ''.... qui se nomme *la ligne des courbures sphériques*, et qui coupe nécessairement toutes les lignes de courbure de première et de seconde espèce.

722. « Il est bien évident », dit *Monge*, « que la ligne des courbures sphériques sur la surface S, est une développante de la ligne des centres de courbure sphérique Φ. Ainsi, après avoir fixé un fil en un des points de cette intersection des deux nappes des centres, si en le tendant, on le fait mouvoir de manière qu'il s'enveloppe sur cette intersection, et que la partie rectiligne

du fil soit toujours tangente à cette courbe, un des points de ce fil parcourra la ligne des courbures sphériques. Mais si, en tendant le fil, on ne s'assujettit à aucune condition, et l'on suppose qu'il n'exerce aucun frottement sur les nappes des centres, dans quelque position qu'on le considère, il sera divisé en trois parties : la première sera enveloppée sur une partie de l'intersection des deux nappes; la seconde sera pliée et tendue sur la nappe des centres dont le fil se sera rapproché, et sera appliquée sur une des arêtes de rebroussement (*) dont cette nappe est le lieu, et ces deux parties de courbe se toucheront à leur point commun; la troisième partie du fil en ligne droite sera tangente à cette arête de rebroussement, et normale à la surface S; enfin, l'extrémité du fil sera sur cette surface même. Ainsi, en agitant le fil constamment tendu, on pourra transporter le même point du fil successivement sur tous les points de la surface. On voit donc qu'une surface quelconque peut être engendrée par les deux mouvements continus du point d'un fil tendu qui s'enveloppe sur les nappes des centres, de même qu'une courbe plane peut être engendrée par le point d'un fil tendu qui s'enveloppe sur la développée de la courbe. »

723. « Voyons actuellement », continue *Monge*, « quelques exemples de l'utilité dont ces généralités peuvent être dans certains arts. Le premier exemple sera pris dans l'architecture.

» Les voûtes construites en pierre de taille sont composées de pièces distinctes, auxquelles on donne le nom générique de *voussoirs*. Chaque voussoir a plusieurs faces qui exigent la plus grande attention dans l'exécution : 1° la face qui doit faire parement, et qui devant être une partie de la surface visible de la voûte, doit être exécutée avec la plus grande précision : cette face se nomme *douelle;* 2° les faces par lesquelles les voussoirs consécutifs s'appliquent les uns contre les autres : on les nomme généralement *joints*. Les joints exigent aussi la plus grande exactitude dans leur exécution; car la pression se transmettant d'un voussoir à l'autre perpendiculairement à la surface du joint, il est nécessaire que les deux pierres se touchent par le plus grand nombre possible de points, afin que pour chaque point de contact, la pression soit la moindre, et que pour tous elle approche le plus de l'égalité. Il faut donc que dans chaque voussoir les joints approchent le plus de la véritable

(*) Parce que cette arête est la courbe *minimum* entre deux de ses points, comme nous l'avons démontré n° 720.

surface dont ils doivent faire partie; et pour que cet objet soit plus facile à remplir, il faut que la surface des joints soit de la nature la plus simple et de l'exécution la plus susceptible de précision. C'est pour cela que l'on fait ordinairement les joints plans; mais les surfaces de toutes les voûtes ne comportent pas cette disposition, et dans quelques-unes on blesserait trop les convenances dont nous parlerons dans un moment, si l'on ne donnait pas aux joints une surface courbe. Dans ce cas, il faut choisir parmi toutes les surfaces courbes qui pourraient d'ailleurs satisfaire aux autres conditions, celles dont la génération est la plus simple, et dont l'exécution est plus susceptible d'exactitude. Or, de toutes les surfaces courbes, celles qu'il est plus facile d'exécuter sont celles qui sont engendrées par le mouvement d'une ligne droite, et surtout les surfaces développables; ainsi, lorsqu'il est nécessaire que les joints des voussoirs soient des surfaces courbes, on les compose, autant qu'il est possible, de surfaces développables.

» Une des principales conditions auxquelles la forme des joints des voussoirs doit satisfaire, c'est d'être partout perpendiculaires à la surface de la voûte que ces voussoirs composent. Car, si les deux angles qu'un même joint fait avec la surface de la voûte étaient sensiblement inégaux, celui de ces angles qui excéderait l'angle droit, serait capable d'une plus grande résistance que l'autre; et dans l'action que deux voussoirs consécutifs exercent l'un sur l'autre, l'angle plus petit que l'angle droit serait exposé à éclater, ce qui, au moins, déformerait la voûte, et pourrait même altérer sa solidité, et diminuer la durée de l'édifice. Lors donc que la surface d'un joint doit être courbe, il convient de l'engendrer par une droite qui soit partout perpendiculaire à la surface de la voûte; et si l'on veut de plus que la surface du joint soit développable, il faut que toutes les normales à la surface de la voûte, qui composent, pour ainsi dire, le joint, soient consécutivement deux à deux dans un même plan. Or, nous venons de voir que cette condition ne peut être remplie, à moins que toutes les normales ne passent par une même ligne de courbure de la surface de la voûte; donc, si les surfaces des joints des voussoirs d'une voûte doivent être développables, il faut nécessairement que ces surfaces rencontrent celle de la voûte dans ses lignes de courbure.

» D'ailleurs, avec quelque précision que les voussoirs d'une voûte soient exécutés, leur division est toujours apparente sur la surface; elle y trace des lignes très-sensibles, et ces lignes doivent être soumises à des lois générales, et satisfaire à des convenances particulières, selon la nature de la surface de la voûte. Parmi les lois générales, les unes sont relatives à la stabilité, les

autres à la durée de l'édifice; de ce nombre est la règle qui prescrit que les joints d'un même voussoir soient rectangulaires entre eux, par la même raison qu'ils doivent être eux-mêmes perpendiculaires à la surface de la voûte. Aussi les lignes de division des voussoirs doivent être telles, que celles qui divisent la voûte en assises, soient toutes perpendiculaires à celles qui divisent une même assise en voussoirs. Quant aux convenances particulières, il y en a de plusieurs sortes, et notre objet n'est pas ici d'en faire l'énumération; mais il y en a une principale, c'est que les lignes de division des voussoirs qui, comme nous venons de le voir, sont de deux espèces, et qui doivent se rencontrer toutes perpendiculairement, doivent aussi porter le caractère de la surface à laquelle elles appartiennent. Or il n'existe pas d'autre ligne, sur la surface courbe, qui puisse remplir en même temps toutes ces conditions, que les deux suites de lignes de courbure, et elles les remplissent complétement. Ainsi, la division d'une voûte en voussoirs doit donc toujours être faite par des lignes de courbure de la surface de la voûte, et les joints doivent être des portions de surfaces développables formées par les normales à la surface qui, considérées consécutivement, sont deux à deux dans un même plan; afin que pour chaque voussoir, les surfaces des quatre joints et celle de la voûte soient toute rectangulaires.

» Avant la découverte des considérations géométriques sur lesquelles tout ce que nous venons de dire est fondé, les artistes avaient un sentiment confus des lois auxquelles elles conduisent, et ordinairement ils avaient coutume de s'y conformer. Ainsi, par exemple, lorsque la surface de la voûte était de révolution, soit qu'elle fût en sphéroïde, soit qu'elle fût en berceau tournant, ils divisaient ses voussoirs par des méridiens et par des parallèles, c'est-à-dire, par les lignes de courbure de la surface de la voûte. Les joints qui correspondaient aux méridiens, étaient des plans menés par l'axe de révolution; ceux qui correspondaient aux parallèles, étaient des surfaces coniques de révolution autour du même axe; et ces deux espèces de joints étaient rectangulaires entre eux, et perpendiculaires à la surface de la voûte. Mais, lorsque les surfaces des voûtes n'avaient pas une génération aussi simple, et quand leurs lignes de courbure ne se présentaient pas d'une manière aussi marquée, comme dans les voûtes en sphéroïdes allongés, et dans un grand nombre d'autres, les artistes ne pouvaient plus satisfaire à toutes les convenances, et ils sacrifiaient, dans chaque cas particulier, celles qui leur présentaient les difficultés les plus grandes.

» Il serait donc convenable que, dans chacune des écoles de Géométrie

descriptive établies dans les départements, le professeur s'occupât de la détermination et de la construction des lignes de courbure des surfaces employées ordinairement dans les arts, afin que, dans le besoin, les artistes, qui ne peuvent pas consacrer beaucoup de temps à de semblables recherches, pussent les consulter avec fruit et profiter de leurs résultats.

724. » Le second exemple que nous rapporterons sera pris dans l'art de la gravure.

» Dans la gravure, les teintes des différentes parties de la surface des objets représentés, sont exprimées par des hachures que l'on fait d'autant plus fortes ou d'autant plus rapprochées, que la teinte doit être plus obscure. Lorsque la distance à laquelle la gravure doit être vue, est assez grande pour que les traits individuels de la hachure ne soient pas aperçus, le genre de la hachure est à peu près indifférent; et, quel que soit le contour de ces traits, l'artiste peut toujours les forcer et les multiplier, de manière à obtenir la teinte qu'il désire et à produire l'effet demandé. Mais, et c'est le cas le plus ordinaire, quand la gravure est destinée à être vue d'assez près pour que les contours des traits de la hachure soient aperçus, la forme de ces contours n'est plus indifférente. Pour chaque objet, et pour chaque partie de la surface d'un objet, il y a des contours de hachure plus propres que tous les autres, à donner une idée de la courbure de la surface; ces contours particuliers sont toujours au nombre de deux, et quelquefois les graveurs les emploient tous deux à la fois, lorsque, pour forcer plus facilement leurs teintes, ils croisent les hachures. Ces contours, dont les artistes n'ont encore qu'un sentiment confus, sont les projections des lignes de courbure de la surface qu'ils veulent exprimer Comme les surfaces de la plupart des objets ne sont pas susceptibles de définition rigoureuse, leurs lignes de courbure ne sont pas de nature à être déterminées, ni par le calcul, ni par des constructions graphiques. Mais si, dans leur jeune âge, les artistes avaient été exercés à rechercher les lignes de courbure d'un grand nombre de surfaces différentes, et susceptibles de définitions exactes, ils seraient plus sensibles à la forme de ces lignes et à leur position, même pour les objets moins déterminés; ils les saisiraient avec plus de précision, et leurs ouvrages auraient plus d'expression.

» Nous n'insisterons pas sur cet objet qui ne présente peut-être que le moindre des avantages que les arts et l'industrie retireraient de l'établissement d'une école de Géométrie descriptive dans chacune des principales villes de France. »

FIG. 135. **725.** DÉTERMINATION GRAPHIQUE *des lignes de courbure.* Nous avons déjà cité (nos **707, 708**,....) plusieurs genres de surfaces pour lesquels il est aisé d'apercevoir immédiatement la forme de ces lignes; mais, si l'on voulait trouver leurs directions pour un point M donné sur une surface quelconque S, voici la marche qu'il faudrait suivre, en supposant d'abord cette surface *convexe.* Imaginons, sans le construire, l'ellipsoïde osculateur de S au point M, lequel a déjà été représenté dans la *fig.* 135; puis, rappelons-nous (n° **696**) que tout plan normal coupe ces deux surfaces suivant des courbes MD, MD', qui ont le même rayon de courbure ρ en M, et qu'en outre ce rayon est lié avec les demi-axes MO $= c$, OD' $= d$ de l'ellipse MD', par la relation $\rho = \frac{d^2}{c}$, ou $d = \sqrt{c\rho}$. Il suit de là que, connaissant ρ et c qui a une longueur arbitraire, on peut trouver OD' $= d$ par une moyenne proportionnelle; d'ailleurs cette dernière ligne sera toujours, pour chaque plan normal, un demi-diamètre de l'ellipse A'B'E' dont les axes, inconnus ici de position et de grandeur, suffiraient évidemment pour retrouver la courbure et la position des sections principales MA et MB de la surface S en M; aussi, par cette raison, nous appellerons *indicatrice* cette ellipse A'B'E' qui est la section faite dans l'ellipsoïde osculateur, par un plan mené du centre, parallèlement au plan tangent du point M.

726. Pour construire cette indicatrice (*), on conduira par la normale en M divers plans sécants assez rapprochés les uns des autres, et après avoir construit *en vraie grandeur* les sections ainsi produites dans S, on cherchera par la méthode du n° **666**, leurs rayons de courbure ρ, ρ', ρ'',... relatifs au
FIG. 135 et 137. point M; puis, sur un plan quelconque et à partir d'un point arbitraire m, on tracera des rayons vecteurs md, md', md'',..., formant entre eux les mêmes angles que comprenaient les plans sécants, et ayant des longueurs égales aux moyennes proportionnelles suivantes,

$$md = \sqrt{c\rho},\quad md' = \sqrt{c\rho'},\quad md'' = \sqrt{c\rho''},....,$$

où c désigne une longueur arbitraire, mais constante. Alors, la courbe qui passera par tous les points d, d', d'',..., sera *l'indicatrice* dont nous avons parlé

(*) Cette marche a été employée d'abord par M. Dupin, dans ses *Développements de Géométrie.*

plus haut; et si, après avoir tracé cette ellipse, on décrit avec le rayon md'' un arc de cercle qui la coupe en f, la droite ma menée par le milieu de cet arc, et la perpendiculaire mb seront les deux demi-axes de l'indicatrice, lesquels sont aussi ceux de l'ellipsoïde osculateur qui a pour troisième axe, suivant la normale, la ligne $2c$. De là il résulte (nos **696** et **703**) que les rayons de courbure de la surface S en M, auront pour grandeurs

$$R = \frac{\overline{ma}^2}{c}, \quad R' = \frac{\overline{mb}^2}{c};$$

et la position des sections principales sera aussi connue, car leurs plans devront passer par la normale en M, et faire avec le plan de la section md des angles égaux à dma et dmb; ou plutôt, si l'on regarde le plan de la *fig.* 137 comme parallèle au plan tangent de S en M (*fig.* 135), les droites ma et mb seront les traces des plans normaux qui contiennent ces sections principales; et ce seront aussi les projections des tangentes aux deux lignes de courbure partant de M, de sorte que le premier élément de chacune de ces lignes, sera dirigé suivant ma ou mb.

727. Lorsque la surface proposée S sera *non convexe* autour du point assigné M, on imaginera, sans le construire, l'hyperboloïde osculateur qui a déjà été représenté dans la *fig.* 136, et l'on se rappellera (n° **686**) que les rayons de courbure des sections normales faites par le sommet M de cet hyperboloïde, sont liés avec les diamètres de la section parallèle au plan tangent et passant par le centre O, par la relation $\rho = \frac{d^2}{c}$; puis, comme ces sections normales ont la même courbure que celles qui sont faites par les mêmes plans dans la surface S, on en déduira le procédé graphique suivant. FIG. 136 et 138.

Par la normale de S en M, on conduira divers plans sécants assez près les uns des autres, et après avoir construit *en vraie grandeur* ces sections et leurs rayons de courbure ρ, ρ', ρ'',.... (n° **666**) relatifs au point M, on cherchera les moyennes proportionnelles suivantes

$$d = \sqrt{c\rho}, \quad d' = \sqrt{c\rho'}, \quad d'' = \sqrt{c\rho''}, \ldots\ldots,$$

où c désigne une ligne arbitraire, mais constante; puis, on portera ces longueurs d, d', d'',..., suivant les droites md, md', md'',..., tracées sur un plan quelconque, mais formant entre elles les mêmes angles que comprenaient les plans normaux dont on s'est servi; et *l'indicatrice* qui passera par tous les points

$d, d', d'', \ldots$, ainsi déterminés, sera l'hyperbole que produirait dans l'hyperboloïde osculateur, un plan sécant mené par le centre parallèlement au plan tangent du point M.

728. Les constructions précédentes supposent que tous les rayons $\rho, \rho', \rho'', \ldots$, étaient positifs; car, si l'un des plans normaux à S fournissait une section située *au-dessus* du plan tangent, le rayon de courbure ρ_2 de cette section se trouvant *négatif* (n° **686**, *note*), la moyenne proportionnelle $\sqrt{c\rho_2}$ serait imaginaire; résultat qui s'accorde bien, il est vrai, avec la nature des diamètres de l'hyperbole $d, d', d'', \ldots$, lesquels ne rencontrent plus cette courbe quand ils s'écartent au delà d'une certaine limite, mais qui exige une modification dans les opérations graphiques. Lors donc qu'on rencontrera des sections normales situées au-dessus du plan tangent de S en M, on ne tiendra compte que de la grandeur absolue de leurs rayons de courbure $\rho_2, \rho'_2, \rho''_2, \ldots$, et après avoir construit les moyennes proportionnelles

$$m\delta = \sqrt{c\rho_2}, \quad m\delta' = \sqrt{c\rho'_2}, \quad m\delta'' = \sqrt{c\rho''_2}, \ldots,$$

on aura soin de distinguer cette classe de rayons vecteurs, pour réunir leurs extrémités par une hyperbole particulière $\delta b \delta'$ qui sera une nouvelle branche de l'*indicatrice*, et que l'on peut regarder comme la section que produirait dans l'hyperboloïde osculateur, un plan parallèle au plan tangent, mais mené *au-dessus* du point M, et à une distance égale à c.

FIG. 138. **729.** Cela posé, on construira le premier axe ma de l'indicatrice, en le menant par le milieu de l'arc de cercle df décrit avec un des diamètres md, puis le second axe mb qui est perpendiculaire au premier, et l'on en conclura les asymptotes mP et mQ communes à ces deux hyperboles *conjuguées*. Alors, les deux rayons de courbure de la surface S au point M (n° **698**) auront pour grandeurs

$$R = \frac{\overline{ma}^2}{c}, \quad R' = \frac{\overline{mb}^2}{c},$$

et les sections principales seront données par deux plans normaux qui formeraient avec le plan connu relatif à md, les angles dma et dmb; ou plutôt, si l'on regarde le plan de la *fig.* 138 comme parallèle au plan tangent de S en M, les droites ma et mb seront les traces des plans normaux qui contiennent ces sections principales, et ce seront aussi les projections des tangentes aux deux lignes de courbure qui partent de M.

730. Quant aux *plans normaux limites* qui séparent les sections *convexes* ou

situées au-dessous du plan tangent, d'avec celles qui se trouvent au-dessus et que nous appellerons *concaves*, nous savons (n° **694**) qu'ils coupent la surface S suivant des courbes dont les rayons de courbure sont infinis au point M; donc ces plans auront pour traces sur le plan tangent, les diamètres infinis de l'indicatrice, c'est-à-dire les deux asymptotes *m*P et *m*Q qui se détermineront au moyen du rectangle construit sur les deux axes *ma* et *mb*. Il résulte de là que ces asymptotes auront chacune *un contact du second ordre*, au moins, avec les deux sections normales *limites;* et en effet, il est aisé de voir qu'elles sont précisément les intersections du plan tangent en M avec l'hyperboloïde osculateur.

731. D'ailleurs, comme ce plan tangent doit couper la surface S non convexe suivant une courbe à deux branches passant par le point M, il arrivera encore que les droites *m*P et *m*Q seront tangentes à ces deux branches. En effet, chacune de ces droites se trouve dans le plan tangent, et a deux éléments communs avec S, d'après ce qui a été dit au numéro précédent; donc ces deux éléments appartiennent à l'intersection de la surface par son plan tangent, courbe dont chaque branche offrira ainsi un contact du second ordre avec *m*P ou *m*Q. En outre, ce sont ces deux branches qui fourniront les limites précises des quatre régions tour à tour convexes et concaves (n° **694**), que présente la surface S autour du point M.

732. Les considérations précédentes permettent de simplifier la méthode du n° **727** pour une surface S non convexe, en admettant que l'on sait construire les tangentes au point multiple de l'intersection de cette surface avec son plan tangent; ou en se bornant à les mener approximativement, hypothèse d'autant plus plausible que la direction de ces droites sera ici mieux indiquée, parce que chaque branche de l'intersection offrira un arc presque rectiligne (n° **731**) dans les environs du point considéré M. Il suffira, en effet, de construire cette intersection sur un plan parallèle au plan tangent de S en M, de lui mener des tangentes *m*P et *m*Q au point multiple, lesquelles seront les asymptotes de *l'indicatrice* qui n'aura pas besoin d'être tracée; puis, de diviser en deux parties égales les angles aigus et obtus que forment ces asymptotes: alors ces droites bissectrices *ma* et *mb* seront les traces des plans normaux *principaux*, et aussi les tangentes aux deux lignes de courbure partant de M. Ensuite, il restera à construire les sections faites dans la surface S par chacun de ces plans principaux, et à trouver (n° **666**) les rayons de courbure de ces sections qui seront ceux de la surface elle-même.

Cette marche s'emploierait avec avantage pour un point quelconque d'un

hyperboloïde ou paraboloïde gauche, puisque la section du plan tangent serait ici composée de deux droites qui tiendraient lieu des tangentes qu'il fallait mener ci-dessus approximativement. Pour une surface gauche quelconque (*fig.* 143), une de ces tangentes serait la génératrice rectiligne GPM, et la seconde branche Mα de l'intersection s'obtiendrait par la marche générale du n° **583**.

733. Au contraire, si l'on voulait construire rigoureusement les tangentes au point multiple de l'intersection d'une surface non convexe quelconque, avec son plan tangent, il n'y aurait qu'à déterminer comme au n° **727**, les directions et les rayons de courbure des deux sections principales pour le point de contact assigné; puis, en déduire par le n° **730** les asymptotes de l'indicatrice, lesquelles seraient les tangentes cherchées.

Fig. 45. **734.** Application au tore. Ce tore, représenté dans l'épure 45, a été coupé par son plan tangent M'T'T relatif au point (M, M'), suivant une courbe à deux branches MHRE.... et M*hre*.... que nous avons construite au n° **268**. Pour trouver les tangentes de ces branches en M, nous observerons qu'ici où la surface est de révolution, le méridien A'M'B' est à la fois une première ligne de courbure et une section principale (n° **708**) dont le rayon de courbure est $R = M'\omega$; l'autre section principale serait située dans le plan $\omega M'\zeta$ perpendiculaire au méridien précédent, et elle aurait pour rayon de courbure $R' = M'\zeta$, c'est-à-dire la portion de la normale comprise entre le point M' et l'axe O'Z' de révolution (n° **708**). Pour en déduire l'hyperboloïde osculateur au point (M, M'), il faut (n° **698**) donner à l'axe réel de cette surface, dirigé suivant la normale (M'ω, MB), une longueur arbitraire c que nous choisirons ici égale précisément au rayon M'ω, parce qu'il en résultera pour le second axe réel dirigé suivant ($\omega\alpha$, BC), cette valeur très-simple $a = \sqrt{c.R} = M'\omega$; c'est-à-dire que l'hyperboloïde sera de révolution, et aura pour cercle de gorge le méridien donné (A'M'B'α, AC). Quant à l'axe imaginaire qui sera perpendiculaire à ce méridien et passera par son centre (ω, B), sa longueur déterminée par $b = \sqrt{c.R'}$, sera la droite M'β moyenne proportionnelle entre M'ω et M'ζ. Maintenant que l'hyperboloïde osculateur est complétement déterminé, nous sommes dispensés de construire par points l'indicatrice, puisque cette courbe n'est autre chose (n° **727**) que la section faite dans l'hyperboloïde par le plan $\alpha\omega\epsilon$ parallèle au plan tangent M'T'T; ce sera donc une hyperbole ayant pour axe réel $\omega\alpha$, et pour axe imaginaire une droite égale à M'β et élevée par le centre (ω, B) perpendiculairement au plan ver-

tical. Les asymptotes de cette indicatrice seraient alors faciles à construire; mais comme il faudrait ensuite les projeter sur le plan tangent M'T'T, cela revient évidemment à prendre $M'\delta' = \omega\alpha$, puis à élever du point δ' une perpendiculaire au plan vertical qui ait pour longueur $M'\mathfrak{G}$; et l'hypoténuse du triangle rectangle ainsi formé, sera la projection de l'asymptote sur le plan tangent, et ce sera aussi (n° **731**) la tangente même de la section que forme ce plan dans le tore. Enfin, pour obtenir cette tangente sur le plan horizontal, il faudra projeter le côté $M'\delta'$ de ce triangle suivant $M\delta$, puis élever une perpendiculaire $\delta\lambda = M'\mathfrak{G}$, et la droite λM sera la tangente de la branche *Mhre*. La tangente $\lambda''M$ de l'autre branche MHRE s'obtiendrait par le moyen de la seconde asymptote, mais cela se réduit à prendre $\delta\lambda'' = \delta\lambda$; ainsi, quant à la méthode *pratique*, on voit que la construction de ces deux tangentes n'exigera qu'un très-petit nombre d'opérations fort simples.

735. Après avoir déterminé par les méthodes précédentes, les tangentes ou les premiers éléments des deux lignes de courbure relatives à un point quelconque M assigné sur une surface générale S, il faudrait, pour obtenir le cours entier de ces lignes, répéter des opérations semblables sur un point M_2 très-voisin de M, et choisi sur l'une des deux tangentes déjà trouvées; puis, agir de même pour un point M_3 voisin de M_2, et placé sur l'une des deux directions que comportent les lignes de courbure relatives à ce dernier point; et ainsi de proche en proche. Mais la complication et les incertitudes d'une pareille marche, font assez voir que la détermination *complète* des lignes de courbure est un problème qui est généralement insoluble par des opérations purement graphiques; c'est donc à l'Analyse qu'il faudra recourir pour se procurer des données certaines sur cette matière, quand la surface ne tombera pas dans un des genres examinés aux n°s **707...711**; et nous allons exposer les beaux résultats auxquels *Monge* est parvenu dans l'exemple d'un ellipsoïde à trois axes inégaux (*).

736. Soient a, b, c les trois demi-axes de l'ellipsoïde donné, entre lesquels FIG. 144.
nous supposerons les relations $a > b > c$. Adoptons pour plan horizontal de projection, un plan parallèle aux deux axes les plus grands, et choisissons le plan vertical parallèle à l'axe maximum et à l'axe minimum; alors, si (O, O') est le centre de la surface, et que l'on décrive sur les demi-axes $OA = a$, $OB = b$, une ellipse (ABDE, A'D'), ce sera le contour apparent de l'ellip-

(*) Voyez le chap. XVI de notre *Analyse appliquée à la géométrie des trois dimensions.*

soïde sur le plan horizontal; tandis que le contour apparent relatif au plan vertical, sera l'ellipse (A'C'D'F', AD) décrite avec les demi-axes $O'A' = a$, $O'C' = c$. La troisième ellipse principale qui a pour demi-axes b et c, se trouve projetée sur BE et C'F'; et nous l'avons rabattue ici suivant EC''. Quant aux excentricités de ces trois ellipses, on les trouvera graphiquement par les relations connues

$$e = \sqrt{a^2 - b^2}, \quad e' = \sqrt{a^2 - c^2}, \quad e'' = \sqrt{b^2 - c^2};$$

ainsi il deviendra facile de construire, par le secours de quatrièmes proportionnelles, les deux distances

$$O\alpha = a\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}} = \frac{ae}{e'}, \quad O\beta = b\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2 - c^2}} = \frac{be}{e''},$$

sur lesquelles, comme demi-axes, on décrira une *ellipse auxiliaire* $\alpha\varepsilon\beta$, puis une *hyperbole auxiliaire* $\alpha\delta\gamma$. Ensuite, on portera sur les axes de la projection verticale, deux distances

$$O'X' = a\sqrt{\frac{a^2 - c^2}{a^2 - b^2}} = \frac{ae'}{e}, \quad O'Z' = c\sqrt{\frac{a^2 - c^2}{b^2 - c^2}} = \frac{ce'}{e''},$$

avec lesquelles, comme demi-axes, on décrira une nouvelle *ellipse auxiliaire* X'λZ' qui se trouvera toujours en dehors de l'ellipsoïde, puisque ses deux axes sont évidemment plus grands que a et c.

737. Cela posé, l'analyse apprend que les lignes de courbure de la première espèce sont projetées horizontalement suivant des hyperboles TU, LS, KR,...., et verticalement suivant des ellipses T'U', L'S', K'R',...., qui se construisent avec les données précédentes, comme il suit. Après avoir choisi sur OA un point T arbitraire, mais situé entre O et α, on trace les deux coordonnées Tε et $\varepsilon\theta$ de l'ellipse auxiliaire $\alpha\beta$; puis, avec l'abscisse OT comme axe réel, et avec l'ordonnée Oθ comme axe imaginaire, on décrit une hyperbole TU. Ensuite, on projette le point U où cette hyperbole va couper le contour apparent ABD, en U' à partir duquel on trace les deux coordonnées U'π et $\pi\zeta$ de l'ellipse auxiliaire X'Z'; puis, avec l'abscisse O'U' et l'ordonnée O'ζ comme demi-axes, on décrit une ellipse ζT'U' qui est la projection verticale de la ligne de courbure déjà projetée horizontalement suivant TU. On sent bien que cette ligne de courbure est *gauche*, mais *fermée*, et qu'elle offre des parties symétriques au-dessus et au-dessous, en avant et en arrière des plans prin-

cipaux de l'ellipsoïde, ce qui fait que ses deux projections n'occupent qu'une portion limitée d'hyperbole ou d'ellipse.

738. Quant aux lignes de courbure de la seconde espèce, elles se projettent horizontalement et verticalement sur des ellipses (φMV, φ'M'V'), (ηNI, η'N'I'),..... qui se construisent de la manière suivante. Après avoir pris un point arbitraire V entre α et A, on trace les deux coordonnées Vδ et $\delta\psi$ de l'hyperbole auxiliaire $\alpha\gamma$; puis, sur les droites OV et Oψ comme demi-axes, on décrit une ellipse ψVφ. Ensuite, on projette le sommet φ ou ψ de cette courbe, sur l'ellipse principale rabattue suivant EC", et l'on relève le point φ'' en φ' sur le plan vertical; alors, en traçant les deux coordonnées $\varphi'\mu$ et μW' de l'ellipse auxiliaire X'Z', on obtient les deux demi-axes O'W' et O'φ' de l'ellipse cherchée φ'V'W', dont une partie seulement reçoit la projection verticale de la ligne de courbure qui est aussi *fermée* et *gauche*. FIG. 144.

739. Étudions maintenant les variations de forme que subissent les lignes de courbure des deux espèces, lorsque les points T et V s'éloignent ou se rapprochent de α. Quand le point T est en O, et le point V en A, la projection de la première ligne de courbure se réduit évidemment à la droite BOE et la seconde devient l'ellipse ABD, ce qui montre que les deux ellipses principales EC" et ABDE sont elles-mêmes des lignes de courbure; en effet, les normales de l'ellipsoïde menées par tous les points de l'une ou de l'autre de ces courbes, sont situées dans leur plan, et ne peuvent manquer de se couper consécutivement. Lorsque les points T et V se rapprochent de α, l'hyperbole TU et l'ellipse VMφ se resserrent de plus en plus, et quand ces points sont arrivés en α, la seconde se réduit évidemment à la portion de droite $\alpha\omega$, tandis que la première est remplacée par les portions rectilignes αA et ωD; de sorte qu'ici les deux lignes de courbure viennent à coïncider, et leur ensemble fournit l'ellipse principale (AD, A'C'D'). On voit donc que le point α et son homologue ω déterminent, sur l'ellipsoïde, quatre points singuliers (α, α'), (α, α''), (ω, ω'), (ω, ω''), pour lesquels les lignes de courbure des deux espèces viennent se confondre, comme le montre aussi la projection verticale où les ellipses ζT'U' et φ'V'W' s'ouvrent de plus en plus, l'une dans le sens horizontal, l'autre dans le sens vertical; ou plutôt, dans ces quatre points, la direction des lignes de courbure devient indéterminée, comme le prouve l'analyse, et *la courbure* de la surface *est uniforme* autour de chacun d'eux; de sorte que ce sont quatre *ombilics*, tels que nous les avons définis au n° **692**.

740. L'analyse prouve encore que, sur le plan vertical, toutes les ellipses des deux séries se trouvent *inscrites* dans le losange X'Z'X"Z", qui touche l'ellipse principale A'C'D'F' précisément aux quatre ombilics; et pour montrer une application de cette belle théorie, nous allons citer ce que *Monge* a écrit sur ce sujet.

741. « S'il était question de voûter un espace circonscrit en projection horizontale par une ellipse, on ne pourrait pas donner à la voûte une surface plus convenable que celle de la moitié d'un ellipsoïde dont une des ellipses principales coïnciderait avec l'ellipse de la naissance; et en supposant que cette voûte dût être exécutée en pierres de taille, il faudrait que la division en voussoirs fût opérée au moyen des lignes de courbure dont nous avons donné la construction, et que les joints fussent les surfaces développables normales à la voûte. Les lignes de division en voussoirs, traceraient sur la surface des compartiments rectangulaires susceptibles de décoration; et ces compartiments eux-mêmes n'auraient rien de fantastique, puisqu'ils ne seraient qu'une suite nécessaire de la première donnée, qui est une ellipse; mais la destination de cet emplacement pourrait influer sur le choix de celui des trois axes qu'il faudrait placer verticalement.

» Il n'y aurait aucune raison pour faire l'axe vertical égal à l'un des deux axes horizontaux; ainsi les trois axes seraient inégaux. Dans cette hypothèse, l'axe vertical pourrait être plus grand que les deux autres, et alors la voûte serait surmontée; il pourrait être plus petit, et la voûte serait surbaissée; enfin, il pourrait être compris entre les deux autres, et la voûte serait moyenne. La voûte surmontée aurait en général plus de hardiesse et plus de dignité; et si la naissance était elle-même à une grande hauteur, quelle que fût d'ailleurs la destination de l'emplacement, ce serait la voûte surmontée qu'il faudrait employer, parce que sa grande élévation faisant paraître ses dimensions verticales plus petites qu'elles ne seraient réellement, écraserait trop une voûte d'une autre espèce. La voûte surbaissée, en diminuant le volume d'air compris dans l'emplacement, serait plus favorable à la voix d'un orateur. Si l'emplacement devait être éclairé par deux lustres suspendus à la voûte, il faudrait que cette voûte fût ou surmontée ou surbaissée, parce que, dans ces deux cas, sa surface aurait deux ombilics, placés symétriquement au-dessus du grand axe de l'ellipse horizontale, et que ces ombilics, rendus très-apparents par les compartiments qui se distribueraient autour d'eux, seraient les points naturels de suspension : alors,

on pourrait disposer du rapport entre les axes, pour que ces points fussent espacés d'une manière convenable.

» Au contraire, si l'emplacement devait avoir quatre grandes ouvertures, ou si la voûte devait être portée par quatre groupes de colonnes, ou enfin si, dans la décoration intérieure, on employait quatre supports distribués symétriquement, il faudrait choisir la voûte moyenne pour laquelle les quatre ombilics sont toujours dans la naissance, et placer les massifs ou les supports aux quatre extrémités des axes, parce que c'est aux environs de ces quatre points, et loin des ombilics, que les lignes de courbure, rendues apparentes par la décoration de la voûte, et qui d'ailleurs rencontrent toutes verticalement la naissance, s'écartent plus lentement de la ligne de plus grande pente de la surface.

742. » On s'occupe aujourd'hui de la construction de salles pour les deux conseils de la législature : les emplacements dont on a pu disposer jusqu'à présent pour de semblables salles, ont forcé de donner à l'amphithéâtre moins de profondeur en face de l'orateur que sur les côtés; mais l'expérience ayant prouvé que la voix se porte à une plus grande distance en face, il parait que c'est une disposition toute contraire qu'on devrait adopter. De toutes les formes allongées qu'on pourrait donner à l'amphithéâtre, il n'y en a aucune dont la loi soit plus simple et plus gracieuse que l'ellipse : il faudrait donc que la salle fût elliptique, et qu'elle fût couverte par une voûte en ellipsoïde surbaissée.

» Le service des assemblées législatives exige un emplacement pour le bureau, en avant duquel est la tribune de l'orateur. En plaçant le bureau à un des sommets de l'ellipse, on pourrait lui consacrer un espace suffisant pour la commodité du service, et l'orateur se trouverait naturellement placé sous un des ombilics de la voûte : l'amphithéâtre n'occuperait que la partie qui serait en avant. Une galerie qui ferait le tour entier de la salle, et qui serait assez élevée pour être très-distincte de l'amphithéâtre, fournirait des places au public. La salle, qui n'aurait ni tribune ni aucune espèce d'irrégularité, pourrait être décorée par des colonnes, à chacune desquelles correspondrait une nervure de la voûte, pliée suivant la ligne de courbure ascendante. Toutes ces nervures, verticales à leur naissance, se courberaient autour de l'un ou de l'autre ombilic, pour redescendre ensuite à plomb sur les colonnes opposées, et elles seraient croisées perpendiculairement par d'autres nervures pliées suivant les lignes de l'autre courbure. Les intervalles de ces nervures pourraient être à jour, soit pour éclairer la salle, soit pour donner

des issues à l'air, et formeraient un vitrage moins fantastique que les roses de nos églises gothiques. Enfin, deux lustres suspendus aux ombilics de la voûte, et à la suspension desquels la voûte entière semblerait concourir, serviraient à éclairer la salle pendant la nuit.

» Nous n'entrerons pas dans de plus grands détails à cet égard ; il nous suffit d'avoir indiqué aux artistes un objet simple, et dont la décoration, quoique très-riche, pourrait n'avoir rien d'arbitraire, puisqu'elle consisterait principalement à dévoiler à tous les yeux une ordonnance très-gracieuse, qui est dans la nature même de cet objet. »

743. Pour rendre l'épure 144 applicable aux idées que *Monge* vient d'exposer, il faudrait distribuer les lignes de courbure ascendantes de manière qu'elles divisassent l'ellipse de naissance ABDE en parties égales US, SR, ... Alors, le point U étant donné, on le projetterait en U' d'où l'on conclurait les deux demi-axes $U'\pi$ et $\pi\zeta$ de l'ellipse $\zeta T' U'$; et celle-ci étant tracée fournirait le point T' qui, projeté en T, déterminerait le sommet et les axes $T\varepsilon$, $\varepsilon\vartheta$, de l'hyperbole demandée TU. Quant aux lignes de la seconde courbure, on les ferait passer par des points qui diviseraient la demi-ellipse EC''B en un nombre *impair* de parties égales ; et chaque point de division φ'' étant projeté en ψ, et relevé en φ', ferait connaître comme au n° **738**, les demi-axes $\psi\delta$ et δV, $\varphi'\mu$ et $\mu W'$, des ellipses $\psi V \varphi$ et $\varphi' V' W'$ suivant lesquelles se projette une ligne de la seconde courbure.

Fig. 143. **744.** HYPERBOLOÏDE OSCULATEUR *le long d'une génératrice d'une surface gauche* S. Nous avons vu (n° **578**) que si, dans les plans tangents relatifs à trois points M, M', M'' pris sur la même génératrice G, on traçait des droites arbitraires MQ, M'Q', M''Q'', et qu'on les adoptât pour directrices de la droite mobile G, on obtiendrait ainsi un hyperboloïde à une nappe qui *raccorderait* la surface S tout le long de la droite GMM'M'', c'est-à-dire qui aurait, en chaque point de cette ligne, le même plan tangent que S ; de sorte que l'élément superficiel MM'M''m''m'm, indéfini en longueur, serait commun aux deux surfaces. Or il y a une infinité d'hyperboloïdes qui jouissent de cette propriété, puisque les trois directrices MQ, M'Q', M''Q'' peuvent être tracées à volonté dans les plans tangents. Mais, si l'on choisit la droite MQ de manière qu'elle soit tangente à la courbe $M\alpha$ suivant laquelle la surface S est coupée par son plan tangent en M, on sait (n° **731**) que cette tangente aura deux éléments Mm et mn communs avec $M\alpha$, et par suite avec S : il en arrivera autant pour les droites M'Q', M''Q'', si on les

choisit tangentes aux sections $M'\alpha'$, $M''\alpha''$, que tracent dans la surface les plans tangents relatifs aux points M', M'' ; par conséquent, en adoptant ces trois tangentes particulières pour directrices de l'hyperboloïde, ce dernier aura ainsi deux éléments superficiels $MM''m''m$ et $mm''n''n$ communs avec S, et sera dit l'hyperboloïde *osculateur* de cette surface, le long de la droite assignée $GMM'M''$. La génération de cet hyperboloïde ne renfermant plus que des données entièrement fixes, il sera unique, et offrira avec la surface S un contact plus intime que tous les autres; d'ailleurs, pour tout point de la droite GM, les lignes de courbure de S seront tangentes à celles de l'hyperboloïde osculateur, et ces dernières sont aisées à déterminer d'après les remarques du n° **732**.

LIVRE IX.

ADDITIONS.

CHAPITRE PREMIER.

Théorèmes divers.

Nous réunissons ici diverses propositions relatives à des théories antérieures, mais qui n'auraient pas eu alors d'application prochaine, et nous deviendront utiles dans la Perspective, les Ombres et la Stéréotomie.

745. *Lorsqu'un cylindre pénètre dans une sphère par une courbe* PLANE, *la seconde branche de l'intersection est également* PLANE; d'ailleurs cette *courbe de sortie*, qui est un cercle égal à la *courbe d'entrée*, se trouve perpendiculaire au plan qui serait mené à angle droit sur la courbe d'entrée et parallèlement aux génératrices du cylindre.

Fig. 145. Conduisons par le centre de la sphère, un plan de projection qui soit parallèle aux génératrices du cylindre et perpendiculaire à la courbe d'entrée : alors cette courbe, qui est nécessairement un cercle, s'y trouvera représentée par la corde AB égale à son diamètre, et les génératrices CA, FB, sortiront de la sphère par les points A′ et B′ évidemment situés sur le même grand cercle que A et B; tandis qu'une arête quelconque DM sortira de cette surface par *un point dont la projection* M′ *tombera sur la droite* A′B′. En effet, toutes les cordes parallèles AA′, BB′, MM′,..., comprises dans la sphère, seraient divisées en deux parties égales par le plan OR mené du centre perpendiculairement à leur direction commune; donc les ordonnées EA, PM, IB sont respectivement égales à EA′, PM′, IB′; et dès lors il est certain que les trois points A′, M′, B′, se trouvent en ligne droite, puisque A, M, B, remplissent déjà cette condition. D'où il résulte que la courbe de sortie est projetée sur la droite A′M′B′, et qu'ainsi *elle est plane;* d'ailleurs elle satisfait bien aux autres conditions de

l'énoncé, d'après le choix du plan de projection employé ici, et attendu que le diamètre A′B′ est évidemment égal au diamètre AB.

Observons que si le cylindre pénétrait dans la sphère par un grand cercle tel que aOb, la courbe de sortie serait l'autre grand cercle $a'Ob'$; et pour construire plus aisément cette dernière courbe qui se rencontrera dans l'épure des *Ombres d'une niche*, il suffira d'employer un plan de projection qui soit parallèle aux rayons de lumière et perpendiculaire à la courbe d'entrée, puisque sur un tel plan, la courbe de sortie se projettera suivant une droite.

746. *Dans l'intersection d'un cône avec une sphère, si la courbe d'entrée est* PLANE, *la courbe de sortie l'est pareillement.*

Adoptons pour le plan de la figure celui qui, passant par le centre de la sphère et le sommet du cône, se trouve en même temps perpendiculaire à la courbe d'entrée, et désignons-le sous le nom de plan horizontal. La courbe d'entrée qui est nécessairement un cercle, sera projetée suivant une corde AB de la sphère, et si S est le sommet situé dans notre plan horizontal, les deux arêtes SA, SB, iront évidemment sortir de la sphère par les points a, b; mais, en outre, je dis que la droite ab est la projection totale de la courbe de sortie. En effet, si par le point de la surface conique qui est projeté en m, on mène un plan vertical $A'mB'$ parallèle à AB, il coupera le cône suivant un cercle du diamètre A′B′, que nous rabattrons ici suivant $A'm'B'$; et l'ordonnée $m'm$ du cône étant moyenne proportionnelle entre les deux parties de ce diamètre, nous aurons FIG. 146.

$$\overline{mm'}^2 = A'm \cdot mB'.$$

Mais les deux triangles $mA'a$ et $mB'b$ sont semblables, puisque l'angle A′ égale l'angle SAB qui a pour mesure le même arc que l'angle abB; donc ces triangles donneront l'égalité suivante,

$$A'm \cdot mB' = am \cdot mb, \quad \text{d'où} \quad \overline{mm'}^2 = am \cdot mb.$$

Cette dernière relation prouve que l'ordonnée rabattue suivant mm', appartient aussi au cercle vertical décrit sur ab comme diamètre; et puisque ce nouveau cercle est évidemment sur la sphère proposée, nous en conclurons que le sommet de l'ordonnée mm', ou le point du cône qui est projeté en m, se trouve en même temps sur la sphère. Comme on en dirait autant de tout autre point du cône projeté en n sur ab, il est certain que le plan vertical ab coupe le cône et la sphère suivant un cercle *unique*, lequel est la seconde

branche de leur intersection ou la *courbe de sortie;* ce qui démontre le théorème annoncé.

747. Observons que le cercle vertical *ab* est précisément ce qu'on appelle la section *anti-parallèle* du cône SAB à base circulaire; car la première condition que doit remplir cette section, c'est d'être perpendiculaire au *plan principal* du cône, c'est-à-dire à celui qui, passant par le sommet S et le centre C de la base circulaire AB, se trouve en outre perpendiculaire à cette base; or ce plan coïncide évidemment avec celui de notre épure, lequel contient les points S, O, et le rayon OC. Ensuite, la section anti-parallèle doit former, sur le plan principal, un triangle S*ab* semblable et non parallèle à SAB; condition qui est encore remplie, puisque nous venons d'observer que les angles SAB et S*ba* avaient la même mesure.

748. *Lorsque deux cylindres du second degré se coupent suivant une première courbe* PLANE, *la courbe de sortie est aussi* PLANE.

FIG. 147. Supposons que l'ellipse EMM'FN'N soit la courbe d'entrée, commune aux deux cylindres (les mêmes raisonnements seront applicables à une hyperbole ou à une parabole); alors, en menant divers plans qui soient parallèles aux génératrices des deux cylindres à la fois, ils traceront dans l'ellipse des cordes MN, M'N',..., parallèles entre elles, et chacun de ces plans coupera d'ailleurs les deux cylindres suivant quatre droites. Celles qui répondront au plan sécant MN, savoir MA et NB, M*a* et N*b*, formeront par leurs intersections, un parallélogramme M*n*N*m* dont les deux sommets *m* et *n* appartiendront évidemment à la courbe de sortie; de même, cette courbe passera par les points *m'* et *n'* où se coupent les quatre arêtes M'A' et N'B', M'*a'* et N'*b'*, contenues dans le plan sécant M'N'; et ainsi des autres. Or toutes les diagonales *mn*, *m'n'*,..., sont évidemment parallèles; elles passeront d'ailleurs par les milieux des cordes MN, M'N',..., et par suite, elles rencontreront toutes le diamètre EF conjugué avec ces cordes. Donc ces diagonales formeront, en s'appuyant sur la droite EF, une surface nécessairement *plane* qui contiendra toute la courbe de sortie *mm'*F*n'n*; ainsi, cette dernière satisfait bien à l'énoncé du théorème.

749. On voit d'ailleurs que la courbe *mm'* F*n'n* sera de même espèce que la courbe d'entrée; car, pour des abscisses communes OP, OP',..., les ordonnées MP et *m*P, M'P' et *m'*P',.... seront évidemment proportionnelles; de sorte que les deux branches de l'intersection seront ici deux ellipses ayant un diamètre commun EF. Il est clair aussi qu'aux extrémités de ce diamètre, les tangentes ET et EV des deux courbes, ainsi que les arêtes des deux cylindres, se trou-

veront toutes parallèles aux plans sécants employés ci-dessus; par conséquent, les cylindres proposés auront *deux plans tangents communs* et *parallèles*.

750. *Lorsque deux surfaces du second degré ont* UN AXE COMMUN, *en grandeur et en position, elles ne peuvent se couper que suivant* DEUX COURBES PLANES, *qui passent l'une et l'autre par l'axe commun.*

D'après l'hypothèse admise, les deux surfaces auront le même centre, et en faisant passer par ce point notre plan horizontal de projection, que nous choisirons d'ailleurs perpendiculaire à l'axe commun (O, O'C'), il coupera les deux surfaces données suivant deux courbes du second degré et concentriques ABDE et *abde*. Or, si ces dernières se rencontrent en deux points G et H, il y en aura nécessairement deux autres I et K, diamétralement opposés aux premiers, et qui seront encore communs aux deux courbes. Alors le plan vertical GI coupera les surfaces proposées suivant deux courbes qui coïncideront complétement, puisqu'elles auront les mêmes demi-axes OG et O'C'; donc cette section commune sera une des branches de l'intersection totale des deux surfaces, et l'autre branche sera la section aussi commune, faite par le plan vertical HK. FIG. 148.

Ces raisonnements sont applicables à toutes les surfaces du second degré qui ont un centre, qu'elles soient ou non de même espèce, pourvu que l'axe commun soit en même temps *réel* ou *imaginaire* dans les deux surfaces à la fois.

751. Si la première n'avait pas de centre, son axe unique serait infini; et par conséquent la seconde devrait, pour satisfaire à l'énoncé du théorème, être aussi un paraboloïde ayant le même sommet. Alors on couperait ces deux paraboloïdes par un plan perpendiculaire à l'axe commun, et ces deux sections qui auraient évidemment le même centre, se rencontreraient en quatre points diamétralement opposés, tels que G et I, H et K dans la figure précédente; d'où l'on conclurait que le plan conduit par la droite GI ou HK, et par l'axe commun, coupe les paraboloïdes suivant deux paraboles qui ayant même axe, même sommet, et un point commun G ou H, se confondront nécessairement.

752. On peut généraliser le théorème du n° 750, en l'appliquant à deux surfaces du second degré qui ont *deux plans tangents communs et parallèles*. En effet, la droite qui joindra les points de contact de ces plans, sera un diamètre commun aux deux surfaces; le plan diamétral conjugué avec ce diamètre, devant être parallèle aux plans tangents donnés, se trouvera le même pour la première et la seconde surface, et il coupera celles-ci suivant deux

courbes concentriques, telles que ABDE et $abde$; de sorte que le plan mené par GI ou HK, et par le diametre commun, produira dans les surfaces proposées deux sections qui devront encore coïncider, attendu qu'elles auront deux diametres conjugués communs en direction et en longueur; donc *ces surfaces se couperont suivant deux courbes planes.*

FIG. 149. **753.** Un cas particulier de ce théorème se présente dans la rencontre de *deux berceaux cylindriques qui ont le même plan de naissance et la même montée.* En effet, si le cercle AMNB et l'ellipse $amnb$ dont les axes verticaux sont égaux, représentent les bases de ces cylindres qui sont ici rabattues autour des axes AB et ab situés dans le plan horizontal de la naissance, on voit d'abord que les quatre génératrices AG, BH, aG, bK, se rencontrent en formant le rectangle GHIK. Ensuite, si l'on coupe les deux cylindres par un même plan horizontal, on obtiendra quatre arêtes partant des points M, N, m, n, et qui se rencontreront nécessairement en des points dont les projections M′, N′, M″, N″, tomberont précisément sur les diagonales du rectangle GHIK: car, les deux ordonnées pm et PM étant égales, on sait que les abscisses ap et AP sont entre elles comme les deux axes ab et AB, ce qui donne la proportion

$$G\alpha : \alpha M' :: GK : KI;$$

d'où l'on conclut que le point M′ est en ligne droite avec G et I. On prouvera semblablement que N″ tombe sur la même diagonale, tandis que N′ et M″ sont sur la droite HK; ainsi, l'intersection totale des cylindres proposés se composera des deux ellipses situées dans les plans verticaux GI et HK.

754. REMARQUE. Lorsque deux surfaces quelconques S et S′ se *touchent* en un point, et qu'en outre elles se coupent suivant une courbe à deux branches qui passent par le point considéré, il n'est plus possible de trouver les tangentes de ces branches au point multiple, par la méthode des plans tangents, puisque ceux-ci coïncident. Mais, si l'on substitue aux surfaces S et S′, deux surfaces du second degré Σ et Σ′ qui soient osculatrices des premières, il est évident que l'intersection de Σ avec Σ′ aura les mêmes tangentes que l'intersection de S avec S′. Or, comme dans chaque surface Σ ou Σ′, il y a un axe c ou c' qui est arbitraire en longueur (n° 696), quoique toujours dirigé suivant la normale au point considéré, si l'on prend cet axe égal de part et d'autre, il arrivera que les surfaces Σ et Σ′ se couperont suivant deux courbes planes (n° 750), dont les projections *sur un plan perpendiculaire à la normale,*

se réduiront à deux droites faciles à construire; alors ces droites seront évidemment les tangentes des deux branches de l'intersection de S avec S', pour le point multiple en question. Cette méthode ingénieuse a été donnée par M. *Th. Olivier*, dans un Mémoire inséré au 21ᵉ cahier du *Journal de l'École Polytechnique;* et l'auteur l'a appliquée au *conoïde de la voûte d'arêtes en tour ronde*, dont nous avons trouvé les tangentes par un autre moyen (nº **646**).

755. DES TANGENTES CONJUGUÉES ou *réciproques.* Lorsqu'un cône VMKN est circonscrit à une surface du second degré, *une arête quelconque* VM de ce cône *et la tangente* MT' menée à la courbe de contact MKN par le pied de cette arête, *sont toujours respectivement parallèles à deux diamètres conjugués* de la section faite, dans la surface, par un plan parallèle au plan tangent VMT'. FIG. 150.

Pour démontrer ce théorème (*), adoptons comme plan de la figure le plan diamétral qui, passant par l'arête MV et le diamètre VO, coupera la surface suivant une courbe NXMY à laquelle VM sera tangente. D'ailleurs, si nous menons le plan diamétral conjugué de VO, la section de ce plan avec la surface sera une courbe EZY parallèle et semblable (nº 554) à NKM, et par suite les tangentes YT et MT' se trouveront parallèles; donc, le conjugué de OY sera une droite OZ parallèle à MT'. Cela posé, les trois diamètres OX, OY, OZ étant conjugués entre eux, il en résulte que le plan XOY de la figure actuelle, divise en deux parties égales toutes les cordes parallèles à OZ; donc il en sera de même du diamètre RY' tiré parallèlement à MV; et ce diamètre étant ainsi le conjugué de OZ dans la section RZY' qui se trouve bien parallèle au plan tangent VMT', l'énoncé du théorème en question est justifié, puisque OY' et OZ sont respectivement parallèles à l'arête VM et à la tangente MT'.

756. Ces deux tangentes de la surface ont été aussi nommées *réciproques*, parce que si l'on plaçait sur MT' le sommet d'un nouveau cône circonscrit à l'ellipsoïde, la courbe de contact de ce cône aurait pour tangente la droite MV. En effet, la section faite dans la surface proposée par un plan parallèle au plan tangent en M, serait encore la courbe RZY', dont le diamètre OZ parallèle à MT' a pour conjugué OY'; ainsi la tangente à la nouvelle courbe de contact, qui doit, par le théorème précédent, se trouver parallèle à OY', ne pourrait être que MV qui remplit cette condition.

(*) Il est dû à M. Dupin; mais nous le démontrons ici d'une manière différente, sans passer par l'intermédiaire d'un cylindre.

FIG. 151. **757.** Cette réciprocité et le théorème du n° **755** sur lequel elle est fondée, s'étendront facilement à un cône circonscrit à une surface quelconque S. Car, soient AMB la courbe de contact de ces deux surfaces, MT une de ses tangentes, et VM l'arête du cône qui aboutit au point de contact; cette arête peut être regardée (n° **182**) comme l'intersection de deux plans tangents infiniment voisins, menés du sommet V à la surface, et dont les points de contact p et q avec S, se trouveront sur la courbe AMB. Maintenant, imaginons l'ellipsoïde ou l'hyperboloïde Σ, qui serait *osculateur* de S en M : dans les environs de ce point, les surfaces S et Σ auront deux plans tangents consécutifs de communs; donc les points p et q appartiendront aussi à la courbe de contact A'MB' du cône qui, ayant son sommet en V, serait circonscrit à Σ; et par suite, cette dernière courbe aura encore pour tangente MT. Or, dans la surface Σ, on sait (n° **755**) quelle relation existe entre MV et MT; donc aussi, pour la surface quelconque S, *l'arête du cône circonscrit et la tangente à la courbe de contact, sont respectivement parallèles à deux diamètres conjugués de la section faite parallèlement au plan tangent, dans la surface du second degré osculatrice de* S; et ces deux tangentes offrent pareillement la réciprocité énoncée au n° **756**.

758. Ce théorème, qui nous sera utile dans la perspective d'un tore et d'un piédouche, subsiste évidemment pour un cylindre circonscrit à la surface quelconque S, puisqu'on peut supposer le sommet V placé à l'infini sur MV; et il serait facile de l'étendre, par des considérations semblables, à une surface développable quelconque qui se trouverait circonscrite à la surface donnée S.

CHAPITRE II.

Méthode des Plans cotés (*).

759. Pour représenter graphiquement les points et les lignes, nous avons vu qu'il suffisait d'assigner leurs projections sur deux plans fixes, et que de là on pouvait déduire tout ce qui intéressait sur les distances de ces points, sur la forme de ces lignes ou des surfaces auxquelles elles appartiennent, etc. Mais, dans certains cas, comme pour les dessins de Fortification et pour la Topographie, on trouve plus commode de définir les objets *seulement par leur projection horizontale*, à laquelle on ajoute des *cotes* qui indiquent la hauteur des divers points au-dessus d'un plan horizontal fixe, que l'on suppose plus bas que tous les objets en question. Il est évident que cette méthode, où l'on n'emploie qu'un seul plan de projection, suffit néanmoins pour déterminer complétement la position de chaque point, parce que la cote de celui-ci remplace sa projection verticale, et pourrait même servir à retrouver cette projection, si on le désirait. Aussi nous allons voir que, par cette marche, on résout aisément tous les problèmes élémentaires de la Géométrie descriptive, et d'une manière qui se prête mieux aux *traductions numériques* auxquelles on est obligé de recourir dans la Fortification; car ici les données et les résultats d'un problème offrent des dimensions trop considérables pour pouvoir être exprimées sur les dessins autrement que par le moyen d'une *échelle* de réduction. Ajoutons encore que, dans la Fortification, le peu de relief de la plupart des objets au-dessus du sol, comparativement à leurs dimensions horizontales, rendrait incommode l'emploi d'un plan vertical de projection, sur lequel le plus grand nombre des droites considérées seraient presque horizontales, et iraient se rencontrer fort loin.

760. Observons, d'ailleurs, que ce mode de description ayant été d'abord employé pour des côtes sous-marines rapportées au niveau de la mer, l'usage a prévalu de compter les ordonnées verticales *de haut en bas*, en les regardant comme de véritables *sondes* abaissées d'un *plan de comparaison* horizontal situé

(*) La plus grande partie de ce chapitre est tirée, en substance, des Leçons rédigées en 1831 pour l'École d'Application de Metz, par M. le capitaine du Génie *Noizet*, qui a ainsi coordonné et perfectionné les éléments de la méthode des plans cotes, quoiqu'elle eût été déjà employée par d'autres ingénieurs.

au-dessus de tous les objets considérés; tandis que le plan de projection sur lequel on opère, est toujours censé horizontal et placé à une distance arbitraire *au-dessous* de ces mêmes objets. Du reste, ces conventions ne rendront pas plus difficile l'évaluation de la différence de niveau de deux points donnés; mais il faudra se rappeler que le point qui est affecté de la cote *la plus forte*, est *plus bas* que l'autre.

Pl. 62, Fig. 1. **761**. D'après cela, un point sera représenté par sa projection et par sa cote, comme celui qui est indiqué ($12^m,5$) dans la *fig.* 1. Cependant, s'il y avait plusieurs points remarquables situés sur la même verticale, il faudrait écrire la cote de chacun d'eux auprès de cette projection commune.

Fig. 1. **762**. *Une droite est définie par sa projection, avec les cotes de* DEUX *de ses points.* De là il serait facile, au moyen d'un trapèze rabattu, de conclure graphiquement la longueur d'une portion de cette droite, son inclinaison sur l'horizon, la cote d'un troisième point de cette ligne, donné par sa projection; ou réciproquement, la projection d'un point défini par sa cote : mais, comme pour les applications que nous avons en vue ici, il faudrait finir par évaluer ces résultats en nombres, il sera plus exact et plus commode de construire d'abord l'*échelle de pente* de la droite proposée. Soient, par exemple, ($14^m,7$) et ($12^m,5$) les deux points donnés; on commencera par chercher l'intervalle L qui, sur la projection de la droite, séparera deux points dont les cotes différeront d'un mètre, et on y parviendra évidemment par la proportion suivante, où D désigne l'intervalle des deux projections données :

$$(14^m,7 - 12^m,5):D::1^m:L = \frac{5}{11}\,D.$$

Ainsi, après avoir évalué D en parties de l'*échelle* HORIZONTALE du dessin, on calculera aisément la longueur L; et si l'on porte les $\frac{3}{10}$ de cette longueur au-dessous du point ($14^m,7$), on obtiendra celui qui doit avoir la cote 15^m. Puis en portant, à partir de ce dernier point, la longueur L plusieurs fois de suite, on trouvera les points qui répondent aux cotes 14^m, 13^m, 12^m,........, et il restera à subdiviser un de ces intervalles en dix parties égales, pour compléter l'*échelle de pente* de la droite proposée.

Fig. 1. **763**. Cela posé, désignons par A la projection assignée d'un point situé sur cette droite, et dont on demande la cote. Si A tombe entre les divisions 13^m et 14^m, par exemple, on prendra avec le compas la distance *horizontale* du point A au point 13^m, et en la portant sur la partie de l'échelle de pente qui est subdi-

visée en décimètres, on verra quel est le nombre de décimètres qu'il faut ajouter à 13^m, pour obtenir la cote du point projeté en A. Les centimètres pourront s'estimer à vue.

On trouvera aussi aisément la projection d'un point dont la cote serait assignée.

764. Pour avoir la vraie distance de deux points de la droite, donnés par leurs projections, on cherchera d'abord leurs cotes; puis, on calculera l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont la hauteur serait la différence de ces cotes, et dont la base serait égale à l'intervalle des deux projections, estimé en mètres sur l'échelle *horizontale* du dessin.

765. Quant à *la pente* de la droite, on entend par-là la tangente trigonométrique de l'angle que cette ligne fait avec l'horizon ; c'est-à-dire la différence de niveau de deux points de cette droite, divisée par la distance de leurs projections. Ainsi, pour la droite citée n° **762**, la pente est exprimée par la fraction FIG. 1.

$$\frac{14,7-12,5}{D} \text{ ou } \frac{1}{L},$$

en se rappelant que L désigne ici l'intervalle qui sépare les projections de deux points dont les cotes diffèrent d'un mètre, et qu'il faut estimer cette longueur en parties de l'échelle horizontale du dessin. On énonce encore cette règle, en disant que *la pente* d'une droite est le rapport de *la hauteur* à *la base*.

766. Réciproquement, si l'on donne la projection d'une droite et la cote $14^m,7$ d'un de ses points, avec la pente $\frac{1}{3}$ que doit avoir cette ligne, on prendra sur l'échelle horizontale du dessin, une longueur égale à 3 mètres, laquelle étant portée à la suite du point $(14^m,7)$, fera connaître le point qui devrait avoir la cote $(13^m,7)$. Alors on connaîtra deux points cotés de la droite, et l'on construira son échelle de pente comme au n° **762**. FIG. 1.

767. *Par un point donné* $(10^m,6)$ *mener une droite parallèle à une droite déjà connue*. Par le point donné on tirera une parallèle à la projection de la première droite, et ce sera évidemment celle de la seconde. Ensuite, comme ces deux droites doivent avoir la même pente, si l'on joint le point $(10^m,6)$ de la seconde avec le point affecté de la même cote sur la première, puis si l'on tire des parallèles à cette ligne de jonction, par les divisions entières de la première droite, on formera immédiatement l'échelle de pente de la droite demandée, laquelle sera ainsi complétement déterminée. FIG. 1.

768. Lorsque la première droite ne sera donnée que par deux points cotés FIG. 1.

$(14^{m},7)$ et $(12^{m},5)$, on portera l'intervalle D de ces projections, au-dessous du point $(10^{m},6)$, et l'on obtiendra un second point de la nouvelle droite, lequel aura évidemment pour sa cote $(10^{m},6 + 2^{m},2)$ ou $(12^{m},8)$. Alors on achèvera l'échelle de la droite demandée, comme au n° **762**.

769. UNE COURBE *isolée* se représente par sa projection horizontale accompagnée des cotes d'un certain nombre de ses points, assez rapprochés pour que l'œil puisse saisir le cours ascendant ou descendant de cette ligne, ou pour que les arcs intermédiaires puissent être regardés comme des droites. Mais, presque toujours, les courbes sont liées à des surfaces que nous apprendrons bientôt à représenter; c'est pourquoi nous ne nous y arrêterons pas davantage ici.

Pl. **62**, Fig. 2. **770.** UN PLAN, lorsque c'est une grandeur réellement existante, et qu'il est par conséquent limité de toutes parts, se représente par la projection de son contour dont chaque angle doit avoir sa cote; et l'on y ajoute un certain nombre de *sections de niveau* qui sont ici des droites parallèles à sa trace horizontale. Ces sections, que l'on choisit équidistantes et éloignées d'un mètre, par exemple, *dans le sens vertical*, doivent être marquées à leurs deux extrémités d'une cote commune : puis, si l'on trace une perpendiculaire à ces horizontales, ce sera évidemment la projection de *la ligne de plus grande pente* du plan proposé; et en cotant les points où elle est rencontrée par les diverses horizontales, elle deviendra ce qu'on appelle *l'échelle de pente* du plan en question, laquelle est ordinairement indiquée par un trait double. Ce mode de représentation équivaut à regarder, ainsi qu'on le fait dans la géométrie descriptive, un plan comme engendré par une de ses horizontales qui glisserait, parallèlement à elle-même, sur la ligne de plus grande pente de ce plan.

Fig. 2 *bis*. **771.** *Lorsqu'un plan est illimité*, et n'existe pas réellement, on le représente seulement par une de ses horizontales cotée, avec son échelle de pente graduée : on assigne ainsi la génératrice et la directrice de cette surface, ce qui suffit pour la déterminer complétement. Souvent même on se contente de marquer l'échelle de pente graduée, parce que de là on peut déduire autant d'horizontales cotées que l'on veut, puisqu'elles sont toujours perpendiculaires à la direction de l'échelle.

772. Lorsqu'un plan est horizontal, son échelle de pente n'existe plus, mais tous les angles de son contour portent la même cote; ou bien, si ce

plan est indéfini, on le désigne par *le plan horizontal à la cote* n. Si le plan donné est vertical, on le représente simplement par sa trace horizontale.

773. *Déterminer le plan qui passe par trois points donnés* (9^m,4), (14^m), et (17^m). On joindra par une droite le premier et le dernier de ces points, et au moyen d'une proportion analogue à celle employée dans le n° **762**, on cherchera sur cette droite un point qui ait pour cote 14^m; alors la droite qui réunira ce dernier point avec le second des points donnés, sera évidemment *une horizontale* du plan demandé; et une parallèle menée par le point (17^m) sera une seconde horizontale de ce plan, dont l'échelle de pente deviendra dès lors très-facile à marquer et à graduer. FIG. 2 *bis.*

La même marche s'appliquerait évidemment au cas où le plan demandé devrait passer par un point et par une droite donnés; et si cette droite était déjà pourvue de son échelle de pente, la solution serait encore plus simple.

774. *Par une droite donnée, conduire un plan dont la pente soit* $\frac{1}{n}$. On doit connaître au moins les cotes de deux points de cette droite, qui sont ici 10^m et 12^m,5 : alors, en regardant le premier point comme le sommet d'un cône droit dont les génératrices auraient l'inclinaison $\frac{1}{n}$ (n° **765**), il suffira évidemment de mener à ce cône un plan tangent qui passe par le second point. Or, si l'on décrit un cercle qui ait pour centre la projection du point (10^m), et pour rayon une longueur prise sur l'échelle horizontale du dessin, et égale à n fois la différence 2^m,5 des cotes des points donnés, ce cercle sera la trace du cône en question sur le plan horizontal qui passe par le point inférieur (12^m,5); donc, en menant par ce dernier point deux tangentes à ce cercle, on obtiendra les traces horizontales de deux plans qui satisferont au problème; et leurs échelles de pente s'en déduiront aisément, puisque l'on connaîtra leurs directions et deux points cotés de chacune d'elles. Il est d'ailleurs facile de voir que le problème n'admettra qu'une solution ou deviendra impossible, selon que la pente assignée sera égale à celle de la droite donnée, ou moindre que cette dernière. PL. 62, FIG. 3.

775. Lorsque la droite définie par les deux points cotés, se trouvera très-peu inclinée, la méthode précédente conduirait à tracer un cercle très-petit, et par là peu commode à employer. Dans ce cas, on prendra un plan horizontal inférieur aux deux points, et coté en nombre entier; puis, on décrira sur ce plan deux cercles dont les centres soient les projections des deux

points proposés, et dont les rayons soient n fois la hauteur de chacun de ces points au-dessus de ce plan horizontal. On aura ainsi les bases de deux cônes dont la pente sera $\frac{1}{n}$, et il restera à mener une tangente commune à ces deux cercles.

776. Si la droite donnée était horizontale, on connaîtrait de suite la projection de l'échelle de pente du plan cherché; puis, comme l'inclinaison $\frac{1}{n}$ est assignée, il n'y aurait qu'à porter sur cette échelle, à partir de la droite proposée, une longueur de n mètres mesurée sur l'échelle horizontale du dessin, et l'extrémité de cette longueur répondrait à un point de l'échelle de pente, dont la cote serait moindre d'un mètre que le point situé sur la droite donnée. Ayant ainsi deux points cotés de cette échelle de pente, il serait bien facile d'en achever la graduation.

Fig. 4. **777.** *Par un point* (10^m,3) *situé sur un plan donné, tracer sur ce plan une droite dont la pente soit* $\frac{1}{n}$. On tracera une horizontale de ce plan dont la cote diffère de celle du point donné, de 4^m par exemple; puis, avec un rayon égal à 4 fois la base n de la pente assignée, et du point donné comme centre, on décrira un arc de cercle qui, en coupant l'horizontale choisie, fera connaître le point que l'on doit joindre avec le point donné pour avoir la droite demandée. On sent que ce problème aura en général deux solutions; mais elles se réduiront à une seule, ou deviendront impossibles, si la pente assignée pour la droite, égale ou surpasse celle du plan donné.

778. *Étant donnée la projection d'un point situé sur un plan connu, trouver la cote de ce point?* On mènera par cette projection, une perpendiculaire sur l'échelle du plan, et la cote du point de rencontre sera celle du point proposé.

Si l'échelle du plan n'était pas construite, et qu'il fût représenté seulement par diverses horizontales, on pourrait appliquer sur le point proposé une règle divisée en millimètres, en la plaçant de manière que deux divisions entières tombassent sur les horizontales voisines; par-là, on apprécierait immédiatement la fraction de mètre qu'il faut ajouter à la cote de l'horizontale supérieure pour obtenir la cote du point en question.

Fig. 5. **779.** *Trouver l'intersection de deux plans donnés.* On tracera dans chaque plan deux horizontales qui aient respectivement les mêmes cotes; et la rencontre de ces quatre droites fera connaître deux points cotés de l'intersection demandée, ce qui en déterminera la projection et la pente.

780. Lorsque les horizontales des deux plans proposés se rencontreront trop loin, on emploiera deux *plans auxiliaires* qui, en coupant chacun des plans donnés suivant deux droites, feront connaître deux points de l'intersection cherchée. FIG. 6.

De même, si les deux plans donnés avaient leurs horizontales respectivement parallèles, un seul plan auxiliaire suffirait, parce qu'alors l'intersection demandée devrait être aussi parallèle aux horizontales primitives.

781. *Trouver l'intersection d'une droite et d'un plan donnés.* On conduira par la droite proposée, un plan auxiliaire dont les horizontales seront deux parallèles menées arbitrairement par deux points de cette droite; puis, en cherchant l'intersection de ce plan auxiliaire avec le plan donné, cette intersection coupera la droite proposée au point que l'on demandait. FIG. 7.

782. On trouvera semblablement le point de rencontre de deux droites données, qui seraient situées dans le même plan vertical. Car, en conduisant par chacune d'elles un plan arbitraire, l'intersection de ces deux plans ira passer par le point cherché, dont la cote s'estimera ensuite comme au n° 763. FIG. 8.

783. Par un moyen analogue, on pourra reconnaître si deux droites données, dont les projections sont différentes, se coupent effectivement; car, dans ce cas, il faudra que l'intersection des deux plans arbitraires conduits par ces droites, aille passer par le point commun aux deux projections données.

784. *Par un point donné* ($10^m,4$), *conduire un plan parallèle à un plan donné.* L'échelle de pente du plan cherché sera parallèle à celle du plan connu, et passera par le point donné. D'ailleurs, puisque l'inclinaison doit être égale, il suffira de joindre le point ($10^m,4$) avec celui qui a la même cote sur l'échelle donnée, puis de mener à cette ligne de jonction, des parallèles par les autres divisions de l'échelle du plan connu. PL. 63, FIG. 9.

785. *Par deux droites données, conduire deux plans qui soient parallèles entre eux.* On mènera par un point de la première droite, une parallèle à la seconde; et par un point de celle-ci une parallèle à la première droite. Alors, en conduisant un plan par la première et la troisième droites, puis un autre plan par la deuxième et la quatrième, on obtiendra évidemment les deux plans demandés. On sent bien qu'ils se réduiraient à un seul, si les droites primitives se coupaient; ou qu'ils deviendraient indéterminés, si elles étaient parallèles. FIG. 10.

786. *D'un point donné* ($8^m,2$), *abaisser une perpendiculaire sur un plan*

connu. La projection de cette perpendiculaire sera évidemment *parallèle* à la projection de l'échelle du plan, mais leurs inclinaisons seront inverses l'une de l'autre; c'est-à-dire, que si la pente du plan donné est $\frac{3}{5}$, par exemple, celle de la droite cherchée sera $\frac{5}{3}$. Alors, en prenant sur l'échelle horizontale du dessin, une longueur égale à 3 mètres, et portant cet intervalle sur la perpendiculaire indéfinie, au-dessous du point donné ($8^m,2$), on obtiendra un second point de cette perpendiculaire qui aura pour cote ($8^m,2+5^m$) ou ($13^m,2$). Par-là, cette perpendiculaire sera complétement déterminée; mais nous laisserons au lecteur le soin d'exécuter ces constructions, ainsi que celles qui sont indiquées dans les deux numéros suivants.

787. Si d'ailleurs on cherche (n° **781**) le point de rencontre de cette perpendiculaire avec le plan proposé, puis que l'on calcule la vraie distance de ce point de section au point donné (n° **764**), on connaîtra la plus courte distance de ce dernier point au plan proposé.

788. De même, si l'on demandait la plus courte distance d'un point à une droite, on conduirait par ce point un plan perpendiculaire à cette droite, et l'échelle de ce plan se construirait par un procédé inverse de celui du n° **786**. Ensuite, on chercherait le point de rencontre de ce plan et de la droite proposée, puis la vraie distance de ce point de section au point donné.

Les questions qui précèdent suffisent, sans doute, pour montrer comment on résondra tous les problèmes où il n'y aura à combiner que des droites avec des plans.

Pl. 63, Fig. 11. **789.** LES SURFACES COURBES, surtout lorsqu'elles ne sont pas susceptibles d'une définition rigoureuse, comme cela arrive pour la surface du sol, se représentent par les projections d'un certain nombre de *courbes de niveau*, qui sont les sections que produiraient dans cette surface des plans horizontaux, *équidistants* dans le sens vertical : puis, l'on regarde chaque zone comprise entre deux courbes de niveau consécutives, comme engendrée par une droite qui, en glissant sur ces deux courbes, demeurerait constamment *normale* à l'une d'elles, par exemple à la courbe inférieure. C'est donc *une surface gauche* que l'on substitue ainsi à la surface réelle du terrain, dont la forme rigoureuse ne serait connue qu'autant qu'on aurait assigné la loi géométrique qui lie entre elles les diverses sections de niveau; mais cette approximation est bien suffisante ici.

790. Ordinairement, les courbes horizontales sont assez rapprochées et assez peu différentes dans leur courbure, pour que la génératrice rectiligne de chaque zone puisse être regardée comme sensiblement *normale aux deux courbes* à la fois. Dans cette hypothèse, la surface que l'on substitue à la zone du sol, devient développable (n° **180**); car chaque génératrice, pour passer à une position infiniment voisine, se meut sur deux tangentes évidemment parallèles, et dès-lors situées dans un même plan.

791. Lorsque la distance des sections de niveau se trouve, dans certaines régions, trop considérable pour que les droites génératrices soient sensiblement normales aux deux courbes voisines, on substitue à ces droites des arcs de courbe qui remplissent cette condition; et par-là on ne change pas le mode de génération, car cela revient à imaginer d'autres sections de niveau intercalées entre les premières, et assez voisines pour intercepter sur la génératrice curviligne, des arcs qui puissent être regardés comme confondus avec leurs cordes. FIG. 11.

792. Si, à partir d'un point donné sur la surface, on mène ainsi une normale à la courbe inférieure : puis, que du pied de cette normale, on en conduise une autre perpendiculaire à la troisième courbe, et ainsi de suite; l'ensemble de ces diverses normales formera *la ligne de plus grande pente* de la surface, relativement au point de départ.

793. *Trouver la cote d'un point donné par sa projection horizontale, et situé sur une surface connue.* Si cette projection tombe entre les courbes de niveau qui ont les cotes 12ᵐ et 13ᵐ, on mènera par ce point une génératrice normale dont les extrémités auront ces mêmes cotes; et au moyen d'une simple proportion, on trouvera la cote du point proposé (12ᵐ,6). FIG. 11.

794. La question réciproque, où l'on aurait pour but de trouver tous les points de la surface qui ont une cote donnée (14ᵐ,5), est également facile à résoudre; et c'est par ce moyen qu'on intercalera de nouvelles courbes de niveau entre les premières, ainsi qu'on le voit dans la figure.

795. *Construire le plan tangent pour un point donné sur une surface connue.* Lorsque le point donné M sera placé sur une des courbes de niveau, le plan tangent devra passer par la tangente de cette courbe et par la génératrice rectiligne LM qui lui est normale; ainsi, en prolongeant cette normale jusqu'à la courbe supérieure, la partie interceptée fera connaître : 1° la direction de *l'échelle de pente* du plan demandé; 2° les cotes de deux points de cette échelle, dont la graduation sera bien facile à achever. Si l'on admet l'hypothèse du n° **790**, ce plan touchera la zone tout le long de la génératrice interceptée LM; FIG. 11.

tandis qu'il ne serait tangent qu'au point M, si l'on conservait la génération du n° **789**.

796. Quand le point de contact sera donné entre deux courbes de niveau consécutives, on mènera encore de ce point une normale à la courbe inférieure; et si cette droite est sensiblement normale à la courbe supérieure, la partie interceptée fournira la direction et la grandeur d'une des divisions de l'échelle du plan tangent. Dans le cas contraire, on tracera (n° **794**) la section horizontale qui passerait par le point donné; et alors la tangente et la normale de cette courbe détermineraient le plan tangent comme au numéro précédent.

797. Dans les applications de la méthode actuelle, il importe beaucoup de savoir discerner d'avance quelle sera la position du plan tangent par rapport à la surface, dans les environs du point de contact. Or, d'après ce que nous avons dit sur la courbure des surfaces et la note du n° **695**, on peut poser, comme vraie en général, la règle suivante : Lorsque deux courbes tracées sur une surface se coupent à angles droits, et que l'une et l'autre sont *convexes*, c'est-à-dire situées au-dessous du plan tangent relatif au point commun, la surface est elle-même convexe tout autour de ce point. Cette conséquence ne souffrirait d'exception que si les tangentes aux deux courbes rectangulaires se trouvaient comprises dans le même angle obtus PMq ou QMp (*fig.* 134) formé par les deux plans normaux *limites* dont nous avons parlé au n° **694** : mais ce cas exceptionnel ne se présentera pas ici pour la section de niveau et la ligne de plus grande pente, du moins en conservant l'hypothèse d'une zone développable admise au n° **790**; car alors cette ligne de plus grande pente sera tangente à l'une des deux *sections principales*. Ainsi, pour s'assurer que la surface du sol est convexe autour d'un certain point, il suffira de reconnaître que la courbe de niveau et la ligne de plus grande pente sont toutes deux convexes dans le voisinage de ce point; or la première de ces lignes est donnée en vraie grandeur sur le plan horizontal, et quant à la seconde, voici un caractère facile à saisir.

FIG. 11. **798**. En désignant par h la distance verticale de deux sections de niveau consécutives, et par l leur distance LM en projection horizontale, il est clair que l'inclinaison α de la tangente à la ligne de plus grande pente au point M, sera donnée par la relation $\tang \alpha = \frac{h}{l}$. Si donc on veut que cette courbe soit *convexe*, ou située au-dessous de sa tangente dans le voisinage du point considéré, il faut évidemment que l'angle α aille en augmentant à mesure que

l'on descend de L à M, N, P,..., et conséquemment que les distances horizontales l ou LM, MN, NP,.... aillent en diminuant, puisque h est constant. D'après ces remarques, on peut poser les règles suivantes :

1°. La surface est *convexe*, c'est-à-dire inférieure au plan tangent tout autour du point de contact, quand toutes les courbes de niveau voisines sont *convexes*, et que leur distance horizontale *diminue* en descendant, ou du moins reste constante.

2°. La surface est *concave*, ou supérieure au plan tangent, lorsque toutes les courbes de niveau sont *concaves*, et que leur distance horizontale *augmente* en descendant, ou du moins reste constante.

3°. Lorsque les courbes de niveau sont *convexes*, et que leur distance horizontale *augmente* en descendant, la surface est convexe dans le sens horizontal, mais elle est concave suivant la ligne de plus grande pente, comme la gorge d'une poulie dont l'axe serait vertical.

4°. Quand les courbes de niveau sont *concaves*, et que leur distance horizontale *diminue* en descendant, la surface est concave dans le sens horizontal et convexe dans le sens de la ligne de plus grande pente, comme la gorge d'une poulie dont l'axe serait horizontal.

Mais, dans ces deux derniers cas, et dans les autres variétés de forme que peuvent offrir les courbes de niveau, le plan tangent se trouve en partie audessus, et en partie au-dessous de la surface ; par conséquent il coupe le terrain, et l'on ne peut plus s'en servir utilement pour les problèmes du *défilement*. Le même inconvénient a lieu dans le second cas cité plus haut.

799. Il résulte aussi des considérations précédentes que *la pente* du sol est d'autant *plus roide* que les courbes de niveau sont plus rapprochées les unes des autres en projection horizontale; et si deux de ces courbes venaient à se toucher, le terrain serait *à pic* en cet endroit.

800. *Trouver l'intersection d'un plan donné avec une surface connue.* On tracera les horizontales du plan, qui ont les mêmes cotes que les courbes de niveau de la surface proposée; et leurs rencontres mutuelles feront connaître les points de l'intersection demandée. Il faudra prendre garde de confondre les points *d'entrée* avec les points *de sortie*, et quelquefois intercaler de nouvelles courbes de niveau dans les parties où les données ne seront pas assez voisines. Pour obtenir le point *culminant* de la section, il faudra chercher approximativement une génératrice normale à deux courbes de niveau voisines, et qui soit *parallèle*, en projection, *à l'échelle de pente* du plan sécant; car le plan tangent qui touchera la surface tout le long de cette génératrice (n° **790**), ne pourra couper PL. 65, FIG. 12.

le plan sécant que suivant *une horizontale* qui sera la tangente au point culminant. Il restera ensuite à chercher le point de rencontre de cette génératrice avec le plan sécant donné, ce qui s'effectuera par la méthode du n° **781**, ainsi qu'on le voit sur la *fig.* 12.

801. Lorsque le plan proposé est vertical, la section est projetée sur sa trace; mais alors, comme on connaîtra les cotes des points où il coupe les courbes de niveau, on pourra exécuter *un profil* rabattu.

FIG. 13. **802**. *Trouver l'intersection d'une droite et d'une surface données.* On conduira par cette droite un plan arbitraire; et en cherchant la section qu'il produira dans la surface, cette courbe ira rencontrer la droite primitive au point demandé.

803. On trouvera l'intersection de deux surfaces connues, en combinant les courbes de niveau qui ont des cotes respectivement égales dans les deux surfaces.

804. S'il s'agissait d'avoir le point de rencontre d'une surface avec une courbe, on imaginerait, par cette dernière, un cylindre horizontal dont on chercherait l'intersection avec la surface donnée, opération qui s'exécuterait comme au n° **800**; alors cette intersection irait couper la courbe donnée, aux points qui sont communs à cette dernière et à la surface proposée.

Nous nous bornons ici à ces indications succinctes, parce que les autres questions que l'on pourrait traiter par ces méthodes, n'auraient d'intérêt qu'en les présentant sous une forme qui les rattacherait spécialement à la *Fortification*.

CHAPITRE III.

Notions préliminaires sur les Engrenages.

805. Quand un corps solide, quelle que soit sa forme, tourne autour d'un axe fixe, tous les points de ce corps décrivent, dans un même temps, des arcs de cercle correspondants à des angles qui sont nécessairement *égaux*, puisque le système est de forme invariable; donc ces arcs se trouvent proportionnels à leurs rayons qui sont les distances de ces divers points à l'axe fixe, et conséquemment les vitesses *absolues* v, v', v'',... de tous ces points sont aussi proportionnelles aux rayons r, r', r'',...; de sorte que si l'on désigne par ω la *vitesse absolue* commune à tous les points qui sont placés à une distance de l'axe *égale à l'unité*, on aura toujours les relations

$$\frac{v}{r} = \frac{v'}{r'} = \frac{v''}{r''} = \dots = \omega, \quad \text{d'où} \quad v = r\omega, \quad v' = r'\omega, \dots$$

La quantité ω est ce qu'on appelle la *vitesse angulaire* ou la *vitesse de rotation* du système, soit qu'elle demeure constante ou qu'elle varie avec le temps.

806. Cela posé, le but qu'on se propose dans un engrenage cylindrique, c'est d'établir entre deux axes parallèles, projetés en O et O′, une dépendance telle que quand on imprimera au premier une vitesse de rotation ω, le second axe prenne aussi une vitesse de rotation ω' qui ait avec ω *un rapport constant* et assigné dans chaque question particulière. Or, si l'on divise l'intervalle OO′ en deux parties $OA = R$, $O'A = R'$, qui soient en raison inverse des vitesses ω et ω', ou telles que l'on ait PL. 64, FIG. 1.

$$R : R' :: \omega' : \omega;$$

puis, si avec ces distances comme rayons, on décrit deux cercles tangents en A et dont chacun soit lié invariablement avec son axe, on atteindra évidemment le but proposé, en faisant tourner ces deux *cercles primitifs* de manière que les points de l'une et l'autre circonférence prennent des *vitesses absolues* qui soient *égales*. Car, en les désignant par V et V′, il en résultera des vitesses angulaires données par les formules

$$\Omega = \frac{V}{R}, \quad \Omega' = \frac{V'}{R'};$$

et si $V = V'$, il s'ensuivra bien

$$\Omega : \Omega' :: R' : R :: \omega : \omega'.$$

Mais, pour que les vitesses absolues des deux circonférences OA et O'A soient égales, il faut évidemment que les deux points A et a, placés actuellement en contact sur la ligne des centres, parcourent dans un même temps, des arcs AA' et aa' qui soient *égaux en longueur absolue;* c'est donc là définitivement la condition essentielle qui devra être remplie dans tout engrenage.

FIG. 1. **807.** Pour que le mouvement de rotation imprimé à la roue O soit transmis à la roue O' d'une manière efficace et capable de vaincre des résistances considérables, on arme ces deux roues de saillies ou *dents,* terminées par des surfaces cylindriques projetées sur des courbes telles que AB et ab. Mais si l'on peut tracer à volonté l'un de ces profils ab, l'autre ne doit pas être choisi arbitrairement : sans quoi la condition essentielle du n° **806** ne se trouverait pas remplie; et pour énoncer plus clairement la forme qui convient au profil AB, nous poserons la question dans des termes un peu différents.

PL. 64, FIG. 2. **808.** Imaginons que le cercle O demeure entièrement immobile, et que le cercle O' *roule* sur celui-là, sans glisser, et en entraînant la courbe ab qui fait corps avec lui. En prenant sur les diverses positions O'_1, O'_2, O'_3,.... de ce cercle mobile, les arcs

$$A_1a_1 = A_1A, \quad A_2a_2 = A_2A, \quad A_3a_3 = A_3A,$$

on obtiendra d'abord l'épicycloïde $aa_1a_2a_3a_4$ (n° **471**) : puis, si l'on trace les courbes a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3,..... identiques avec ab pour la forme et la situation relative, ces courbes se couperont consécutivement en des points i, i', i'', i''', qui donneront lieu à un polygone curviligne; mais en rapprochant indéfiniment les centres O'_1, O'_2, O'_3, ce polygone deviendra, à la limite, une courbe continue $Ae_1e_2e_3e_4B$ qui se nomme *l'enveloppe* de toutes les courbes individuelles ab, a_1b_1, a_2b_2,...., parce qu'elle se trouve évidemment tangente à chacune de celles-ci que l'on appelle les *enveloppées* (n^{os} **190**, **192**).

Cela posé, je dis que cette enveloppe Ae_4B est le profil qu'il faut adopter pour la dent de la roue O. En effet, si l'on faisait tourner autour du centre O le système invariable des deux cercles O et O'_4, sans altérer en rien leur situation relative, jusqu'à ce que la droite $OA_4O'_4$ eût repris la position verticale OAO', ces deux cercles se trouveraient alors, avec les courbes Ae_4B et a_4b_4, dans une position (*fig.* 3) qui serait évidemment identique avec celle

qu'auraient prise les cercles O et O' de la *fig.* 2, si ceux-ci avaient simplement *tourné autour de leurs centres immobiles*, et de manière à imprimer aux circonférences $\alpha6$, $\alpha'6'$, des vitesses absolues *égales* : car, sur la *fig.* 3, on voit bien que les points A et a_4 qui se trouvaient primitivement en contact sur la ligne des centres, auront parcouru des arcs A_4A et A_4a_4 *égaux en longueur absolue*, puisqu'ils sont les mêmes que les arcs A_4A et A_4a_4 de la *fig.* 2, et que ceux-ci sont égaux par la définition du roulement donnée au nº **469**. Donc, comme il en arriverait autant pour les cercles O et O'_3, O et O'_2,..., on peut affirmer que la condition essentielle aux engrenages (nº **806**) sera bien remplie, si l'on adopte pour profil conjugué de *ab* l'enveloppe Ae_4B définie comme nous l'avons fait ci-dessus.

809. De là on peut conclure ce principe général : faire tourner simultanément les deux cercles O et O' autour de leurs centres immobiles, et de manière que les circonférences $\alpha6$ et $\alpha'6'$ prennent des vitesses *égales*, c'est la même chose que de faire rouler la circonférence $\alpha'6'$ sur la circonférence $\alpha6$ entièrement immobile, sauf à ramener ensuite le système de ces deux cercles, rendu invariable, dans la situation où la ligne des centres reprendra la position primitive OO'. Mais on doit sentir que ce second mode de mouvement est plus commode pour les opérations graphiques, puisqu'on peut les effectuer sur le plan du cercle O devenu immobile.

De même si, dans la première hypothèse, on a besoin de trouver la courbe gg_1g_2..... décrite sur le plan mobile du cercle O, par un point quelconque g lié invariablement avec la circonférence $\alpha'6'$, il suffira de faire rouler cette dernière sur la circonférence $\alpha6$ entièrement fixe; et alors le point g décrira une épicycloïde allongée $gg_1g_2g_3$..... que nous avons appris à construire (nº **473**), et qui sera la courbe que l'on cherchait.

810. On voit donc que, pour la théorie des engrenages, il est nécessaire de savoir construire *l'enveloppe des positions successives que prend une courbe* ab *entraînée par un cercle mobile* O' *qui roule sur un autre cercle* O *entièrement fixe*. On pourrait, il est vrai, se contenter de tracer cette enveloppe $Ae_1e_2e_3e_4B$ en la rendant sensiblement tangente aux courbes individuelles ab, a_1b_1, a_2b_2,..... construites comme au nº **808**; mais on obtiendra plus de précision, en cherchant directement la position des points de contact par le théorème suivant. FIG. 2.

Si l'on considère le cercle individuel O'_2 avec l'enveloppée correspondante a_2b_2, et qu'on mène à celle-ci une normale A_2e_2 partant du point de contact du cercle mobile, je dis que e_2 sera le point de contact de l'enveloppe AB sur la

courbe a_3b_3. En effet, pendant la rotation du cercle O'_3 pour passer à une position infiniment voisine, le point e_3 décrit (n° 470) un petit arc circulaire $e_3\varepsilon$ qui a pour rayon la distance A_3e_3 : or puisque cette droite a été choisie normale à la courbe a_3b_3, l'arc $e_3\varepsilon$ sera tout entier sur l'enveloppée a_3b_3 ; donc le point ε se trouvera commun à l'enveloppée a_3b_3 et à celle qui la suit immédiatement, et dès-lors ce point appartiendra à l'enveloppe cherchée AB. Mais cette enveloppe passerait aussi par un point analogue ε' situé à gauche de e_3, et qui serait l'intersection de la courbe a_3b_3 avec l'enveloppée qui la précède immédiatement ; donc l'élément $\varepsilon'e_3\varepsilon$ se trouve commun à l'enveloppée a_3b_3 et à l'enveloppe générale AB ; par conséquent le contact de ces deux lignes est bien en e_3, et leur *normale commune* est A_3e_3.

811. D'après cela, quand l'enveloppée ab sera définie géométriquement, on saura mener à ses diverses positions des normales partant des points A_2, A_3,..., lesquelles feront connaître autant de points e_2, e_3,..., de l'enveloppe générale. Si l'enveloppée ab n'est donnée que graphiquement, après l'avoir transportée dans la position a_3b_3, par exemple, on cherchera une ouverture de compas telle qu'en décrivant du centre A_3 un arc de cercle, il touche simplement la courbe a_3b_3 ; une petite portion de cet arc appartiendra sensiblement à l'enveloppe, et en raccordant tous les arcs semblables par un trait continu, on obtiendra l'enveloppe cherchée avec une exactitude suffisante pour la pratique. Néanmoins ce tracé offrirait encore plus de précision, si on l'effectuait avec les rayons des cercles osculateurs de l'enveloppe ; c'est pourquoi nous allons donner le moyen de trouver ces derniers.

812. Auparavant, observons que si l'on faisait au contraire rouler sur le cercle O' rendu fixe, le cercle O devenu mobile en emportant avec lui la courbe $Ae_1e_2e_3e_4B$, l'enveloppe de toutes les positions de cette dernière courbe serait précisément la ligne ab. En effet, lorsqu'un point du cercle O, A_3 par exemple, sera venu en contact avec la circonférence O', la courbe a_3b_3, qui touche actuellement la ligne Ae_3B, coïncidera évidemment avec ab, et conséquemment cette dernière se trouvera bien *tangente* à la position qu'aura prise alors la ligne Ae_3B.

Pl. 64, Fig. 4. **813.** *Centres de courbure de l'enveloppe.* Soit O' une position quelconque du cercle mobile qui touche le cercle fixe O au point α ; soient ab l'enveloppée correspondante à cette situation, AmB l'enveloppe générale, C' et C les centres de courbure de ces lignes pour le point de contact m, centres qui doivent être sur la normale commune αm, et dont le premier est censé connu par la définition de la courbe amb. Si l'on prend sur les cercles primitifs deux arcs $\alpha\alpha_1$ et $\alpha\alpha'$

qui soient égaux en grandeur absolue et infiniment petits, la droite $C\alpha_1 m_1$ sera (n° **810**) une normale de l'enveloppe, et $C'm'\alpha'$ une normale de l'enveloppée; or, quand la rotation du cercle O' aura amené le point α' en contact avec α_1, les deux normales $C\alpha_1$ et $C'\alpha'$ se trouveront nécessairement en ligne droite, ainsi que les deux rayons $O\alpha_1$ et $O'\alpha'$; d'où l'on conclut que les angles $O\alpha_1 C$ et $O'\alpha'C'$ doivent être égaux actuellement, puisqu'ils ne changeront pas de grandeur pendant le roulement du cercle O'. Cela posé, en désignant par φ l'angle $O\alpha C = O'\alpha C'$, on a évidemment

$$O\alpha_1 C = \varphi + O - C, \quad O'\alpha' C' = \varphi + C' - O';$$

d'où il résulte, en égalant ces deux expressions,

$$(a) \qquad O + O' = C + C'.$$

Pour estimer ces derniers angles, il faut employer les arcs décrits de leurs sommets avec un rayon égal à l'unité, et comparer ces arcs avec $\alpha\alpha_1$ et $\alpha\alpha'$ que l'on doit regarder comme une seule ligne droite perpendiculaire à $O\alpha O'$. Dès lors, en posant

$$O\alpha = R, \quad Cm = \rho, \quad O'\alpha = R' \quad C'm = \rho', \quad \alpha m = p, \quad \alpha\alpha_1 = \alpha\alpha' = ds,$$

on trouvera aisément

$$\text{angle } O = \frac{ds}{R}, \quad O' = \frac{ds}{R'}, \quad C = \frac{ds.\cos\varphi}{\rho - p}, \quad C' = \frac{ds.\cos\varphi}{\rho' + p};$$

et en substituant ces valeurs dans l'égalité précédente (a), il viendra

$$(A) \qquad \left(\frac{1}{\rho - p} + \frac{1}{\rho' + p}\right)\cos\varphi = \frac{1}{R} + \frac{1}{R'};$$

formule très-simple qui fera connaître le rayon de courbure ρ de l'enveloppe, et par suite son centre de courbure C, quand on connaîtra le rayon ρ' de l'enveloppée.

814. On prévoit aisément, sans tracer une nouvelle figure, qu'on devra changer le signe de ρ' dans cette formule, quand le centre C' tombera du même côté que C par rapport au point m : il en faudra faire autant pour R', si le centre O' est placé du même côté que O relativement au point de contact α des

deux cercles. Ainsi, dans le cas de la *fig.* 5, l'équation (A) prendra la forme

$$\text{(B)}\qquad \left(\frac{1}{\rho - p} - \frac{1}{\rho' - p}\right)\cos\varphi = \frac{1}{R} - \frac{1}{R'},$$

qui est bien symétrique dans toutes ses parties. Sous ce point de vue, il eût été plus rationnel d'établir la démonstration sur la *fig.* 5, où les centres sont placés d'un même côté de la tangente; mais comme ce dernier cas se présente beaucoup plus rarement dans les engrenages, nous avons voulu fixer l'attention sur les données les plus habituelles.

Les formules (A) et (B) et celles du n° **817** sont dues à M. *Savary*, ainsi que la construction graphique fort élégante que nous allons exposer.

Fig. 6. **815**. Joignons par des droites les centres O et C, O' et C'; puis, en prolongeant ces droites, cherchons les points D et D' où elles iront couper la perpendiculaire αD élevée sur la normale commune CαC'; il arrivera que ces deux points D et D' seront confondus. En effet, si des centres O et O' on abaisse des perpendiculaires sur la normale CαC', on formera des triangles semblables avec CαD et C'αD', desquels on tirera aisément

$$\alpha D = \frac{(\rho - p)\,R\sin\varphi}{R\cos\varphi - (\rho - p)},\qquad \alpha D' = \frac{(\rho' + p)\,R'\sin\varphi}{(\rho' + p) - R'\cos\varphi}.$$

Or la formule (A) donne, en transposant le second et le troisième terme,

$$\frac{R\cos\varphi - (\rho - p)}{(\rho - p)\,R} = \frac{(\rho' + p) - R'\cos\varphi}{(\rho' + p)\,R'};$$

ce qui prouve que les valeurs précédentes de αD et αD' sont bien égales.

816. Ainsi, quand on connaîtra le centre de courbure C' pour le point *m* de l'enveloppée *amb*, on tirera la droite C'O' que l'on prolongera jusqu'à ce qu'elle rencontre en un point D la perpendiculaire αD élevée sur la normale αmC' : puis, en joignant ce point D avec O, la droite OD ira couper la normale prolongée C'α au point C qui sera le centre de courbure de l'enveloppe A*m*B pour le point *m*. Lorsque l'enveloppée *amb*, au lieu d'être définie par ses propriétés géométriques, ne sera donnée que graphiquement, on tracera plusieurs cercles tangents en *m* à cette courbe, et en choisissant celui d'entre eux qui approchera davantage de se confondre avec *ab* dans les environs de *m*, son centre pourra être pris pour le point C'.

Dans tous les cas, si avec les rayons tels que Cm, on décrit de petits arcs de cercle, et qu'on les raccorde par un trait continu, on obtiendra le tracé de l'enveloppe AmB de la manière graphique la plus exacte.

817. Avant d'appliquer ces résultats à divers exemples, nous placerons ici une remarque importante pour la théorie des engrenages; c'est que pendant la rotation du cercle O' sur le cercle fixe O, la courbe amb ne roule pas simplement sur AmB, mais elle *glisse* en même temps sur cette dernière (n° **469**), d'où il résulte entre les dents des deux roues un *frottement* qui consomme une partie de la force motrice. En effet, lorsqu'à une époque quelconque les cercles O et O' se touchent en α, le contact m de l'enveloppe avec l'enveloppée est donné par la normale $C\alpha mC'$ menée de ce point α; donc, quand un déplacement infiniment petit aura fait toucher les cercles par les points α' et α_1, les normales correspondantes seront les droites $C'\alpha'$ et $C\alpha_1$ qui vont déterminer les points m' et m_1 par lesquels l'enveloppée et l'enveloppe se toucheront à cette seconde époque du mouvement. Or, si les arcs mm' et mm_1 ne sont pas égaux et dirigés dans le même sens, il est clair qu'il y aura glissement de l'une des courbes sur l'autre : calculons donc ces arcs. FIG. 4.

On a évidemment

$$mm_1 = \frac{\rho\cos\varphi.ds}{\rho - p}, \qquad mm' = \frac{\rho'\cos\varphi.ds}{\rho' + p};$$

donc $$mm_1 - mm' = \left(\frac{\rho}{\rho - p} - \frac{\rho'}{\rho' + p}\right)\cos\varphi.ds = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)pds,$$

en réduisant d'après la formule (A). D'ailleurs, si l'on considère un déplacement de grandeur finie, représenté par $s''-s'$ sur le cercle fixe, la différence des arcs parcourus sur l'enveloppe et l'enveloppée par leur point de contact, sera donnée par l'intégrale définie

$$\delta = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)\int_{s'}^{s''} pds;$$

donc, en excluant le cas inusité où la portion de normale $\alpha m = p$ changerait de signe dans l'intervalle de s' à s'', il est certain que cette intégrale, composée d'éléments tous positifs, ne sera jamais nulle; et par suite il y aura toujours un glissement entre les courbes amb et AmB.

818. Nous ne nous arrêterons pas au cas très-particulier où p serait supposé constamment nul; car cela exigerait que l'enveloppée et l'enveloppe fussent confondues avec les circonférences O' et O. Si l'un des deux centres C, C', était

situé entre α et m, on doit apercevoir, sur la *fig.* 4, que les points m_1 et m' seraient placés l'un à gauche et l'autre à droite de m; mais comme alors un des arcs mm_1, mm', serait négatif, ce serait encore leur différence analytique qui donnerait l'écartement des points m_1 et m', de sorte que l'intégrale δ s'applique aussi à ce cas. Enfin, lorsque le roulement est intérieur, comme dans la *fig.* 5, cette intégrale prendra la forme

$$\delta' = \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right)\int_{s'}^{s''} p\,ds;$$

mais puisque, dans ce cas, les rayons R et R' sont nécessairement inégaux, la différence δ' des arcs parcourus par le contact se trouvera encore différente de zéro, et il y aura toujours un glissement entre l'enveloppe et l'enveloppée, pourvu que p ne change pas de signe dans l'intervalle que l'on considère.

Revenons maintenant à la construction graphique des centres de courbure d'une enveloppe, en prenant pour exemples les cas employés le plus ordinairement dans les engrenages.

PL. 65, FIG. 9. **819.** *Enveloppe d'un point mobile.* Si l'enveloppée se réduit à un point unique A placé sur la circonférence même du cercle mobile, l'enveloppe ne sera autre chose que la courbe décrite par ce point, c'est-à-dire l'épicycloïde simple AMB : ce serait l'épicycloïde allongée A'M'B', si le point générateur était placé en A' à l'extérieur du cercle mobile; et s'il était placé intérieurement en A'', il donnerait lieu à l'épicycloïde raccourcie A''M''B''. On a vu précédemment (n^os **471**, **475**) combien il est facile de trouver les points M, M', M'' de ces courbes, qui répondent à chaque position du contact α du cercle mobile O'; et que les normales correspondantes sont les droites αM, αM', αM''. Maintenant, pour obtenir les centres de courbure, il faut, suivant la règle du n° **816**, élever sur chaque normale une perpendiculaire αD, αD' ou αD'', et la prolonger jusqu'à ce qu'elle coupe le diamètre MO' : puis, en joignant le point de section D, D' ou D'', avec le centre O par une droite, cette dernière rencontrera le prolongement de la normale au centre cherché C, C' ou C''.

FIG. 9. **820.** Pour l'épicycloïde simple AMB, on voit bien que, sans tracer la perpendiculaire αD, le point de rencontre avec MO' sera toujours à l'extrémité D de ce diamètre; en outre, la suite des centres de courbure analogues à C, formera une développée ACE qui sera elle-même une nouvelle épicycloïde que l'on peut déterminer *à priori* de la manière suivante. Après avoir élevé la perpendiculaire Cβ sur la normale, on décrira un cercle qui ait pour diamètre l'intervalle $\alpha\beta$, et un autre cercle qui ait pour rayon Oβ : puis, en faisant rou-

ler le premier sur le second, le point C engendrera la développée ACE. Pour justifier cette assertion, adoptons les notations suivantes :

$$O\alpha = R, \quad O'\alpha = R', \quad O\mathfrak{G} = r, \quad \alpha\mathfrak{G} = 2r';$$

puis, observons qu'à cause de $\alpha D = MT$, on a évidemment

$$O\mathfrak{G} : O\alpha :: \mathfrak{G}C : \alpha D :: \alpha\mathfrak{G} : \alpha T;$$

ce qui donne la relation

$$r : R :: r' : R'; \quad \text{d'ailleurs} \quad R = r + 2r';$$

d'où l'on conclut

$$r = \frac{R^2}{R + 2R'}, \quad r' = \frac{RR'}{R + 2R'}.$$

Ces valeurs constantes prouvent déjà que les deux cercles décrits avec $O\mathfrak{G}$ et $\alpha\mathfrak{G}$ resteront invariables de grandeur, quelle que soit la position du contact α du cercle primitif O'; dès lors, après avoir pris l'arc AF égal à la demi-circonférence $M\alpha D$, et avoir tiré le rayon OEF, il ne restera plus qu'à démontrer que l'arc $\mathfrak{G}C$ est égal à $\mathfrak{G}E$. Or les arcs semblables $\mathfrak{G}C$ et MT sont proportionnels à leurs rayons; et comme le second de ces arcs égale $\alpha D = \alpha F$, on a donc

$$\text{arc } \mathfrak{G}C = \frac{r'}{R'} . \alpha F, \quad \text{arc } \mathfrak{G}E = \frac{r}{R} . \alpha F,$$

d'où il résulte que les arcs $\mathfrak{G}C$ et $\mathfrak{G}E$ sont effectivement égaux en longueur absolue, d'après la proportion trouvée plus haut entre les quatre rayons.

821. Pour le sommet B de l'épicycloïde primitive, le centre de courbure est donc à l'origine E de la développée ACE; et comme la règle générale du n° **816** devient insuffisante pour obtenir ce centre particulier E, il est utile de savoir le trouver directement. Or la valeur de r rapportée ci-dessus montre que si l'on décrit sur OB comme diamètre une demi-circonférence, elle coupera le cercle primitif du rayon OA en un point G tel que la perpendiculaire GE fournira le point cherché E.

822. On doit remarquer que l'épicycloïde est une courbe rectifiable; car puisqu'un arc d'une développée est toujours égal à la différence des rayons de courbure qui aboutissent à ses extrémités, il en résulte que l'arc AC égale la droite $C\alpha M$. La demi-branche ACE aura pour longueur $EB = 2r' + 2R'$; et si

on veut l'exprimer au moyen des seuls éléments de cette épicycloïde, il suffira de substituer ici la valeur de R′ en fonction de r et r'.

Pl. 65, Fig. 10. **823**. *Enveloppe d'un cercle.* Soient O le cercle fixe, O′ le cercle mobile qui, en roulant sur l'autre, entraîne avec lui un petit cercle *amb* dont le centre M est placé sur la circonférence O′. Ce point M a décrit l'épicycloïde AM; et pour obtenir l'enveloppe εm, il faut, suivant la règle du n° **811**, mener de chaque point de contact α, une normale à l'enveloppée *amb*, c'est-à-dire tirer la droite αM. Cette dernière rencontre l'enveloppée en deux points m et m'; donc il y aura ici deux enveloppes, l'une intérieure εm, l'autre extérieure $\varepsilon' m'$, lesquelles toucheront l'enveloppée *amb* aux points m et m'. Ces deux enveloppes auront les mêmes centres de courbure C et la même développée ACE que l'épicycloïde AM; mais leurs rayons de courbure seront tous plus petits ou tous plus grands que ceux de cette dernière ligne, de la quantité constante $Mm = r$; de sorte que ces trois courbes seront équidistantes partout, dans le sens de leurs normales communes.

824. Chacune de ces enveloppes présente un rebroussement à l'endroit où elle vient rencontrer la développée ACE. Pour déterminer le point ε, il suffit d'observer qu'alors le rayon de courbure de l'épicycloïde devient égal à $Mm = r$, et que la portion de normale désignée par p au n° **813**, est ici la corde αM du cercle mobile; si donc, dans la formule (A) de ce numéro, on pose

$$\rho = r, \quad \rho' = 0, \quad p = 2R' \cos\varphi,$$

on en déduira aisément

$$p = \frac{r}{2}\left(\frac{R + 2R'}{R + R'}\right);$$

ce qui montre qu'en prenant sur la circonférence O, à partir du point A, un arc égal à celui qui, dans le cercle O′, a pour corde la valeur que nous venons de trouver pour p, on obtiendra le point de contact α' qui répond au rebroussement cherché ε; et dès lors ce dernier point se construira facilement, comme on l'a fait pour le centre C au moyen de α.

Au lieu d'appliquer la formule (A) à l'épicycloïde AM, on aurait pu l'appliquer directement à l'enveloppe εm dont le rayon de courbure devient nul pour le point cherché ε; alors il aurait fallu poser

$$\rho = 0, \quad \rho' = r, \quad p + r = p' = 2R' \cos\varphi,$$

et l'on aurait trouvé pour p' qui représente la corde $M\alpha$, la même valeur que ci-dessus.

825. La seule partie de ces enveloppes qui soit utile dans les applications aux engrenages, c'est la branche εm, ou pour parler plus exactement, c'est la portion δm de cette branche qui se trouve à l'extérieur du cercle O. Quoique l'origine δ de cette portion utile, diffère très-peu du rebroussement ε, si l'on veut déterminer précisément le premier de ces points, on observera qu'il se présente quand le petit cercle passe par le contact α des cercles O et O', c'est-à-dire quand la corde $M\alpha$ se trouve égale au rayon Mm. Donc il suffira de prendre l'arc $A\delta$ égal a celui qui, dans le cercle O', a pour corde le rayon Mm.

826. *Enveloppe d'un rayon.* Si nous adoptons pour enveloppée le rayon O'A du cercle mobile O', l'enveloppe sera l'épicycloïde AmB engendrée par le point A d'un cercle V qui serait décrit sur AO' comme diamètre, et qui roulerait lui-même sur la circonférence O. En effet, quand le cercle O' sera parvenu dans la position quelconque O'', le rayon O'A occupera une situation $O''a$ déterminée par la condition $\alpha a = \alpha A$; si donc nous abaissons sur cette enveloppée $O''a$ la perpendiculaire αm, le point m sera (n° **811**) un point de l'enveloppe cherchée. Mais ce point m appartiendra évidemment à la circonférence V' décrite sur $\alpha O''$ comme diamètre, et dès lors les arcs αm et αa qui répondent à un même angle $aO''\alpha$ et sont décrits avec des rayons doubles l'un de l'autre, se trouveront égaux en longueur absolue; d'où l'on conclut que l'arc αm égale aussi l'arc αA, et qu'ainsi le point m déjà trouvé pour l'enveloppe, appartient effectivement à l'épicycloïde AB que décrirait le point A du cercle V qui roulerait sur la circonférence O. Fig. 11.

827. Ce qui précède démontre en même temps que si le cercle V roulait dans l'intérieur du cercle O' devenu immobile, le point A de cette circonférence V décrirait une épicycloïde *rectiligne* qui serait précisément le rayon AO', ou plutôt le diamètre entier du cercle O', comme nous l'avons déjà vu au n° **175**. De sorte qu'ici l'enveloppée et l'enveloppe sont engendrées par le roulement du même cercle V sur les circonférences O et O'; et ce résultat n'est qu'un cas particulier de la proposition suivante.

828. *Enveloppe d'une épicycloïde.* Si l'on fait rouler un cercle U de rayon quelconque, d'abord dans l'intérieur du cercle O', et ensuite à l'extérieur du cercle O, un même point de la circonférence U décrira ainsi deux épicycloïdes ab et AB, dont la dernière sera l'enveloppe de toutes les positions que prendra l'enveloppée ab, lorsque celle-ci se trouvera entraînée par la rotation du cercle O' sur la circonférence O. En effet, prenons les cercles O et O' dans Fig. 12.

une position quelconque où ils se touchent en α, puis traçons le cercle U tangent aux deux autres dans ce même point. Alors la circonférence U ira couper l'épicycloïde ab en un point m tel que l'arc $\alpha m = \alpha a$; mais par suite de la rotation du cercle O' sur O, l'arc $\alpha a = \alpha$A; donc les arcs αm et αA sont égaux, et conséquemment le point m de la courbe ab appartient aussi à l'épicycloïde AB. D'ailleurs ces deux épicycloïdes sont tangentes au point commun m, puisque pour l'une comme pour l'autre (n° **472**) la normale est la corde αm du cercle générateur U. Mais il est très-rare qu'on emploie ces deux profils curvilignes pour les dents des roues, attendu qu'on trouve bien plus commode d'adopter le système de la *fig.* 11 où l'un des deux profils est une droite AO' (*).

Fig. 13. **829.** *Enveloppe d'une développante de cercle.* Adoptons enfin pour enveloppée la courbe amb qui est la développante (n° **479**) d'un cercle concentrique avec O' et décrit d'un rayon arbitraire O'C'. Si du point α nous menons à ce cercle O'C' la tangente αmC', celle-ci sera normale à amb et elle fournira (n° **811**) un point m de l'enveloppe cherchée AmB; d'ailleurs le centre de courbure C de cette enveloppe s'obtiendra (n° **816**) en tirant O'C' et sa parallèle OC, laquelle se trouvera perpendiculaire sur la normale C'αC et aura évidemment pour valeur *constante*

$$\mathrm{OC} = \mathrm{O'C'} \times \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R'}};$$

(*) En généralisant ces considérations, on peut définir autrement que nous ne l'avons fait au n° 808, la forme que doivent avoir les profils conjugués des dents d'un engrenage. Pour cela, prenons une courbe quelconque W tangente en A (*fig.* 2) aux deux cercles O et O', et faisons-la rouler tour à tour dans l'intérieur de la circonférence O' et à l'extérieur du cercle O; alors le point A de W décrira successivement deux courbes ab et AB qui seront les profils demandés. Car, lorsque les cercles O et O' tourneront autour de leurs centres immobiles, et de manière à imprimer des vitesses égales (n° 806) aux circonférences $\alpha\mathcal{C}$ et $\alpha'\mathcal{C}'$, il arrivera que les courbes AB et ab engendrées comme ci-dessus, se *toucheront* constamment en un point variable pour lequel la normale commune passera toujours par le point A sur la ligne des centres. C'est ce que l'on démontrera avec facilité, si l'on substitue, d'après le principe du n° 809, au mouvement de révolution des cercles O et O' autour de leurs centres immobiles, le roulement de la circonférence O' sur la circonférence O entièrement fixe.

Mais cette seconde définition des profils des dents, serait peu commode à employer dans le cas où l'on assigne d'avance et *arbitrairement* la forme ab d'un de ces profils; car il faudrait alors commencer par chercher quelle serait la courbe W qui, en roulant sur O', pourrait engendrer le profil donné ab, ce qui offrirait souvent beaucoup de difficultés.

d'où l'on conclut que la circonférence décrite avec le rayon OC sera le lieu de tous les centres de courbure de l'enveloppe AmB; et conséquemment cette enveloppe est elle-même une développante du cercle OC.

830. Revenons, maintenant, au véritable état de deux roues dont l'une transmet à l'autre le mouvement circulaire qui l'anime; car, comme nous l'avons dit n° **808**, l'hypothèse que le cercle O′ roulait sur le cercle O entièrement fixe, n'était qu'une fiction propre à simplifier l'étude et le tracé des enveloppes dont nous avions besoin. Ainsi, en réalité, les centres O et O′ sont fixes tous les deux, et le mouvement de révolution qui est imprimé à la roue O se communique à la roue O′ par la poussée de la courbe AB sur la courbe ab; mais pour que ce mouvement satisfasse à la condition essentielle du n° **806**, il faut (n° **808**) que l'une de ces courbes soit *l'enveloppe* de l'autre dont la forme demeure arbitraire. Toutefois, on doit y mettre la restriction que, dans la portion de ab qui sera utilisée, les rayons vecteurs tels que O′m, aillent toujours en décroissant ou toujours en augmentant; et dès lors ceux de AB, tels que Om, varieront constamment en sens contraire des premiers. Cela est nécessaire pour qu'il y ait véritablement *poussée* d'une dent sur l'autre; car, si l'un des rayons vecteurs O′m était maximum ou minimum, il serait nécessairement *normal* à la courbe ab; or quand les deux dents viendraient se toucher en m, la normale O′m qui doit à cette époque (n° **810**) passer par le point de contact D des deux cercles, irait donc coïncider en direction avec la ligne des centres ODO′; et dès lors la révolution du cercle O autour de son centre immobile, produirait une vitesse précisément *tangentielle* à la courbe amb, ce qui ne donnerait lieu qu'à un simple frottement qui serait insuffisant pour entraîner la roue O′. Fig. 7.

831. *Lieu des contacts.* Dans le mouvement de révolution autour des centres fixes O et O′, le point de contact m de l'enveloppe et de l'enveloppée, qui toutes deux participent à ce mouvement, occupe successivement des positions différentes par rapport à la droite invariable ODO′ et au point D dans lequel les cercles mobiles se touchent constamment : la suite de ces positions du point m, sur le plan fixe des deux cercles, forme une courbe utile à connaître. En général, on l'obtiendrait en mesurant sur chaque position du cercle mobile de la *fig.* 2, le rayon vecteur $A_1 e_1$ et l'angle $e_1 A_1 O'_1$, pour les rapporter ensuite sur la *fig.* 7, à partir du point D considéré comme pôle; mais, dans plusieurs cas, ce lieu des contacts entre l'enveloppe et l'enveloppée s'obtient d'une manière directe et très-simple. Fig. 7.

1°. Si l'enveloppée se réduisait à un point de la circonférence Q', il est évident que cette circonférence serait elle-même le lieu demandé.

FIG. 11. 2°. Lorsque l'enveloppée est le rayon O'A (*fig.* 11), le lieu des contacts successifs est la circonférence V décrite sur O'A comme diamètre; car, quelle que soit la position O'A' du rayon mobile, la normale AN' qu'il faut abaisser du point A (n° **811**), aboutira toujours sur la circonférence V.

3°. Dans le cas peu usité de la *fig.* 12, où l'enveloppe et l'enveloppée seraient deux épicycloïdes, leurs points de contact se trouveraient tous évidemment sur la circonférence U, placée tangentiellement aux deux cercles primitifs sur la ligne invariable qui joint les centres fixes.

FIG. 13. 4°. Enfin, lorsque l'enveloppée et l'enveloppe seront deux développantes de cercle, le lieu de leurs contacts successifs sera précisément la droite C'αC, tangente commune aux deux cercles auxiliaires qui donnent naissance à ces développantes; car, pendant la révolution de ces courbes autour des centres fixes O et O', la normale qu'il faudrait mener du point α (n° **811**), coïnciderait toujours avec la droite C'αC.

832. *Limites correspondantes.* Comme, dans la pratique, on n'emploie que des arcs peu étendus de l'enveloppe et de l'enveloppée, il importe de savoir limiter une de ces courbes à la portion vraiment utile, d'après la grandeur de l'arc conservé pour l'autre. Or les points correspondants, c'est-à-dire ceux qui se trouveront en contact à une certaine époque du mouvement de révolution, seraient tout naturellement donnés si l'on construisait l'enveloppe d'après la méthode du n° **811** et la *fig.* 2; mais, dans la plupart des cas usuels, on connaît d'avance la nature de l'enveloppe et de l'enveloppée, et l'on trace ces courbes indépendamment l'une de l'autre; de sorte qu'il devient nécessaire de chercher ensuite les limites correspondantes, ce qui est facile quand on a construit le *lieu des contacts* successifs.

833. Par exemple, dans le cas de la *fig.* 11 où l'enveloppée est le rayon O'A, et l'enveloppe l'épicycloïde AmB décrite par le roulement du cercle V', pour trouver le point correspondant à N, on ramènera ce dernier en N' sur la circonférence V qui est le lieu des contacts successifs, au moyen d'un arc de cercle décrit du centre O; puis, du centre O' avec le rayon O'N', on décrira un autre arc de cercle qui transportera le point N' en *n* sur le rayon O'A; et ce dernier point correspondra à N. De sorte que si l'on ne conserve de l'enveloppe que l'arc AN, la seule portion utile de l'enveloppée sera An; or ces arcs ayant évidemment des longueurs très-inégales, on aperçoit bien

qu'il y aura *glissement* et par suite *frottement* de l'enveloppe sur l'enveloppée, comme nous l'avons démontré généralement au nº **817**.

834. Dans la *fig.* 13 où l'enveloppe et l'enveloppée sont deux développantes, nous savons que le lieu de leurs contacts successifs est la droite C′αC. Donc, pour obtenir le point correspondant à N, il suffira de transporter ce dernier en N′ par un arc décrit avec le rayon ON; puis, de ramener N′ en *n* au moyen d'un arc de cercle décrit du centre O′. Ainsi, les arcs AN et *an*, AB et *ab*,..... seront les arcs correspondants, qui roulent et glissent l'un sur l'autre pendant la révolution des cercles O et O′ autour de leurs centres fixes.

CHAPITRE IV.

Tracé des engrenages plans ou cylindriques.

PL. 66, FIG. 14. **835.** Lorsque les deux roues que l'on veut mettre en mouvement, ont des *axes parallèles* projetés en O et O′ sur le plan de notre épure, ces roues, ainsi que les *dents* dont elles sont armées, se composent de tranches cylindriques plus ou moins épaisses, mais dont les génératrices sont parallèles aux axes : dès-lors ces dents se projetteront suivant des courbes ou *profils* qu'il suffira évidemment d'assigner, pour que la forme totale de la roue soit bien définie. Nous ferons donc abstraction des épaisseurs, et nous n'aurons à nous occuper que des profils situés dans le plan de l'épure. Cela posé, d'après les notions préliminaires développées aux nos **806** et **808**, on sait qu'il faudra commencer par diviser l'intervalle OO′ en deux parties OA = R, O′A = R′, qui soient en raison inverse des vitesses *angulaires* (n° **805**) ω et ω' que l'on veut imprimer aux deux roues : puis, avec ces rayons, on tracera les cercles *primitifs* $\alpha\mathcal{E}$ et $\alpha'\mathcal{E}'$, dont les circonférences devront prendre des vitesses absolues qui soient *égales;* c'est-à-dire que des arcs égaux AA′ et aa' devront passer par la ligne des centres OO′, dans un même temps.

836. Maintenant, choisissons deux nombres *entiers* quelconques n et n', qui soient en raison inverse des vitesses angulaires ω et ω', c'est-à-dire tels que l'on ait

$$n:n'::\omega':\omega::R:R';$$

puis, partageons le cercle primitif $\alpha\mathcal{E}$ en n parties égales AA′, A′A″, A″A‴,..... et le cercle $\alpha'\mathcal{E}'$ en n' parties égales aa', $a'a''$, $a''a'''$,.... Ces divisions auront aussi la même longueur absolue dans les deux cercles; car, d'après la proportion précédente, on a évidemment

$$\frac{2\pi R}{n}=\frac{2\pi R'}{n'},\quad \text{ou}\quad AA'=aa';$$

de sorte que, par la révolution des deux cercles, les points A′ et a', A″ et a'',..... arriveront en même temps sur la ligne des centres OO′. Ensuite, nous subdiviserons chacune des *divisions* précédentes en deux parties inégales, en prenant les arcs AB, A′B′, A″B″,..... égaux entre eux, mais un tant soit peu moindres que la moitié de AA′; ces arcs partiels formeront la *base* de

chaque dent ou le *plein* de la roue, tandis que les arcs AB′, A′B″,..... seront le *creux* ou l'*intervalle* entre deux dents consécutives. On opérera de même sur le cercle primitif $\alpha'\mathcal{G}'$, où *ab*, *a′b′*,..... seront les bases des dents de cette roue, un peu plus petites que les intervalles *ba′*, *b′a″*,..... Cette différence est nécessaire pour *le jeu* qui doit exister toujours dans l'engrenage, comme nous le montrerons plus loin (n° **842**).

837. Si l'on veut estimer l'amplitude de ce jeu avec précision, appelons B et B′ les bases AB et *ab* qui peuvent être inégales, I et I′ les intervalles, et nous aurons

$$B + I = \frac{2\pi R}{n} = \frac{2\pi R'}{n'} = B' + I';$$

d'où l'on conclut pour le jeu

$$J = I - B' = I' - B = \frac{2\pi R}{n} - (B + B'),$$

c'est-à-dire *la longueur commune des divisions moins la somme des bases.* Si les bases sont égales sur les deux roues, l'amplitude du jeu sera l'excès d'un intervalle sur une base; mais, dans tous les cas, il faut que ce jeu reste compris entre *un douzième* et *un vingtième* de la longueur constante AA′ des divisions primitives, afin de ne pas trop diminuer l'épaisseur des dents, et conséquemment la résistance dont elles sont susceptibles; et aussi pour rendre moins sensibles les chocs alternatifs qui se manifestent souvent lorsque les deux roues, tout en continuant de marcher dans le même sens, éprouvent des variations dans leurs vitesses, produites par des causes accidentelles.

Tous les détails qui précèdent sont communs aux différents genres d'engrenage, et ceux-ci ne diffèrent entre eux que par la forme du profil des dents; mais dans tous les cas, pour remplir la condition essentielle (n° **806**) que des arcs égaux AA′ et *aa′* passent en même temps par la ligne des centres, il faudra se rappeler que les profils correspondants ZAF et *zaf* doivent être, l'un par rapport à l'autre, *enveloppe* et *enveloppée* (n° **808**), et qu'on peut choisir à volonté un de ces deux profils, en satisfaisant toutefois à la restriction indiquée au n° **830**.

838. ENGRENAGE A FLANCS, *symétrique et réciproque.* Ici nous adopterons pour profil de chaque dent de la roue O′, un rayon tel que O′*a*; et dès-lors le profil correspondant AZ sur la roue O, devra être un arc de l'épi- FIG. 14.

cycloïde engendrée par le point a du cercle V′ décrit sur le diamètre O′a, lequel cercle roulerait sur la circonférence O; car on a vu (nº **826**) que cette épicycloïde était l'*enveloppe* de toutes les positions que prend le rayon O′a pendant la rotation du cercle O′. On tracera donc cet arc AZ par le procédé du nº **471** ou par celui du nº **472**, et on le terminera au point Z où il coupera le rayon OZ mené par le milieu de la base AB : puis, on transportera ces résultats symétriquement à gauche de ce rayon OZ, pour obtenir le profil opposé BZ; car ici l'engrenage est *symétrique*, c'est-à-dire destiné à tourner également de droite à gauche comme de gauche à droite; tandis que si la roue O ne devait jamais *mener* que dans le second sens, la forme du profil BZ resterait arbitraire (*).

839. On donne le nom de *flanc* à la partie plane de la dent, dirigée suivant le rayon O′a; et comme il n'y a qu'une faible portion de ce rayon qui soit touchée et conduite par l'arc épicycloïdal AZ, il importe de savoir trouver l'étendue précise af que doit avoir le flanc. Or, d'après ce que nous avons dit au nº **833**, il faudra décrire avec la distance OZ pour rayon, un arc de cercle qui transportera l'extrémité Z en m sur la circonférence V′; puis, ramener ce point m en f par un arc de cercle décrit du centre O′.

840. Ordinairement, on rend cet engrenage *réciproque*, en prolongeant le profil ZA dans l'intérieur de la roue O par un flanc AF, et en ajoutant à l'extérieur de la roue O′ une dent saillante azb dont le profil est formé de deux arcs d'épicycloïde, symétriques l'un de l'autre. Ici l'arc az se tracera en faisant rouler sur la circonférence O′ le cercle V décrit sur AO′ comme diamètre; et l'étendue précise AF du flanc qui sera conduit par l'arc az, s'obtiendra (nº **833**) en décrivant du point O′ l'arc de cercle zM terminé à la circonférence V; puis, en ramenant le point M en F par un arc concentrique avec O.

Quand une fois on a tracé le profil FAZBE sur un carton que l'on découpe le long de ce contour, cela forme un panneau mobile qui se transporte sur les autres bases A′B′, A″B″,..... et au moyen duquel on trace immédiatement les profils de toutes les dents de la roue O. On opère de même pour la roue O′, en employant un panneau mobile découpé suivant le contour *fazbe*.

(*) Pour éviter toute équivoque, et ne pas tomber dans des contradictions graves sur *le sens* de divers mouvements de rotation autour d'axes différents, il faut avoir soin d'observer chacun d'eux en se plaçant sur l'axe correspondant. Ainsi, dans la *fig.* 14, si le système fonctionne dans la direction indiquée par la flèche φ, il faudra dire que la roue O tourne *de gauche à droite*, et la roue O′ *de droite à gauche*.

841. *Limite des entailles, ou Courbe de raccord entre deux profils.* A la suite des flancs AF et BE, il faut pratiquer une entaille qui permette à la dent *azb* de se mouvoir librement. Pour en déterminer les limites précises, considérons la *fig.* 15 où *le jeu* de l'engrenage *est supposé nul*, et où dès-lors la dent *azb* se trouve nécessairement en contact avec les deux profils ZAF et Z'B'E' à la fois; alors il s'agira de chercher le lieu FGE' de toutes les positions que prend le point *z* sur le cercle O mobile autour de son centre, pendant que le cercle O' tourne lui-même et entraîne le rayon O'*z* autour du point fixe O'. Or, d'après les considérations exposées au n° **809**, cette courbe FGE' est la même que celle qui serait décrite par le point *z* dans l'hypothèse où le cercle O' *roulerait* sur le cercle O entièrement immobile : mais ce dernier genre de rotation produit une épicycloïde allongée dont nous avons donné la construction au n° **473**; c'est donc une portion du *nœud* de cette épicycloïde qu'il faudra prendre pour le contour F*z*E', et cet arc se raccordera complétement avec les deux flancs AF et BE'. En effet, si nous considérons (*fig.* 16) la dent *azb* parvenue dans la position où elle va cesser d'être en prise, et où l'extrémité du flanc AF est touchée par le dernier élément de l'arc *az*, alors la normale commune à cette enveloppée et à cette enveloppe est la droite FD (n° **810**); mais en regardant le point *z* comme ayant décrit dans le même temps l'épicycloïde rallongée E'GF, la droite FD sera aussi (n° **470**) normale à cette dernière courbe; d'où l'on conclut que l'épicycloïde E'GF est bien tangente au flanc AF, et semblablement elle touche l'autre flanc B'E' au point E'. Fig. 15.

842. Ce que nous venons de dire suppose que la base *ab* de chaque dent égale précisément l'intervalle AB'; mais cette hypothèse ne doit jamais être admise dans la pratique, car il en résulterait sur chaque face *bz* des dents en prise, un contact inutile pour la poussée, et par suite des frottements qui diminueraient notablement l'effet utile de la force motrice : d'ailleurs, la moindre irrégularité dans les profils arrêterait le mouvement de la machine, ou exposerait les dents à se briser. Il faut donc toujours admettre un certain *jeu*, dont nous avons indiqué les limites au n° **837**; et dans ce cas, qui est celui de la *fig.* 14, l'épicycloïde FG n'ira plus rejoindre le flanc B'E', et on devra la terminer à Fig. 14.
son sommet G situé sur la circonférence décrite avec le rayon OL qui se trouve en prenant O'L = O'*z*; puis, comme il faut pourvoir au cas où une cause accidentelle venant à ralentir la vitesse de rotation de la roue *menante*, il arriverait que le profil *faz* marcherait à vide, tandis que la poussée s'exercerait entre les faces *ebz* et Z'B'E', on devra tracer aussi l'épicycloïde allongée E'H' symétri-

que de FG (*); et l'ensemble de ces deux branches réunies par un très-petit arc de la circonférence OL, composera le contour FGH'E' de l'entaille rigoureusement nécessaire pour que la pointe z se meuve librement, soit dans les petites vacillations que permet le jeu, soit dans le cas où la roue O devrait *mener* à gauche comme à droite.

On déterminera semblablement le contour $elg'f'$ de l'entaille à pratiquer dans la roue O' pour laisser un libre passage à la dent A'Z'B', en le composant de deux branches d'épicycloïdes rallongées, décrites par l'extrémité du rayon OZ' lorsque celui-ci est entraîné par le roulement du cercle O sur le cercle O'; et ces deux branches se raccorderont avec un petit arc de la circonférence dont le rayon sera O'l, lequel se détermine en prenant la distance $Ol = OZ'$.

Fig. 14. **843.** Au lieu de s'en tenir à ces limites rigoureuses, il faut toujours, dans la pratique, creuser l'entaille un peu plus profondément; et pour simplifier les procédés d'exécution, on se contente ordinairement de prolonger les flancs jusqu'à la circonférence OL, dont le rayon se trouve en prenant $O'L = O'z$; de sorte que l'entaille est terminée carrément, comme on le voit en $F''G_2H_2E''$. En outre, comme des parties aiguës ou des arêtes vives exposent à des arcboutements, ou entament les surfaces contre lesquelles elles glissent sous l'effort d'une grande pression, ce qui altère la courbure primitive des profils et augmente les frottements, on est dans l'usage de retrancher la portion de chaque dent qui avoisine la pointe Z, comme on le voit en B_4XYA_4, en prenant soin d'adoucir l'arête vive qui résulterait de cette troncature au moyen d'un cercle concentrique avec O. Les dents sont dites alors *échanfrinées ;* et en opérant de même sur la roue O', on pourra donner aux entailles des deux roues un peu moins de profondeur que ne l'indiquent les circonférences OL et O'l.

844. Pour fixer convenablement le rayon du cercle XY qui détermine l'*échanfrinement*, il faut satisfaire à la condition suivante : *lorsque deux dents se touchent en* A *sur la ligne des centres* OAO', *il doit y avoir, après cette ligne, dans le*

(*) Ces deux arcs FG et E'H' n'appartiennent pas à la même épicycloïde rallongée; car, pour avoir le sommet G de la première, il faudrait porter sur la circonférence $\alpha\delta$, à partir du point A, un arc égal à la moitié ak de ab; puis, tirer le rayon Ok' qui couperait la circonférence OL au point demandé G. Tandis que pour l'autre épicycloïde E'H', il faudra porter l'arc bk sur le cercle $\alpha\delta$, mais à partir du point B', en faisant *jouer* les deux roues pour mettre en contact le profil bz avec l'origine B' du flanc B'E'.

sens du mouvement, un autre couple de dents Z′ *et* z′ *qui soient encore en prise à cet instant-là.* Or, comme l'épicycloïde A′Z′ touche le flanc $a'f'$ en un point x qui se trouve en abaissant du point A une perpendiculaire Ax sur ce flanc (n° **810**), il suffira donc de tirer cette normale, et de prendre la distance Ox pour le rayon du cercle XY.

S'il arrivait que la normale Ax abaissée sur le flanc $a'f'$, allât tomber au-dessus du point f', cela indiquerait que les dents sont trop écartées pour remplir la condition énoncée ci-dessus; et alors il faudrait augmenter les nombres n et n', en diminuant la grandeur des divisions égales AA′ et aa'. Nous reviendrons sur cette circonstance au n° **879**.

845. *Méthode approximative.* De la condition précédente on a déduit un procédé fort simple, mais dont l'exactitude n'est qu'approchée, lequel consiste à remplacer le profil épicycloïdal A′Z′ par un arc de cercle qui passe par le point x indiqué ci-dessus, et qui touche en A′ le flanc rectiligne A′F′O : il sera bien facile de trouver le centre de cet arc circulaire que l'on devra terminer en x, en échanfrinant la dent comme précédemment. Cette méthode, qui doit être proscrite quand il s'agit d'une machine de précision, peut être employée dans une machine de force où les mouvements sont régularisés par des *volants;* surtout lorsque les dents de la roue sont assez rapprochées pour que les portions de profil B_4X, A_4Y, qui restent après l'échanfrinement, ne dépassent pas 4 ou 5 centimètres. FIG. 14.

846. Et même quand un dessin a pour objet, non pas de servir à exécuter une machine dans ses vraies dimensions, mais seulement de faire connaître la disposition de ses diverses parties, on se contente de figurer les dents en décrivant un cercle qui ait pour centre le milieu ω de l'arc B_7A_8, et pour rayon l'une des deux distances égales ωB_7 ou ωA_8; alors ce cercle fournit d'un seul coup les deux profils opposés B_7X_7 et A_8Y_8 avec une approximation suffisante pour l'indication qu'on a en vue.

847. Dans notre épure, la petite roue O′ est supposée pleine, et on la nomme *un pignon.* La grande roue O est évidée, afin de la rendre plus légère : N représente la *jante* qui est reliée par des *croisillons* P, P′,.... avec le *moyeu;* celui-ci est projeté entre les deux cercles OQ et OS dont le dernier indique le vide destiné à recevoir l'*arbre* de la roue; et cet arbre se fixe dans le moyeu au moyen de deux *clefs* que l'on introduit dans les entailles T, T′. Enfin, W est une *frette* ou anneau de fer qui entoure le bout saillant du moyeu, pour le fortifier et empêcher qu'il n'éclate.

848. *Remarque.* Si après avoir construit cet engrenage, on avait besoin plus

tard de changer le rapport des vitesses angulaires, et qu'on voulût conserver intacte la roue O, en substituant seulement à O' une nouvelle roue O'' d'un rayon différent, on sait (n° **808**) qu'il faudrait adopter pour le profil de chaque dent de O'', l'enveloppe de l'espace qui serait parcouru par le contour ZAF dans l'hypothèse où le cercle O roulerait sur la circonférence O''. Or, comme la portion ZA de ce contour est déjà une épicycloïde engendrée par le roulement du cercle V' sur O, on a vu (n° **828**) que son enveloppe était une autre épicycloïde produite par le même cercle V' roulant dans l'intérieur de la circonférence O'' : ce sera donc cette épicycloïde intérieure qui remplacera ici le flanc *af*; et quant à la partie de rayon AF, son enveloppe sera encore (n° **826**) une épicycloïde engendrée par le roulement du cercle V sur la circonférence O''. Ainsi la dent de cette nouvelle roue n'aurait pas de *flanc rectiligne;* et son profil entier se composerait de deux arcs appartenant aux épicycloïdes produites par les cercles V' et V qui rouleraient à l'intérieur et à l'extérieur du cercle O'' : le tracé serait donc moins simple qu'à l'ordinaire, mais il offrirait l'avantage de faire servir la roue O déjà construite.

Pl. 67, Fig. 17. **849.** Engrenage a flancs, *symétrique, mais non réciproque.* La grande roue O pourrait seule porter des dents proprement dites, c'est-à-dire des saillies en dehors du cercle primitif $\alpha\beta$, tandis que le pignon n'aurait que des flancs *af*, *be*, dirigés suivant des rayons dans l'intérieur du cercle primitif $\alpha'\beta'$. L'étendue de ces flancs s'obtiendra comme au n° **839**, en ramenant le point Z en *m* sur la circonférence V' au moyen d'un arc décrit du centre O, puis en décrivant du centre O' l'arc de cercle *mfe*; ensuite, on prolongera ces flancs pour former une entaille terminée carrément à la circonférence O'*g* dont le rayon doit être au plus égal à la différence des distances OO' et OZ (n° **843**). Quant à la roue O, elle n'aurait à la rigueur ni flancs, ni creux; mais comme il est toujours prudent de laisser un peu de jeu pour éviter les frottements que produirait un déplacement accidentel, on entaillera cette roue dans le sens des rayons jusqu'à une profondeur de 1 ou 2 centimètres, indiquée par le cercle GH.

850. Ici c'est la roue qui devra *mener* le pignon. En effet, on voit bien que l'épicycloïde AZ commence à toucher le flanc *af* au point *a*, lorsque ce flanc coïncide avec la ligne des centres OO', et qu'après cette ligne dans le sens du mouvement, le contact *x* avec le rayon O'*a'* se rapproche du centre O'; donc, à gauche de OO', le profil A_2Z_2 n'aura aucun point de commun avec le flanc O'a_2, lequel ne serait touché que par la branche d'épicycloïde symétrique de A_2Z_2. Il résulte de là que, quand c'est la roue qui conduit le pignon, les dents

ne sont jamais en prise qu'*après la ligne des centres* OO', dans le sens du mouvement; ce qui présente un avantage important pour la pratique, comme nous l'expliquerons au n° **875**. Dans la *fig.* 14, il y avait poussée avant comme après la ligne des centres, attendu que la petite roue était elle-même armée de dents saillantes en dehors du cercle primitif $\alpha'\mathcal{E}'$.

851. CRÉMAILLÈRE *mue par une roue dentée.* Si dans l'engrenage précédent, on suppose que la roue O' acquière un rayon infini, le cercle primitif $\alpha'\mathcal{E}'$ se changera en une droite tangente à la circonférence $\alpha\mathcal{E}$ de la roue O; et la rotation de celle-ci imprimera un mouvement rectiligne à la pièce droite XY, nommée *crémaillère*, laquelle est maintenue dans cette direction par des *coulisses* ou des *guides*. Ici, sans s'occuper du rapport des vitesses angulaires dont une est zéro, il faudra partager la circonférence $\alpha\mathcal{E}$ en un certain nombre de parties égales AA', A'A",...; puis, reporter la longueur rectifiée d'une de ces divisions suivant *aa'*, *a'a"*,... FIG. 18.

Le profil AZ de la dent de la roue, devra être une *développante* de cercle engendrée par le roulement de la droite $\alpha'\mathcal{E}'$ sur la circonférence $\alpha\mathcal{E}$; car cette droite est ce que devient ici le cercle V' de la *fig.* 17, lequel avait pour diamètre le rayon du cercle O' qui est infini dans le cas actuel. Par la même raison, les flancs de la crémaillère seront des droites *ag*, *bh*,... perpendiculaires à $\alpha'\mathcal{E}'$, et on les prolongera jusqu'à une droite *ghg'* parallèle à $\alpha'\mathcal{E}'$, et menée à une distance O*g* égale au moins à OZ : ou plutôt, ces droites *ag*, *bh*,.... ne servent qu'à former les entailles nécessaires pour le libre passage des dents, car ici les flancs de la crémaillère se réduisent à *un point unique*. En effet, la tangente $\alpha'\mathcal{E}'$ étant normale (n° **479**) à toutes les développantes AZ, A'Z', A"Z",.., c'est précisément aux points *a*, *a'*, *a"*,.... que seront placés les contacts de ces profils avec les flancs *ag*, *a'g'*, *a"g"*,.... D'ailleurs, la roue O n'aurait pas besoin de creux, à parler rigoureusement, puisque les faces *ab*, *a'b'*,.... se trouvent tangentes à la circonférence $\alpha\mathcal{E}$; mais, comme il faut éviter les frottements, on entaillera la roue suivant le contour AGH'B', jusqu'à une profondeur d'un centimètre environ. Ici les dents ne seront en prise qu'après la ligne des centres.

852. On peut aussi armer la crémaillère de dents saillantes *azb*, *a'z'b'*,.... qui conduiront des flancs AF, A'F', taillés dans l'intérieur de la roue suivant ses rayons; et puisque c'est le cercle V décrit sur AO comme diamètre qui, en roulant sur la circonférence $\alpha\mathcal{E}$, produirait l'épicycloïde rectiligne AF, c'est aussi ce même cercle V qu'il faudra faire rouler sur la droite $\alpha'\mathcal{E}'$ pour obtenir l'enveloppe *az* (n° **827**) : cette dernière courbe sera donc une *cycloïde* ordi- FIG. 19.

naire qui se construira comme au n° **478**. Pour fixer l'étendue précise du flanc AF qui sera touché par l'arc az, on opérera comme dans l'épure 14 dont celle-ci n'est qu'un cas particulier, en transportant le point z en M sur la circonférence V, au moyen d'une parallèle à $\alpha'\mathcal{E}'$ (n° **840**); puis, on décrira du centre O l'arc de cercle MEF. Enfin, on prolongera le flanc AF jusqu'à la circonférence GH'G' décrite avec un rayon OG déterminé par la parallèle MGz; car cette limite rigoureuse deviendra suffisante dans la pratique, attendu qu'il faudra échanfrincr les dents de la crémaillère, pour éviter les arcs-boutements que produiraient les dents en prise avant la ligne des centres (n° **877**).

853. Une autre combinaison qui serait encore admissible, consisterait à supprimer les dents de la roue en ne lui laissant que des flancs, tandis que la crémaillère n'aurait point de flancs et porterait elle seule des dents cycloïdales; mais il nous paraît bien superflu de tracer ici une figure nouvelle pour ce cas particulier.

Fig. 20. **854**. Engrenage a flancs, *intérieur*. Lorsque le plus petit cercle O'$\alpha'\mathcal{E}'$ doit être placé dans l'intérieur du grand O$\alpha\mathcal{E}$, la meilleure disposition consiste à mettre les flancs af, be, $a'f'$,.... sur la petite roue, et à faire porter les dents AZB, A'Z'B',..... par la plus grande. Le profil AZ est alors une épicycloïde intérieure (n° **474**) décrite par le cercle V' qui roule en dedans de la circonférence $\alpha\mathcal{E}$; et l'étendue précise du flanc af s'obtiendra encore en décrivant du centre O l'arc Zm, puis du centre O' l'arc mf. Quant à la profondeur de l'entaille, elle devra s'étendre jusqu'à la circonférence ghg' dont le rayon sera déterminé par le cercle mZ. La roue *menante* devra être celle qui porte les dents, par les motifs déjà expliqués au n° **850**, afin que la poussée ne s'exerce qu'après la ligne des centres.

Fig. 21. **855**. Si, au contraire, on voulait faire porter les dents par la petite roue O'$\alpha'\mathcal{E}'$, et placer les flancs sur la grande roue $\alpha\mathcal{E}$ dont le centre est fictivement représenté par O (car il tombe réellement hors des limites de la *fig.* 21), il faudrait, pour tracer le profil az, décrire un cercle VSA dont le rayon VA serait la moitié de OA, et faire rouler ce cercle V sur la circonférence $\alpha'\mathcal{E}'$ qu'il enveloppe, ce qui fournirait une épicycloïde du genre de celle que nous avons considérée au n° **477**. Quant au flanc FAG, il devrait d'abord s'étendre de A en G jusqu'à la circonférence GH'G' décrite avec le rayon OO' + O'z, afin de laisser un libre passage à la dent azb; et ensuite on devrait le prolonger vers le centre de A en F, pour recevoir la poussée du profil az. En effet, si d'après la règle générale du n° **833**, on veut trouver quel est le

point de l'enveloppée AO qui viendra en contact avec le point z de l'enveloppe az, il faudra transporter le point z en M, sur la circonférence V, au moyen d'un arc zM décrit du centre O'; puis, ramener le point M en F par un arc MEF décrit du centre O. Ainsi AF, A_2F_2,..... seront les seules portions des flancs sur lesquelles s'exercera la poussée des dents; et tandis que le contact x s'avancera de a_2 vers z_2 sur la petite roue, sur la grande il marchera en sens contraire de A_2 vers F_2; de sorte que le chemin total parcouru par ce contact étant plus grand que dans les autres cas, le frottement augmentera considérablement.

Mais il y a encore un autre inconvénient plus grave, résultant de l'entaille qu'il faut pratiquer dans la petite roue pour permettre au flanc AF de tourner librement. Car, pendant la révolution des deux cercles O et O' autour de leurs centres immobiles, la courbe parcourue par le point F sur le petit cercle mobile est la même (n° **809**) que celle qu'il décrirait sur le plan fixe de ce cercle, si l'on faisait rouler la circonférence $\alpha\mathfrak{G}$ sur $\alpha'\mathfrak{G}'$; donc cette courbe est une épicycloïde à nœud $\theta\lambda F\mu z$ qui viendrait raccorder en z le profil az, comme nous l'avons prouvé dans un cas semblable au n° **841**. Par conséquent il faudra évider la roue O' suivant le contour $F\lambda\theta$, lequel enlèvera une petite portion du profil az; d'où il résultera que la dent azb ne commencera à être en prise qu'un peu après la ligne des centres. Mais ce qui est bien plus grave, c'est que la base de la dent se trouvera tellement affaiblie par cette entaille, qu'elle n'offrira plus de résistance suffisante; et conséquemment le système d'engrenage représenté dans le *fig.* 21, doit être proscrit dans la pratique.

856. *L'engrenage intérieur ne peut pas être* RÉCIPROQUE; c'est-à-dire qu'il est impossible de donner à chaque roue des dents et des flancs à la fois. En effet, si l'on superpose les *fig.* 20 et 21 de manière à faire coïncider les deux rayons désignés par O'a, on verra bien que le profil AZ serait recouvert par le flanc AF, et qu'il faudrait détruire ce dernier pour pouvoir exécuter l'autre : de même, dans la roue O', le flanc af ne peut coexister avec l'entaille $a\lambda$F.

857. ENGRENAGE A LANTERNE. On désigne sous ce dernier nom une espèce de tambour composé de deux *tourteaux* ou plateaux circulaires, égaux, parallèles, et réunis par des cylindres droits, nommés *fuseaux*, dont les bases sont les cercles c, c', c''; les centres de ces petits cercles sont situés tous sur une circonférence $\alpha'\mathfrak{G}'$ qui forme le *cercle primitif* de cette espèce de roue, et la *fig.* 22 PL. 67, FIG. 22.

représente une *coupe* faite entre les deux plateaux par un plan qui leur est parallèle; c'est pourquoi les cercles c, c', c'',.... sont couverts de hachures. Cette lanterne est mise en mouvement par une roue O dont le *cercle primitif* est $\alpha\mathfrak{G}$; les dents de celle-ci sont ordinairement taillées à part et ensuite implantées dans le corps de la roue : alors on les nomme des *alluchons*, lesquels s'exécutent en bois très-dur, tandis que les fuseaux qui s'usent plus vite par le frottement, sont quelquefois en fonte. Ce genre d'engrenage ne s'emploie que pour de fortes machines où l'on n'a pas besoin d'une grande précision dans les mouvements; car il n'offre pas autant de douceur et de régularité que l'engrenage à flancs.

Après avoir choisi (nº **856**) deux nombres entiers n, n', qui soient entre eux comme les rayons des circonférences $\alpha\mathfrak{G}$, $\alpha'\mathfrak{G}'$, on divisera la première en n parties égales AA', A'A'',...., la seconde en n' parties égales aa', $a'a''$,....; d'où il résultera aussi AA'$=aa'$: on marquera les bases des dents AB, A'B',.... égales au plus à la moitié d'une division AA'; puis, en prenant un arc ac plus petit que le quart de la division aa', on emploiera la corde de cet arc pour décrire tous les cercles c, c', c'',.... qui seront les bases des fuseaux. Cela fait, comme le profil AZ doit être l'enveloppe (nº **808**) de l'espace qui serait parcouru par le cercle c dans l'hypothèse où la circonférence $\alpha'\mathfrak{G}'$ roulerait sur $\alpha\mathfrak{G}$ immobile, on observera d'abord que le point c décrirait alors une épicycloïde cl facile à construire (nº **471**); si donc, de divers points de cette épicycloïde et avec un rayon constamment égal à la corde ca, on décrit plusieurs arcs de cercle, il suffira de tracer une courbe AZλ qui leur soit tangente, pour obtenir le profil demandé par un moyen plus expéditif que la construction par points indiquée au nº **823**.

858. Cette branche AZλ de l'enveloppe du petit cercle c, se prolongerait dans l'intérieur de la circonférence $\alpha\mathfrak{G}$ jusqu'à un point de rebroussement indiqué par ε' dans la *fig.* 10 de la *Pl.* 65; et comme à l'époque où l'enveloppée toucherait l'enveloppe en ce point ε', l'axe c du fuseau aurait déjà dépassé la ligne des centres OO', rien ne s'opposerait à ce que l'on gardât ce prolongement de AZλ : mais, pour plus de facilité dans la pratique, on termine ce profil au point δ' qui répond à A sur la *fig.* 22, et pour lequel le contact arrive quand ce point A est parvenu sur la droite OO' (nº **825**). Ainsi, dans l'engrenage à lanterne, les dents ne seront jamais en prise avant la ligne des centres.

859. Quant à l'entaille nécessaire pour que les fuseaux se meuvent librement, on pourrait lui donner pour contour le demi-cercle décrit sur la corde

de l'arc AB' comme diamètre; mais on se contente ordinairement de tracer la portion de rayon AG un peu plus grande que la corde *ac*, et de décrire du point O l'arc de cercle GH' terminé aussi au rayon B'H'. Il est vrai que la droite AG n'est pas rigoureusement tangente au profil AZ, puisque la normale commune à cette courbe et à l'épicycloïde *cl*, serait la corde *ac* (nº **823**); mais l'arête saillante qui en résultera en A sera très-obtuse, et d'ailleurs on pourra l'adoucir, sauf à ce que la dent ne commence à se trouver en prise qu'un peu plus tard.

860. Il est bon d'échaufriner les dents, mais sans cesser de remplir la condition du nº **844**, afin que le mouvement se continue sans *à-coups*. Pour cela, on tirera la droite A*c*' qui était normale (nº **823**) à l'enveloppée *c'α'b'* et à l'enveloppe A'Z', déterminera leur point de contact *x* : et alors il suffira de prendre un rayon un peu plus grand que O*x* pour décrire la circonférence à laquelle commencera l'échanfrinement. Si cette normale A*c*' fournissait un point *x* qui fût au-dessus de la section Z' des deux profils symétriques, les fuseaux seraient trop écartés pour remplir la condition du nº **844**; et dans ce cas, il faudrait augmenter leur nombre *n*' en faisant aussi varier le nombre *n* des dents de la roue, de manière que le rapport des nombres *n* et *n*' restât toujours le même que celui des rayons R et R' des cercles primitifs $\alpha\beta$ et $\alpha'\beta'$.

861. CRÉMAILLÈRE A FUSEAUX. Lorsque le rayon R' devient infini, le cercle primitif $\alpha'\beta'$ se réduit à une droite, et la lanterne devient une crémaillère XY. Dans ce cas, la courbe *cl* décrite par la droite $\alpha'\beta'$ roulant sur $\alpha\beta$, étant une développante de cercle, la courbe équidistante AZ sera aussi une développante de $\alpha\beta$, engendrée par le point *a*; de sorte qu'on peut tracer immédiatement cette dernière, sans recourir à *cl*. L'entaille AGH'B' s'exécutera comme ci-dessus; et ici la normale A*c*' coïncidant toujours avec $\alpha'\beta'$, les points de contact *x* de tous les profils des dents, se trouveront constamment sur la ligne $\alpha'\beta'$; donc, pour échanfriner les dents, il suffira de tracer une circonférence avec un rayon un peu plus grand que O*x*. FIG. 23.

862. CRÉMAILLÈRE *avec une* LANTERNE. Si, dans la *fig*. 22, on supposait au contraire le rayon R infini, la roue O deviendrait une crémaillère armée de dents qui conduiraient la lanterne O'. Dans ce cas, la courbe *cl* serait une *cycloïde* ordinaire décrite par le point *c* du cercle $\alpha'\beta'$ qui roulerait sur la ligne $\alpha\beta$ devenue droite; et le profil AZ devant être une courbe équidistante de cette cycloïde, on le construirait par des arcs de cercle, comme au nº **857**. FIG. 22.

PL. 68, FIG. 24. **863**. ENGRENAGE A DÉVELOPPANTE. Après avoir déterminé, comme au n° **836**, les divisions égales AA′, aa', ainsi que les bases des dents AB, ab, sur les cercles primitifs $\alpha\mathcal{E}$, $\alpha'\mathcal{E}'$, dont les rayons sont représentés par R, R′, on tracera par le point A une droite TAT′ faisant un angle arbitraire avec la ligne OAO′; et des centres O, O′, on décrira deux nouveaux cercles CD, C′D′ tangents à cette droite TAT′ : les rayons de ces cercles *auxiliaires* se trouveront évidemment proportionnels à R et R′. Cela posé, en faisant rouler la droite TAT′ sur la circonférence CD, le point A décrira une courbe FAZ développante de ce cercle; et la même droite roulant ensuite sur C′D′, le point a décrira aussi une développante faz de cette dernière circonférence. Or on a vu (n° **829**) que ces deux courbes FAZ et faz étaient respectivement enveloppe et enveloppée; donc (n° **808**) ce sont là les profils conjugués qu'il faut adopter pour les dents, afin qu'il passe par la ligne des centres, dans le même temps, des arcs égaux AA′ et aa' mesurés sur les cercles primitifs.

864. Pour échanfriner les dents, en satisfaisant à la condition du n° **844**, on observera qu'ici le point x où la droite AT′ rencontre la développante $a'z'$, est précisément le pied de la normale abaissée du point A sur cette courbe; donc il faudra prendre le rayon du cercle d'échanfrinement au moins égal à Ox. De même, pour les dents de la roue O′, le rayon analogue devra égaler ou surpasser un peu la distance O′x'. Quant à l'entaille nécessaire pour donner passage aux dents, après avoir continué la développante ZAF jusqu'à son origine F sur le cercle auxiliaire, on prolongera cette courbe (s'il le faut) suivant un rayon FGO, jusqu'à une profondeur telle que OG soit un peu moindre que la différence entre O′O et O′z; semblablement, pour le creux de la roue O′, le rayon O′g du fond de l'entaille devra être un peu moindre que la différence entre OO′ et OZ. On doit observer qu'ici les dents seront en prise tant avant qu'après la ligne des centres; à moins qu'on ne réduisît les dents de la roue *menée* O′ à ne pas dépasser le cercle primitif, suivant la forme $gabh$: mais alors l'engrenage ne serait plus réciproque.

865. Quoique nous ayons laissé arbitraire l'angle TAO $= \varphi$ formé par la tangente aux cercles auxiliaires avec la ligne des centres, il est convenable que cet angle soit au moins égal aux trois quarts d'un angle droit, afin que les entailles à pratiquer dans les deux roues n'aient pas trop de profondeur. En outre, nous ferons observer que ce système d'engrenage est souvent préféré par les constructeurs modernes, à cause des deux avantages suivants :

1°. La largeur des dents va toujours en augmentant jusqu'à l'extrémité inférieure EF, ce qui les rend susceptibles d'une plus grande résistance; tandis

que, dans la *fig.* 14, les flancs convergent vers le centre, et la base des dents se trouve quelquefois bien affaiblie.

2°. Quand un engrenage à développante est exécuté, on peut diminuer ou augmenter d'une petite quantité la distance OO′ primitivement adoptée pour l'écartement des axes, sans que le système cesse de fonctionner aussi régulièrement; et cela est précieux dans la pratique où il est souvent très-difficile de placer les axes rigoureusement à la même distance qu'on a supposée dans l'épure. Pour justifier cette latitude, imaginons que, dans la *fig.* 24, on ait abaissé le centre O avec les cercles $\alpha6$ et CD, et qu'ils aient pris les positions O_1, $\alpha_1 6_1$, C_1D_1 (le lecteur les tracera aisément); alors, si l'on mène une tangente commune aux deux circonférences C_1D_1, C′D′, cette droite coupera la ligne des centres en un point A_1 qui divisera la distance O_1O' en deux parties dont le rapport sera encore le même que celui des rayons des circonférences C_1D_1 et C′D′. D'ailleurs cette nouvelle tangente, en roulant tour à tour sur ces deux circonférences, décrira par le point A_1 les mêmes développantes AZ et az qui formaient déjà les profils des dents de l'engrenage primitif; seulement ces développantes se toucheront par d'autres points correspondants que dans la première position de l'engrenage. Donc le nouveau système fonctionnera comme l'ancien, et en produisant des vitesses angulaires qui auront le même rapport que dans le premier cas.

866. CRÉMAILLÈRE *à dents obliques*. Lorsque, dans la figure précédente, on suppose que le cercle primitif $\alpha'6'$ acquiert un rayon infini, ce cercle se change en une droite et la roue O′ en une crémaillère XY à dents obliques, dont les profils gaz, $g'a'z'$,.... sont des droites perpendiculaires à TT′; car le cercle auxiliaire C′D′ ayant pour rayon la perpendiculaire abaissée du centre O′ sur TT′, vient se confondre avec cette dernière droite; et comme le point de contact s'éloigne en même temps à l'infini, si l'on veut faire rouler la droite TT′ sur cette circonférence dégénérée en ligne droite, chaque point a décrira une perpendiculaire gaz à la ligne TT′. Les contacts des dents conjuguées seront encore ici placés tous sur la droite TT′, en a, x, x'; mais la poussée s'exerçant suivant une normale à gaz, c'est-à-dire suivant TT′ qui est *oblique* à la direction XY du mouvement que doit prendre la crémaillère, il en résultera un frottement considérable dans les *coulisses* qui maintiennent cette pièce; c'est pourquoi le système de la *fig.* 25 est moins avantageux que celui de la crémaillère droite (*fig.* 18). Au surplus, cette dernière n'est qu'un cas particulier de la *fig.* 25 : celui où la droite arbitraire TAT′ serait menée à angle droit sur AO. FIG. 25.

FIG. 26. **867**. *L'engrenage à développante peut être* INTÉRIEUR; c'est lorsque les deux cercles primitifs $\alpha\mathcal{G}$, $\alpha'\mathcal{G}'$, sont embrassés l'un par l'autre. Alors, après avoir mené sous un angle arbitraire la droite TAT', et avoir tracé les deux cercles intérieurs CD, C'D', tangents à cette droite et concentriques avec O et O', il faudra encore faire rouler la droite TAT' successivement sur les circonférences CD, C'D', pour engendrer les profils GAZ et *gaz* qui seront toujours des développantes de cercle. Mais ici les deux points de contact de cette tangente commune TAT' étant d'un même côté par rapport au point A, les développantes tourneront leur concavité dans le même sens; et il en résultera un frottement beaucoup plus considérable, par suite des petites imperfections inévitables dans l'exécution des profils matériels. Aussi le système actuel, et en général tous les engrenages intérieurs, sont rarement employés dans la pratique.

Nous ajouterons seulement qu'après avoir prolongé la développante *zaf* jusqu'à son origine *f* sur le cercle C'D', on devra limiter l'autre développante ZA au point *correspondant* G; pour trouver celui-ci, il faudra (n° **854**) ramener le point *f* en *f'* sur la tangente TAT', au moyen d'un arc décrit du point O', puis transporter le point *f'* en G par un arc de cercle décrit du point O. Enfin, on prolongera le profil *zaf* suivant un rayon *fg*O', d'une quantité suffisante pour que l'entaille permette à la dent de la roue O de se mouvoir librement.

PL. **68**, FIG. 27. **868**. CAMES ET PILONS. Soit ABZ l'axe d'une tige verticale qui doit alternativement monter de la quantité AB et redescendre ensuite librement, abandonnée à son propre poids. Pour produire ce mouvement rectiligne, analogue à celui de la crémaillère du n° **851**, on emploie une roue dont l'axe horizontal est projeté en O, et dont le cercle primitif $\alpha\mathcal{G}$ est tangent à la verticale AZ; et l'on arme cette roue de *cames* ou dents AX, A_2X_2, A_3X_3, assez éloignées les unes des autres pour laisser au *pilon* le temps de retomber de B en A avant d'être saisi par la dent suivante. Le profil antérieur de ces cames doit être une développante AXY du cercle $\alpha\mathcal{G}$; car cette courbe aura la propriété (n° **851**) de toucher constamment le *mentonnet* horizontal M du pilon, dans un point qui demeurera sur la droite AZ toujours normale à la développante AXY, quelque position que prenne cette courbe pendant la rotation autour du point O. L'étendue précise AX qu'il faudra donner à ce profil pour qu'il conduise le mentonnet depuis A jusqu'en B, s'obtiendra (n° **854**) en décrivant avec le rayon OB un arc de cercle qui viendra couper la développante AY au point demandé X. On pourrait terminer la came par le rayon AO; mais pour éviter de faux contacts, hors de la verticale AZ, ce qui ferait déverser la tige et produirait des

frottements nuisibles, on échancrit la came suivant une petite courbe AD arbitraire, laquelle doit raccorder le rayon AO déjà tangent à AX.

869. Quant au mentonnet sur lequel la came exerce sa poussée dans la direction verticale AZ, c'est une pièce horizontale et rectangulaire qui, dans les anciennes machines, se fixait en avant de la tige du pilon, comme on le voit *fig.* 28; et la saillie EB devait égaler la différence entre les rayons OA et OX de la *fig.* 27 : mais comme alors la poussée de la came passait fort loin du centre de gravité du pilon, il en résultait un *couple* de forces qui tendait à déverser la tige et produisait un frottement considérable sur les *jumelles* G et *g* entre lesquelles se meut cette pièce. Pour éviter cet inconvénient grave, surtout quand le poids du pilon est considérable, on emploie ordinairement la disposition proposée par *Montgolfier*, et qui est représentée dans la *fig.* 29. Ici la tige ou le *manche* du pilon est formée de deux parties TM et T_2N, réunies par des *jumelles* latérales J et *j*; de sorte que l'intervalle de M à N offre un vide dans lequel la dent AX de la came peut pénétrer, et en agissant sur la face horizontale M qui fait l'office de mentonnet, cette came soulève bien le manche dans la direction de son axe ABZ, pour l'amener de A en B. Arrivé dans cette dernière situation, le pilon ne retombe pas encore, parce qu'il reste à la came à parcourir la demi-épaisseur du mentonnet; mais ce petit temps perdu deviendra presque insensible, en échanfrinant la dent *ax* suivant la courbe indiquée par des points ronds, ce qu'il faut toujours faire pour ne pas laisser subsister des parties aiguës ou des arêtes vives qui entameraient les surfaces et pourraient produire des arcs-boutements.

870. Une autre combinaison, indiquée *fig.* 30, est employée dans les mines où les pilons doivent avoir un poids considérable. La tige T_2 est d'une seule pièce, mais on la garnit de deux mentonnets latéraux m', m'', sur lesquels agissent les deux branches x', x'' (*fig.* 31) de la came ax qui alors est fourchue. Nous supposons ici que les trois cames projetées verticalement sur ax, a_2x_2, a_3x_3, sont fourchues et servent à faire mouvoir le manche T_2, tandis que les cames à dent unique AX, A_2X_2, A_3X_3 agissent sur le manche TMT_2; car on adapte ainsi sur le même arbre autant de rangs de cames qu'il y a de pilons à faire mouvoir, avec le soin de faire correspondre les cames de diverses séries à des rayons différents OX et Ox, afin que les tourillons ne supportent pas en même temps le poids de tous les pilons. Les trois dents de chaque série sont en fonte, et coulées d'un seul jet avec l'anneau qui réunit leurs bases; et cet anneau, polygonal à l'intérieur, s'adapte sur l'arbre de la roue qui est en bois et offre le même nombre de pans.

871. Pour maintenir les tiges des pilons toujours dans la même direction verticale, tout en leur laissant la liberté de monter et de descendre, on les enferme entre deux pièces horizontales et parallèles (G, G'), (g, G') nommées *jumelles;* et celles-ci sont reliées entre elles par des *entre-toises* qui empêchent aussi la tige de s'écarter à droite ou à gauche dans la direction de l'axe $O'O''$. Un second rang de jumelles (G_2, G''), (g_2, G''), est placé dans la partie inférieure, mais à une hauteur telle qu'il ne gêne pas la course du pilon. Les signes en forme d'X que l'on voit sur l'épure indiquent, en charpente, des bouts de pièces ou des sections faites perpendiculairement aux fibres du bois.

Pl. 64, Fig. 8. **872.** Des excentriques. Dans quelques machines, on emploie une sorte de roue dont le contour extérieur n'a pas pour centre de figure le centre du mouvement de rotation, et qui a pour but de faire alternativement monter et descendre une tige verticale AZ, mais graduellement, et non pas brusquement comme dans le cas des pilons dont nous venons de parler. Ce contour forme donc une courbe *excentrique* qui peut offrir plusieurs variétés; mais il suffira d'en citer un exemple, celui que l'on désigne sous le nom de *courbe en cœur*. Soit AA_4 la hauteur dont la tige doit monter : après avoir partagé cet intervalle en parties égales, 4 par exemple, on en fera autant pour la demi-circonférence décrite avec le rayon OA_4; puis, sur les divers rayons O1, O2, O3, on prendra les distances

$$OB = OA_1, \quad OC = OA_2, \quad OD = OA_3, \quad OE = OA_4,$$

et la courbe ABCDE, jointe à la branche symétrique AB'C'D'E, composera l'excentrique demandée. En effet, la tige AZ étant retenue dans la même direction verticale par les guides *m* et *n*, lorsqu'on fera tourner la roue autour de son axe O, et que le rayon vecteur OB aura pris la position OA_1, la poussée oblique qu'elle exerce sur la tige aura fait monter celle-ci et aura transporté son pied A en A_1, puisque ce dernier point coïncidera avec B. De même, quand le rayon OC sera devenu vertical, le pied A se trouvera transporté en A_2, et ainsi de suite jusqu'à ce que OE coïncide avec OA_4; puis, le mouvement de rotation continuant dans le même sens, la branche ED'C'B'A laissera redescendre la tige graduellement depuis A_4 jusqu'en A.

873. Ce système ne s'emploie que dans les cas où il ne faut pas exercer un grand effort sur la tige; et alors même on doit chercher à diminuer les frottements dus à la poussée oblique. Pour cela on garnit le pied de la tige d'un

galet mobile autour de l'axe horizontal A, et l'on adopte pour contour de la roue une courbe *abcded'b'a* qui soit équidistante de l'excentrique primitive; cette nouvelle courbe se trace en la rendant tangente à des arcs de cercle décrits de divers points de ABCD.... avec un rayon constamment égal à celui du galet. Par-là le mouvement rectiligne de la tige demeure le même que dans le premier cas, et au lieu d'un frottement de glissement, on n'a plus qu'un frottement de roulement, lequel est beaucoup moindre.

874. Quand on veut éviter le changement un peu brusque de vitesse qui a lieu aux points extrêmes A et A_4, on divise l'intervalle AA_4 en parties inégales, au moyen d'une demi-circonférence décrite sur cette distance comme diamètre, et que l'on partage en arcs égaux; les ordonnées de ce demi-cercle fournissent les points $A_1, A_2, A_3,....$, et la courbe ABCDE construite comme ci-dessus, ne présente plus de points saillants. Nous laissons au lecteur le soin de tracer l'excentrique dans cette nouvelle hypothèse.

875. REMARQUES. Nous avons fait observer diverses fois que pour tel système d'engrenage, la poussée des dents ne s'exerçait qu'*après la ligne des centres*, dans le sens du mouvement; tandis que pour tel autre système, il y avait des dents en prise *avant la ligne des centres*. Cette distinction est importante à faire, à cause des inconvénients graves que présente souvent le dernier de ces deux cas.

D'abord, on doit se rappeler que dans tous les engrenages examinés ci-dessus, les profils des dents ne roulent pas simplement l'un sur l'autre, mais qu'il y a aussi un glissement (n° **817**), lequel est parfois assez considérable, comme on l'a vu aux n°s **833** et **834**. De là résulte un frottement qui est proportionnel à la pression exercée par les dents l'une sur l'autre, et qui absorbe une partie de la force motrice : or cette perte de force est plus considérable pour deux dents qui sont en prise avant la ligne des centres, que pour deux dents analogues qui ne seraient en contact qu'après la même ligne. Cette proposition, que l'expérience confirme, s'établit par des principes de mécanique et par des calculs dont l'exposition nous éloignerait trop du but graphique de cet ouvrage; c'est pourquoi nous nous contenterons de la justifier par les considérations suivantes.

876. Admettons que, dans la *fig*. 32, O' soit la roue menante et qu'elle tourne dans le sens indiqué par la flèche φ". Il peut arriver, soit par suite du trop petit nombre des dents, soit par suite de quelque irrégularité dans leur exécution, qu'à une certaine époque la poussée des deux roues ne s'exerce plus que par un seul point *m* qui corresponde au dernier élément du profil *a"z"* : PL. 68, FIG. 32.

alors la pointe z'', ou plutôt l'arête vive qui est projetée sur ce point, sera comparable au tranchant d'un ciseau dont les faces seraient symétriques par rapport au plan diamétral $O'z''$. Or, tant que le mouvement a lieu dans le sens φ'', le contact marche de m vers A''; et l'angle $O'z''A''$ étant aigu, le ciseau ne fait que frotter sur la surface $G''A''z''$ et la polir sans l'entamer. Mais, si nous changeons les rôles, et que O devenant la roue menante, elle tourne dans le sens de la flèche φ, alors le tranchant du ciseau marchera de m vers G'', du côté de l'angle obtus $O'z''G''$: conséquemment il tendra à pénétrer dans la surface $A''G''$, il l'entamera légèrement et apportera beaucoup plus de résistance au mouvement de rotation de l'engrenage; quelquefois même, sous l'effort d'une grande pression, l'arête z'' pénétrera assez avant dans la surface $A''G''$ pour ne plus pouvoir se dégager, et il y aura un *arc-boutement* qui arrêtera subitement la machine ou qui fera rompre l'une des dents ainsi engagées. C'est pour cela qu'il faut toujours échaufriner les dents, et avoir soin d'adoucir encore les arêtes qui résulteraient de cette troncature.

877. Mais, lors même que ces précautions ont été prises, il reste toujours des aspérités inévitables sur le bois ou la fonte qui ont servi à former les dents; et ces aspérités produisent, quoique d'une manière moins prononcée, des effets analogues à ceux que nous avons décrits au n° précédent. D'où l'on doit conclure, conformément à l'expérience, que le frottement et la perte de force motrice sont toujours plus considérables pour deux dents qui se poussent avant la ligne des centres, que pour celles qui sont en contact après cette ligne. En outre, dans le premier de ces cas, il peut encore y avoir arc-boutement, quoique la dent $a''z''b''$ soit échanfrinée, si par quelque légère irrégularité, il arrive que la poussée des deux roues ne se fasse que par le dernier élément du profil conservé $a''z''$, et que la pression soit considérable. Ainsi nous pouvons poser ce principe général : dans tout engrenage *il faut*, autant que possible, *éviter que les dents commencent à entrer en prise avant la ligne des centres.*

878. Pour remplir cette condition, le premier moyen serait de supprimer dans une des roues, O' par exemple, toutes les portions de dents qui seraient en dehors du cercle primitif $\alpha'\mathcal{6}'$, ainsi que le montrent les *fig.* 17, 18, 20, 22, 23, et d'exiger que la roue O fût toujours la roue menante, soit à droite, soit à gauche; car alors on voit bien que la poussée ne s'exercerait jamais qu'après la ligne des centres. On pourrait obtenir le même avantage dans l'engrenage à développantes de la *fig.* 24, si l'on réduisait les profils des dents de O' aux parties intérieures *gfa*, *heb*,.... Les engrenages de ce genre, où une seule des roues peut mener, sont dits *non réciproques.*

879. Mais cette disposition offrirait des inconvénients dans les grandes machines, à mouvements rapides, à résistances très-inégales, où les vitesses sont régularisées par l'emploi des volants. Car alors, en raison des petites variations périodiques que subit la vitesse, et à cause du jeu qui doit toujours exister entre les dents (n° **837**), chacune des deux roues, tout en continuant de marcher dans le même sens, se trouve tantôt *menante* et tantôt *menée* : or, pour remplir ce double rôle, elles doivent toutes deux être armées de dents saillantes en dehors des cercles primitifs, comme on le voit dans la *fig.* 32, où l'engrenage est dit *réciproque*. Ainsi, pour conserver cet avantage sans retomber dans l'inconvénient d'avoir des contacts, tant en avant qu'en arrière de la ligne des centres, il faudra *démaigrir* les dents *du côté opposé à celui où le mouvement doit avoir lieu*, c'est-à-dire enlever les parties que nous avons couvertes de hachures dans la *fig.* 32; mais le système ne pourra fonctionner que dans un seul sens, celui qui est indiqué par les flèches φ et φ' (*).

880. *Limite du nombre des dents.* A la poussée d'un couple de dents doit succéder, sans interruption aucune, la poussée d'un autre couple, afin d'éviter les chocs rétrogrades que l'on nomme des *à-coups* : il faut donc qu'à l'instant où les deux dents GAZ et gaz commencent à se toucher sur la ligne des centres en A, les dents G'A'Z' et $g'a'z'$ du couple précédent soient encore en prise. Or, en abaissant la normale Ax sur le profil $a'g'$ (rectiligne ou non), on sait que le pied x de cette normale doit être (n° **810**) le point de contact de l'enveloppée $a'g'$ avec l'enveloppe A'Z'; si donc ce point x se trouve au-dessous du sommet Z' de la dent de la roue O, la condition demandée sera remplie; sinon, il y aurait des à-coups, et pour les éviter, il faudra rapprocher les dents en augmentant leurs nombres n et n', qui devront toujours être choisis proportionnels aux rayons R et R' des cercles primitifs. Il suit de là que le nombre n' des dents de la petite roue admet un *minimum*, qui varie avec la nature des profils et avec le rapport des vitesses angulaires; aussi, en cherchant à déterminer par le calcul la position du pied de la normale Ax, M. *Savary* a trouvé les limites suivantes, où μ désigne le rapport $\frac{R'}{R}$ qui est toujours moindre que l'unité. FIG. 32.

Dans un engrenage à flancs. . . . . $n' =$ ou $> 10\,(1+\mu)$;
Dans un engrenage à lanterne . . . . $n' =$ ou $> 7 + 4\mu$;
Dans un engrenage à développantes . . . . . $n' =$ ou $> 16 + 2\mu$.

(*) Ce procédé, ainsi que les remarques précédentes, sont tirées des Leçons que M. *Savary* avait rédigées pour son cours de Machines à l'École Polytechnique.

Nous ne rapportons point ici les calculs qui conduisent à ces résultats, parce qu'ils peuvent être avantageusement remplacés, dans chaque exemple, par la vérification graphique citée plus haut, laquelle n'exige que le tracé provisoire de deux dents.

CHAPITRE V.

Des engrenages coniques.

Pl. 69, Fig. 1. **881**. On appelle ainsi le système de deux roues dont les axes, au lieu d'être parallèles, vont se rencontrer sous un angle quelconque. Soient Z'O' et Z'o' ces deux axes, situés ici dans le plan vertical de notre épure; on commencera par tracer dans l'angle O'Z'o', une droite Z'A' telle que les deux perpendiculaires abaissées d'un quelconque de ses points sur les deux axes, soient en raison inverse des vitesses angulaires (n° **805**) que l'on veut imprimer aux deux roues, c'est-à-dire en raison inverse des nombres de tours que ces roues doivent faire dans un même temps : ces nombres étant assignés par la question, la détermination graphique de la droite Z'A' est trop facile pour nous y arrêter davantage. Ensuite, selon la grandeur plus ou moins considérable que l'on voudra donner aux deux roues, on choisira sur la droite Z'A' un point A' plus ou moins éloigné de Z', et duquel on abaissera sur les axes les perpendiculaires A'O', A'o'; ce seront là les rayons des *cercles primitifs*, lesquels serviront de bases à deux cônes de révolution Z'A'O' et Z'A'o' dont chacun sera, pour ainsi dire, le noyau d'une des roues.

882. Maintenant, pour obtenir entre les vitesses angulaires le rapport assigné ci-dessus, il suffira évidemment de faire tourner les deux cônes primitifs autour de leurs axes immobiles, de telle sorte que les circonférences A'O' et A'o' prennent des *vitesses absolues* qui soient *égales* (n° **806**). Or, pour remplir cette condition au moyen de la poussée de deux dents correspondantes, il faut terminer ces dents par deux surfaces coniques ayant leur sommet commun en Z', et dont l'une soit l'*enveloppe* de l'espace que parcourrait l'autre, si, en laissant tout à fait immobile le cône Z'A'O', on faisait *rouler* sur celui-là le cône Z'A'o' qui entraînerait avec lui la surface de sa dent; car, en appliquant ici les détails que nous avons donnés aux n^{os} **808** et **809**, on verra bien que ce *roulement* amène les deux cônes primitifs dans la même

situation relative que s'ils avaient tourné autour de leurs axes immobiles, et de manière à faire parcourir *des arcs égaux* par deux points quelconques des circonférences A'O' et A'o'.

883. D'après ce principe, la solution la plus simple s'obtiendra en formant : 1° la dent de la petite roue avec un plan mené par l'axe Z'o', et qui reçoit le nom de *flanc;* 2° la dent de la grande roue, avec une surface conique qui soit constamment tangente à ce flanc, dans toutes les positions qu'il occupera pendant le roulement du cône primitif Z'A'o'; et l'on va voir que ce cône, *enveloppe* du flanc, a pour base une épicycloïde sphérique. FIG. 1.

Dans le plan du cercle primitif dont le rayon est A'o' (plan que nous appellerons le *plan auxiliaire* de projection, et qui est rabattu ici avec ce cercle suivant A'Ge'), traçons une circonférence A'Fo' qui ait pour diamètre le rayon A'o', et faisons-la rouler successivement : 1° sur le cercle primitif du rayon O'A', en conservant toujours entre leurs plans l'inclinaison marquée par l'angle o'A'X ; 2° dans l'intérieur et dans le plan du cercle primitif qui a pour rayon o'A'. Pendant le premier mouvement de rotation, un point quelconque de la circonférence mobile, par exemple celui qui est rabattu en *m* sur le plan horizontal, décrira une épicycloïde sphérique dont nous savons trouver la projection horizontale DM (n° 482), et dont le cône générateur A'S'o' s'obtient en élevant par le centre ω' la perpendiculaire ω'S' sur le plan du cercle mobile: de sorte que cette épicycloïde est située tout entière sur la sphère décrite avec le rayon S'A'; d'ailleurs, si l'on rabat le point (M, M') en F sur le plan auxiliaire, on sait (n° 470) que la droite projetée suivant (A'M, A'M'), et qui a pour vraie position A'F dans le plan auxiliaire, se trouve être une normale de l'épicycloïde au point (M, M'). D'un autre côté, pendant la rotation du cercle A'Fo' sur A'Ge', le même point générateur (M, M') ou F décrira une épicycloïde rectiligne (n° 475) qui sera précisément la droite o'FG. Cela posé, si l'on conduit un plan par cette droite o'FG et par l'axe Z'o', je dis que ce plan méridien sera tangent au cône qui aurait pour sommet le point Z' et pour base l'épicycloïde projetée sur DM. En effet, si l'on observe que le plan méridien en question a pour trace verticale Z'o'X, et pour trace sur le plan auxiliaire la ligne o'F elle-même, on reconnaîtra aisément que ce plan est perpendiculaire sur la droite rabattue suivant A'F, et projetée suivant (A'M, A'M'); or, puisque cette droite est normale à l'épicycloïde, il est certain que le plan méridien Z'o'F contient la tangente de cette courbe au point (M, M'); et comme il passe aussi par le sommet Z' du cône épicy-

cloïdal, il sera bien tangent à cette surface, tout le long de la génératrice qui réunira le sommet Z′ avec le point F relevé en (M, M′).

D'ailleurs, ce contact continuera de subsister le long d'une génératrice variable sur ce cône épicycloïdal, pendant que le cône primitif Z′o′A′ roulera sur le cône Z′O′A′; car, pour toutes les positions du point F sur le petit cercle, les deux cordes A′F et o′F, A′F_2 et o′F_2,..... se trouveront toujours perpendiculaires l'une à l'autre. Donc le plan Z′o′F est bien propre à former le *flanc* d'une dent de la roue Z′o′A′, puisqu'il sera touché constamment et conduit par la dent que termine le cône épicycloïdal [Z′, DM], de la même manière que si le cône primitif Z′o′A′ roulait, sans glisser, sur l'autre cône Z′O′A′ : ce qui remplit bien la condition du n° **882**.

FIG. 1. **884**. Il reste à trouver l'étendue précise que doit avoir le flanc pour correspondre à un arc limité DM de l'épicycloïde. A cet effet, rabattons le flanc Z′o′F sur le plan vertical, autour de l'axe Z′o′ : dans ce mouvement, le point F décrira l'arc de cercle F*f* dont le centre est en o′; et la droite Z′*f* sera le rabattement de la génératrice de contact qui aboutit au point (M, M′). Mais, à l'époque où le flanc passait par l'origine D de l'épicycloïde, il touchait le cône épicycloïdal suivant la génératrice projetée sur O′D, laquelle se rabattra évidemment sur Z′A′. Donc l'angle A′Z′*f* mesure en vraie grandeur sur le flanc, l'espace angulaire qui a été conduit et touché par la dent épicycloïdale, pendant que le flanc a roulé depuis le point D jusqu'en (M, M′). Ce sera donc à cette partie angulaire A′Z′*f* qu'il faudra restreindre l'exécution du flanc, si la dent est réduite à la portion de cône qui correspond à l'arc DM.

885. Mais ce procédé ne serait pas d'une application commode dans l'épure générale qui va suivre, attendu qu'alors nous ne connaîtrons immédiatement que la projection horizontale M de l'extrémité de l'arc DM, avec la sphère Z′A′P′o′ sur laquelle est située l'épicycloïde. Dans ce cas, il faudra rabattre le point M en R, projeter ce dernier en P′ sur le grand cercle de la sphère, et abaisser sur l'axe Z′O′ la perpendiculaire P′K′ qui représentera le parallèle sur lequel doit être situé le point de l'épicycloïde projeté en M. Alors ce parallèle P′K′ coupera le cercle générateur qui a pour diamètre A′o′, suivant une corde projetée au point M′; on rabattra cette corde suivant M′F qui fera connaître le point F, duquel on déduira *f* et le reste comme ci-dessus.

PL. 69, FIG. 2. **886**. *Tracé de l'épure.* Soient Z′O′ et Z′o′ les axes des deux roues, situés dans le plan vertical de projection; soient aussi A′O′ et A′o′ les rayons des *cercles primitifs* que l'on déterminera comme il a été dit au n° **881** : ces deux cercles

sont représentés, sur les deux plans (*fig.* 3 et 4) perpendiculaires aux axes, par les circonférences OA et *oa*. Après avoir choisi deux nombres entiers n et n' qui soient entre eux dans le même rapport que les rayons primitifs, on divisera la circonférence OA en n parties égales AA_1, A_1A_2,.... et la circonférence *oa* en n' parties égales aa_1, a_1a_2,....; et il arrivera nécessairement (n° **836**) que les divisions AA_1 et aa_1 seront de même longueur absolue. Ensuite, on subdivisera chacun de ces arcs en deux parties dont une AB, destinée à former la base de la dent, soit moindre que l'autre BA, d'environ un *douzième* de l'arc total AA_1 (*voyez* n° **837**).

887. Cela posé, dans le plan du cercle primitif A'o', et sur ce rayon comme diamètre, décrivons un cercle qui est rabattu ici suivant ω''A; puis, faisons-le rouler sur la circonférence O'A', en maintenant entre leurs plans l'inclinaison primitive O'A'o'. Dans ce mouvement, le point (A, A') du cercle mobile décrira une épicycloïde située sur la sphère qui a pour rayon s'A'; et pour construire cette courbe sans déplacer le contact actuel A des deux cercles, on prendra deux arcs égaux A*m* et AI, d'où l'on déduira (n° **482**) les projections M, M' d'un point de l'épicycloïde qui aurait son origine en I; mais comme l'origine est réellement en A, on verra bien qu'il suffit de prendre l'arc ρμ égal à BM, pour obtenir un point μ de la projection horizontale Aμλ de l'épicycloïde demandée. Alors le cône qui aura pour base cette épicycloïde et pour sommet le point (Z', O), formera (n° **883**) la dent qui commence en (A, A'); mais il reste à en trouver les intersections avec les deux surfaces coniques inférieure et supérieure qui terminent le noyau de la roue, et dont nous n'avons pas encore parlé. FIG. 2 et 3.

888. Par le point A' menons une droite indéfinie A'Q', formant avec A'Z' un angle un peu plus grand que 90°; puis, après avoir marqué la longueur A'α' que l'on veut donner aux dents, menons la droite α'V' parallèle à A'Q', et faisons tourner ces deux parallèles autour de l'axe vertical (O, O'Z'); nous produirons ainsi deux cônes de révolution que l'on terminera à deux cercles horizontaux Q'Q'', V'V'', assez écartés pour que le solide qu'ils comprendront offre une résistance suffisante : ce solide forme ce qu'on appelle l'*enrayure* qui est quelquefois évidée, comme dans la *Pl.* 66; tandis que la partie comprise entre les deux cônes décrits par A'Q' et α'V' forme la *couronne* dans laquelle sont taillés les dents et les creux, et qui devra être prolongée jusqu'à une certaine limite Z'N'P' dépendant de la saillie que l'on voudra donner aux dents, comme nous l'expliquerons tout à l'heure (n° **890**).

Quant à la petite roue, on tirera la droite A'q' dans une direction à peu près symétrique de A'Q' par rapport à la ligne A'Z'; puis, du point α' on mènera

$\alpha'v'$ parallèle à $A'q'$, et l'on terminera les deux cônes que ces parallèles décriront autour de $Z'o'$, par les deux cercles de l'enrayure $v'v''$ et $q'q''$. Enfin, on prolongera ces mêmes cônes jusqu'à la limite $Z'n'p'$ que nous allons apprendre à assigner pour la saillie des dents de cette seconde roue.

889. Revenons maintenant au cône épicycloïdal qui avait son sommet en (O, Z') et pour base l'épicycloïde projetée sur $A\mu\lambda$, et cherchons la courbe ACL suivant laquelle se projette son intersection avec le cône inférieur décrit par la révolution de la droite $A'Q'$. Comme cette épicycloïde est située sur la sphère du rayon $s'A'$, si nous coupons cette surface et les deux cônes ci-dessus par un plan vertical tel que $O\lambda$, et que nous le rabattions sur le plan vertical autour de l'axe $(O, O'Z')$, on verra bien que le point λ se transportera en λ', et que $Z'\lambda'$ sera le rabattement de la génératrice du cône épicycloïdal; donc, en prolongeant cette droite jusqu'en L' où elle coupe la génératrice $Q'A'P'$, et en ramenant par un arc de cercle le point L' en L sur $O\lambda$, ce dernier point L appartiendra à la projection demandée ACL.

890. De là on déduira la courbe BD symétrique de AC par rapport à la *ligne milieu* de la dent, sur laquelle ces courbes iraient se rencontrer; mais, en les prolongeant ainsi, les deux faces coniques de la dent se couperaient suivant une arête vive, ce que l'on doit éviter avec soin (nos **843** et **876**); c'est pourquoi on *échanfrine* la dent, en traçant un arc de cercle PCD placé un peu au-dessous du point de section des courbes AC et BD, et il en résulte une nouvelle face conique ayant pour sommet le point (Z', O) et pour base un arc de la circonférence $(PCD, P'P'')$. C'est ce cercle d'échanfrinement qui détermine la limite $Z'P'$ dont nous avons parlé au no **888**; et la vraie mesure de la saillie que présentent les dents au-dessus du cône primitif $Z'A'O'$, est exprimée par l'angle $A'Z'P'$.

Le cône supérieur de la couronne, décrit par la révolution de la droite $\alpha'V'$, sera coupé par les faces coniques de la dent, suivant des courbes $\alpha\gamma$, 6∂, évidemment *semblables* avec AC et BD, puisque les génératrices $\alpha'V'$ et $A'Q'$ sont parallèles; de sorte qu'on pourra tracer ces courbes au moyen de rayons vecteurs proportionnels.

891. Quant à la petite roue, après avoir tracé un cercle horizontal sur $(OA, O'A')$ comme diamètre, on fera rouler le cône droit $S'A'\Omega'$ sur le cône $S'A'o'$: le point (A', a) du cercle mobile décrira une épicycloïde située sur la sphère du rayon $S'A'$, et dont on construira la projection $a\mu'$ sur le plan auxiliaire de la *fig.* 4; puis, en imaginant un cône qui ait pour base cette épicycloïde et pour sommet le point (Z', o), on cherchera l'intersection de ce cône

épicycloïdal avec le cône de la couronne décrit par la révolution de la droite $A'q'$ autour de l'axe $Z'o'$, ce qui fournira la projection ac du contour de la dent. De là on déduira par symétrie les diverses courbes b_1d_1, a_1c_1,...., que l'on coupera, avant leur rencontre, par le cercle d'échanfrinement pd_1c_1, lequel fera connaître le point p' et la saillie $A'Z'p'$ que présenteront les dents de cette roue au dehors du cône primitif $Z'A'o'$. Nous ne faisons qu'indiquer ces diverses opérations, parce qu'elles sont toutes semblables à celles que nous avons effectuées pour la première roue.

Remarque. Quoique la saillie de la dent ait pour limite rigoureuse la droite $Z'p'$, il sera bon, afin de laisser quelque jeu à la machine, de tracer une autre droite $Z'p''$ un peu plus écartée de l'axe, et de considérer cette dernière comme la limite fictive de la dent, quand il s'agira tout à l'heure de déterminer l'étendue des flancs et des entailles de la grande roue.

892. *Limites des flancs.* Nous avons vu au n° **883** que les flancs de la grande roue qui seront conduits par les dents de la petite, sont les plans verticaux OA, OA_1, OA_2,....; mais pour déterminer la partie utile de ces plans, c'est-à-dire celle qui est successivement touchée par la portion de cône épicycloïdal correspondante à l'arc fini ac, il faudra recourir à la méthode du n° **885**. Ainsi, du point p'' où la génératrice extrême $Z'p''$ du cône épicycloïdal rencontre le grand cercle $O'p''A'$ de la sphère qui contient l'épicycloïde en question, abaissons sur l'axe $Z'o'$ la perpendiculaire $p''k'$; elle coupe le diamètre $O'A'$ du cercle générateur au point 2 que l'on projettera en 3 sur la circonférence de ce cercle; on rabattra le point 3 en 4 sur le plan vertical, et la droite $Z'4$ que l'on prolongera jusqu'en F', où elle rencontre le cône inférieur de la couronne, fera connaître la partie angulaire $A'Z'F'$ du flanc qui seule est conduite par la dent correspondante à l'arc ac. Toutefois, comme la droite $Z'F'$ rencontre aussi le cône supérieur de la couronne au point φ', on doit dire que la grandeur précise du flanc est donnée par le trapèze $A'\alpha'\varphi'F'$, dont les angles F' et φ' fourniront sur le plan horizontal les circonférences auxquelles il faudra terminer les côtés des flancs AF, $\alpha\varphi$, BE,....

Pour la petite roue, on trouvera d'une manière semblable les côtés des flancs af, be,...., en opérant sur la génératrice $Z'P'$ du cône épicycloïdal qui forme la dent de la grande roue.

893. *Limites des entailles.* Au lieu de faire tourner les deux roues autour de leurs axes immobiles, nous pouvons, d'après le principe du n° **809**, laisser le cône $Z'A'O'$ entièrement fixe et faire rouler sur celui-là le cône $Z'A'o'$ qui entraînera avec lui la dent correspondante à l'arc ac. Pendant cette rotation, l'arête

extrême $Z'p''$ de la dent engendrera une surface conique ayant son sommet en Z', et pour base l'épicycloïde rallongée qui sera décrite par le point x' où cette arête va couper le plan du cercle mobile $A'o'$; et les intersections de cette surface avec les deux cônes qui terminent la couronne de la grande roue, indiqneront évidemment les limites de l'entaille à pratiquer, pour que la dent de la petite roue puisse se mouvoir librement.

Fig. 2 et 5. Afin de construire sans confusion cette épicycloïde rallongée qui sera tout entière sur la sphère $x'y'$ décrite avec le rayon $Z'x'$, transportons le triangle $Z'A'O'$ dans la situation $Z''A''O''$, et en traçant la droite $A''x''$ égale et parallèle à $A'x'$, nous aurons les projections x'' et x du point générateur quand il est arrivé dans le plan vertical; d'ailleurs le cercle $x''y''$ décrit avec la distance $Z''x''$ pour rayon, représentera la sphère qni contient l'épicycloïde cherchée. Cela posé, si nous traçons le cercle $A''B''$ avec le rayon $O''A''$, et le cercle $A''b''$ avec nn rayon $o''A''$ choisi égal à $o'A'$, ce dernier sera le rabattement du cercle mobile qui doit rouler sur l'autre; de sorte qu'en prenant deux arcs égaux $A''M = A''m$, et en prolongeant le rayon $o''m$ d'une quantité mG égale à $A''x''$, le poiut G serait le rabattement, et g, g', les projections du point générateur qnand la rotation aurait fait parcourir l'arc $A''M$, si l'origine de cette rotation était en M; mais comme cette origine est vraiment en A'', on verra bien qu'il faut tracer la circonférence *gihl* et porter l'arc *gi* de *h* en *l* pour obtenir un point de la projection *lx* de l'épicycloïde demandée.

Maintenant, il faut imaginer un cône qui ait son sommet en Z'' et pour base l'épicycloïde projetée sur *lx*, et en chercher l'intersection avec le cône inférieur de la couronne de la grande roue, lequel aura pour génératrice sur la *fig.* 5, la droite $A''Q''$ menée parallèlement à $A'Q'$ de la *fig.* 2. D'abord, la génératrice $Z''x''$ du cône épicycloïdal fournira, par sa rencontre avec $A''Q''$, un point (X'', X) de l'intersection demandée. Ensuite, considérons la génératrice quelconque projetée sur $O''l$, et rabattons-la sur le plan vertical : le point de l'épicycloïde projeté en l étant à la même hauteur que g', il se transportera en k' sur la sphère $x''y''$; la génératrice sera donc rabattue suivant $Z''k'$, et alors elle coupera $A''Q''$ au point (r', r); de sorte qu'il n'y aura plus qu'à ramener par un arc de cercle le point r en L sur Ol, pour obtenir un point de la courbe $E''LX$ suivant laquelle se projette horizontalement l'intersection des deux cônes ci-dessus indiqués.

894. C'est cette courbe $E''LX$ qu'il faudra transporter sur la *fig.* 3 suivant EH, avec le soin de placer le point E'' (que nous allons apprendre à déterminer) à l'extrémité E du flanc BE, et le sommet X sur le cercle *limite* THG, lequel se

déduit du point T′ où la couronne de la roue est rencontrée par l'arête Z′p″x′. Quant au point E″ de la *fig.* 5, si l'on se représente bien la rotation du cône primitif Z′A′σ′ sur le cône immobile Z′A′O′, on reconnaîtra aisément qu'il faut prolonger le cercle B″A″ d'une quantité A″U″ égale à l'arc $b_{1}u$ de la *fig.* 4; puis, tirer le rayon O″U″ sur lequel on prendra la longueur U″E″ égale au flanc BE de la *fig.* 3.

Sur le cône supérieur de la couronne, le cercle *limite* θη sera fourni par le point θ′ où la génératrice N′α′V′ est coupée par la même arête Z′p″x′; et la courbe εη étant *semblable* à EH, elle se déduira de celle-ci par des rayons vecteurs proportionnels.

La projection verticale des courbes qui forment le contour des dents, se conclura de la projection horizontale en ramenant les divers points de celle-ci sur les cercles horizontaux auxquels ils appartiennent; mais ce tracé que nous avons effectué ici, ne doit être regardé que comme un complément de la représentation graphique, car il est entièrement inutile pour le constructeur; aussi, sur le plan vertical de la petite roue, nous n'avons figuré qu'une simple *coupe*.

895. *Développement des panneaux*. Pour exécuter cet engrenage, il est nécessaire de connaître, *en vraie grandeur*, les intersections des diverses faces de la dent et du creux avec les deux cônes de la couronne qui sont engendrés par la révolution des droites parallèles P′A′Q′ et N′α′V′ autour de l'axe O′Z′. On développera donc ces deux surfaces coniques par la méthode du nº **251**, en cherchant d'abord la position de leurs sommets sur cet axe; ainsi, pour le cône P′A′Q′ par exemple, on décrira avec son apothème une circonférence sur laquelle on prendra des arcs égaux en grandeur absolue à PC, CD,....; et sur les rayons qui aboutiront à ces points de division, on portera les longueurs des portions de génératrices comprises entre le cercle P′P″ et les divers points projetés en A, B, E, H,...: FIG. 6.

896. Après avoir taillé le solide de l'enrayure et de la couronne, on appliquera sur les deux parois coniques correspondantes à P′Q′ et N′V′, les panneaux dont nous venons de parler, construits en carton flexible, afin qu'en les faisant fléchir, ils puissent coïncider entièrement avec ces surfaces; dans cet état, les courbes *transformées* auront repris leur forme primitive à double courbure, et l'on tracera alors sur les parois coniques le véritable contour des dents et des creux. Ensuite, il n'y aura plus qu'à exécuter les surfaces coniques dirigées vers le sommet Z′, au moyen de l'arête d'une *règle* que l'on promènera sur les contours inférieur et supérieur, avec le soin de l'appuyer

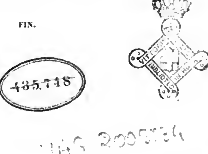
en même temps sur les points de *repère* qui correspondent à une même génératrice, points qui sont donnés par le tracé même des panneaux.

897. *Remarque.* A l'égard des entailles, nous avons voulu expliquer la méthode rigoureuse qui servirait à enlever le solide *minimum*, et laisserait ainsi aux dents la plus grande résistance possible; mais, dans la pratique, et pour ne pas ajouter aux difficultés d'exécution que présente cet engrenage, on se contente de déterminer les cercles limites THG, $\theta\eta$, au moyen des deux points de section T', θ', marqués sur le plan vertical de la *fig.* 2, et l'on prolonge en ligne droite les côtés des flancs BE, AF, $\theta\varepsilon$,..... jusqu'à ces deux circonférences limites; ou bien, on raccorde leurs extrémités avec ces circonférences par une petite courbe arbitraire, mais située visiblement en dehors de la limite rigoureuse EH. Cette simplification qui devra toujours être employée, ne nuit en rien à la marche régulière de l'engrenage; mais il n'en est pas de même pour la suivante.

898. *Méthode approximative.* Pour éviter la longueur et les difficultés que présente le tracé des épicycloïdes sphériques, beaucoup de constructeurs se permettent d'y substituer des épicycloïdes planes, qu'ils déterminent de la manière suivante. Après avoir fixé les rayons primitifs A'O' et A'o', ils mènent par le point A' et perpendiculairement à la génératrice Z'A', un plan que j'appellerai *plan auxiliaire* et qui va couper les axes des roues en deux points que je désignerai par O_2 et o_2; dans ce plan auxiliaire ils décrivent deux cercles avec les rayons O_2A', o_2A', et ils opèrent comme si ces deux circonférences devaient rouler l'une sur l'autre, ce qui n'est pas très-éloigné de la vérité, du moins pour le court intervalle pendant lequel s'exerce la poussée d'une même dent.

Ainsi, après avoir rabattu le plan auxiliaire avec les deux circonférences qu'il renferme, on rapportera sur celles-ci les divisions égales marquées sur les cercles primitifs, et l'on construira les profils d'une dent de chaque roue, comme pour un engrenage cylindrique (n° **838**). Ensuite, comme on termine ici les *couronnes* des deux roues d'angle par les surfaces coniques que décriraient les droites $A'O_2$ et $A'o_2$ en tournant autour des axes respectifs, les profils construits ci-dessus remplaceront les panneaux développés sur la *fig.* 6; de sorte qu'il suffira d'appliquer ces profils sur la couronne même, pour pouvoir exécuter les diverses faces des dents et des creux, ainsi que nous l'avons dit au n° **896**.

FIN.



Ouvrage du même Auteur.



